¡¡APRUEBE SU EXAMEN CON SCHAUM!!

Variable compleja

Schaum

2ª EDICIÓN

Murray R. Spiegel • Seymour Lipschutz
John J. Schiller • Dennis Spellman

640 PROBLEMAS RESUELTOS

REVISIÓN COMPLETA DE TODOS LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES

INTRODUCCIÓN A LA APLICACIÓN CONFORME Y SUS APLICACIONES

Utilícelo en las siguientes asignaturas:

- ✓ VARIABLES COMPLEJAS
- ✓ ANÁLISIS COMPLEJO
- ✓ TEORÍA DE LAS VARIABLES COMPLEJAS
- ✓ MATEMÁTICAS DE VARIABLES COMPLEJAS
- ✓ TEORÍA DE LAS FUNCIONES DE LAS VARIABLES COMPLEJAS
- ✓ APLICACIONES DE LAS VARIABLES COMPLEJAS

McGraw Hill

www.FreeLibros.me

Variable compleja

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

VARIABLE COMPLEJA

Segunda edición

Murray R. Spiegel
Profesor y coordinador, Departamento de Matemáticas,
Rensselaer Polytechnic Institute, Hartford Graduate Center

Seymour Lipschutz
Departamento de Matemáticas, Temple University

John J. Schiller
Departamento de Matemáticas, Temple University

Dennis Spellman
Departamento de Matemáticas, Temple University

Revisión técnica:

Natella Antonyan
Departamento de Física y Matemáticas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
LISBOA • MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • AUCKLAND
LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO
SÃO PAULO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

www.FreeLibros.me

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha Martínez
Editora de desarrollo: María Teresa Zapata Terrazas
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductora: María del Carmen Hano Roa

VARIABLE COMPLEJA
Segunda edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.

McGraw Hill **Educación**

DERECHOS RESERVADOS © 2011, 1991, respecto a la segunda edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
A Subsidiary of ***The McGraw-Hill*** *Companies, Inc.*
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón,
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0551-4
(ISBN edición anterior: 978-968-422883-2)

Impreso en México *Printed in Mexico*

1023456789 1098765432101

Traducido de la segunda edición de *Complex Variables* by Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz, John J. Schiller, and Dennis Spellman, published by The McGraw-Hill Companies, Inc. Copyright © 2009. All rights reserved.

978-0-07-161569-3

The McGraw·Hill Companies

www.FreeLibros.me

ACERCA DE LOS AUTORES

SEYMOUR LIPSCHUTZ forma parte de la Temple University, y antes perteneció al Polytechnic Institute of Brooklyn. Obtuvo su doctorado en la New York University y es uno de los autores más prolíficos de la Serie Schaum's. Entre los libros que ha escrito, tienen especial importancia *Álgebra lineal, Probabilidad, Matemáticas discretas, Teoría de conjuntos, Matemáticas finitas* y *Topología general.*

JOHN SCHILLER es profesor asociado de matemáticas de la Temple University. Obtuvo el grado de maestría en la Universidad de Pensilvania. Ha publicado artículos en las áreas de superficies de Riemann, matemáticas discretas, biología matemática. Ha sido coautor en varios textos de matemáticas.

DENNIS SPELLMAN es integrante de la Temple University y fue profesor en la Universidad del Este, en Venezuela. Obtuvo su doctorado en la New York University, donde escribió su tesis bajo la dirección de Wilhelm Magnus. Es autor de más de 25 artículos publicados en revistas de matemáticas puras y aplicadas.

En su etapa de madurez profesional, MURRAY R. SPIEGEL obtuvo el grado de maestría en Física y de doctorado en Matemáticas en la Cornell University. Laboró en universidades como Harvard, Columbia, Oak Ridge y el Rensselaer Polytechnic Institute, y fue consultor en matemáticas en varias empresas importantes. Su último puesto fue como Profesor y Director de Matemáticas en el centro para Graduados de Hartford en el Rensselaer Polytechnic Institute. Aunque tiene interés en la mayor parte de las ramas de las matemáticas, le interesan en especial las que involucran problemas de aplicación en física e ingeniería. Es autor de numerosos artículos publicados en revistas, así como de 14 libros acerca de distintos temas de las matemáticas.

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

PREFACIO

El objetivo principal de esta segunda edición es en esencia el mismo que el de la primera, con algunos cambios que se indican a continuación. Siendo así, citaremos algunos párrafos del prefacio escrito por Murray R. Spiegel para la primera edición de esta obra.

"La teoría de las funciones de una variable compleja, conocida también brevemente como variable compleja o análisis complejo, es una de las bellas y útiles ramas de las matemáticas. Si bien surgió en una atmósfera de misterio, sospechas y desconfianza, como lo atestiguan los términos "imaginario" y "complejo" presentes en la bibliografía, desde el siglo XIX por fin descansa sobre sólidas bases matemáticas gracias a la obra de Cauchy, Riemann, Weierstrass, Gauss y otros grandes matemáticos."

"Este libro está pensado para que sirva como complemento de todos los libros de texto comunes en un curso formal sobre teoría de variable compleja y sus aplicaciones. También debe ser de considerable valor para aquellas personas en un curso de matemáticas, física, aerodinámica, elasticidad y otras muchas áreas de las ciencias y la ingeniería."

"Cada capítulo empieza con una presentación clara de las definiciones, principios y teoremas pertinentes, así como material ilustrativo y descriptivo. A continuación se presenta un conjunto de problemas resueltos y problemas complementarios… Entre los problemas resueltos se encuentran numerosas pruebas de teoremas y deducciones de fórmulas. La gran cantidad de problemas complementarios con respuestas, sirve como un repaso completo sobre el material visto en cada capítulo."

"Entre los temas tratados se encuentran el álgebra y la geometría de los números complejos, el cálculo diferencial e integral complejo, las series infinitas, como la de Taylor y la de Laurent, la teoría de los residuos con aplicaciones al cálculo de integrales y de series, y las transformaciones conformes con aplicaciones provenientes de diversos campos."

"En este libro se incluyó considerablemente más material del que se cubre en la mayoría de los cursos iniciales. Esto tuvo el objeto de hacer el libro más flexible, de proporcionar un libro más útil y de estimular el interés en los diferentes temas."

Algunos cambios que efectuamos a la primera edición son los siguientes:

a) Ampliamos y corregimos muchas secciones para hacerlas más accesibles a nuestros lectores.
b) Reformamos el texto de modo que el número del capítulo ahora se incluye en la numeración de las secciones, ejemplos y problemas.
c) Muchos resultados se plantean formalmente como proposiciones y teoremas.

Para finalizar, queremos expresar nuestro agradecimiento al equipo de McGraw-Hill, en particular a Charles Wall, por su excelente cooperación durante todas las etapas de la elaboración de esta segunda edición.

SEYMOUR LIPSCHUTZ
JOHN J. SCHILLER
DENNIS SPELLMAN
Temple University

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

CONTENIDO

CAPÍTULO 1 NÚMEROS COMPLEJOS 1

1.1 El sistema de los números reales 1
1.2 Representación gráfica de los números reales 1
1.3 El sistema de números complejos 2
1.4 Operaciones fundamentales con números complejos 2
1.5 Valor absoluto 3
1.6 Fundamentos axiomáticos del sistema de números complejos 3
1.7 Representación gráfica de los números complejos 3
1.8 Forma polar de los números complejos 4
1.9 Teorema de De Moivre 4
1.10 Raíces de números complejos 5
1.11 Fórmula de Euler 5
1.12 Ecuaciones polinómicas 5
1.13 Raíces *n*-ésimas de la unidad 6
1.14 Interpretación vectorial de los números complejos 6
1.15 Proyección estereográfica 6
1.16 Producto punto y producto cruz 7
1.17 Coordenadas conjugadas complejas 7
1.18 Conjuntos de puntos 7

CAPÍTULO 2 FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD 41

2.1 Variables y funciones 41
2.2 Funciones unívocas y funciones multivaluadas 41
2.3 Funciones inversas 41
2.4 Transformaciones 42
2.5 Coordenadas curvilíneas 42
2.6 Funciones elementales 43
2.7 Puntos de ramificación y líneas de ramificación 45
2.8 Superficies de Riemann 46
2.9 Límites 46

www.FreeLibros.me

2.10 Teoremas sobre límites 46
2.11 Infinito 47
2.12 Continuidad 47
2.13 Teoremas sobre continuidad 48
2.14 Continuidad uniforme 48
2.15 Sucesiones 48
2.16 Límite de una sucesión 49
2.17 Teoremas sobre límites de sucesiones 49
2.18 Series infinitas 49

CAPÍTULO 3 DIFERENCIACIÓN COMPLEJA Y ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN 77
3.1 Derivadas 77
3.2 Funciones analíticas 77
3.3 Ecuaciones de Cauchy-Riemann 77
3.4 Funciones armónicas 78
3.5 Interpretación geométrica de la derivada 78
3.6 Diferenciales 79
3.7 Reglas de diferenciación 79
3.8 Derivadas de funciones elementales 80
3.9 Derivadas de orden superior 81
3.10 Regla de L'Hopital 81
3.11 Puntos singulares 81
3.12 Familias ortogonales 82
3.13 Curvas 83
3.14 Aplicaciones en geometría y mecánica 83
3.15 Operadores diferenciales complejos 84
3.16 Gradiente, divergencia, rotor y laplaciano 84

CAPÍTULO 4 INTEGRACIÓN COMPLEJA Y TEOREMA DE CAUCHY 111
4.1 Integrales complejas de línea 111
4.2 Integrales reales de línea 112
4.3 Relación entre integrales reales de línea e integrales complejas de línea 112
4.4 Propiedades de las integrales 112
4.5 Cambio de variables 113
4.6 Regiones simplemente y múltiplemente conexas 113
4.7 Teorema de la curva de Jordan 114

www.FreeLibros.me

4.8 Convención respecto de la orientación de una trayectoria cerrada 114
4.9 Teorema de Green en el plano 114
4.10 Forma compleja del teorema de Green 114
4.11 Teorema de Cauchy. El teorema de Cauchy-Goursat 115
4.12 Teorema de Morera 115
4.13 Integrales indefinidas 115
4.14 Integrales de funciones especiales 115
4.15 Algunas consecuencias del teorema de Cauchy 117

CAPÍTULO 5 FÓRMULAS INTEGRALES DE CAUCHY Y TEOREMAS RELACIONADOS 144
5.1 Fórmulas integrales de Cauchy 144
5.2 Algunos teoremas importantes 145

CAPÍTULO 6 SERIES INFINITAS, SERIES DE TAYLOR Y SERIES DE LAURENT 169
6.1 Sucesiones de funciones 169
6.2 Series de funciones 169
6.3 Convergencia absoluta 170
6.4 Convergencia uniforme de sucesiones y de series 170
6.5 Serie de potencias 170
6.6 Algunos teoremas importantes 171
6.7 Teorema de Taylor 173
6.8 Algunas series especiales 173
6.9 Teorema de Laurent 174
6.10 Clasificación de las singularidades 175
6.11 Funciones enteras 176
6.12 Funciones meromórficas 176
6.13 Desarrollo de Lagrange 176
6.14 Continuación analítica 176

CAPÍTULO 7 EL TEOREMA DEL RESIDUO, CÁLCULO DE INTEGRALES Y SERIES 205
7.1 Residuos 205
7.2 Cálculo de residuos 205
7.3 El teorema del residuo 206
7.4 Cálculo de integrales definidas 207
7.5 Teoremas especiales para calcular integrales 207
7.6 El valor principal de Cauchy para integrales 208

www.FreeLibros.me

7.7 Diferenciación bajo el signo de integración. Regla de Leibniz 208
7.8 Suma de series 209
7.9 Teorema del desarrollo de Mittag-Leffler 209
7.10 Algunos desarrollos especiales 209

CAPÍTULO 8 APLICACIÓN CONFORME 242
8.1 Transformaciones o aplicaciones 242
8.2 Jacobiano de una transformación 242
8.3 Funciones de aplicaciones complejas 243
8.4 Aplicaciones conformes 243
8.5 Teorema de la aplicación de Riemann 243
8.6 Puntos fijos o invariantes de una transformación 244
8.7 Algunas transformaciones generales 244
8.8 Transformaciones sucesivas 245
8.9 Transformación lineal 245
8.10 Transformación bilineal o fraccionaria 245
8.11 Aplicación de un semiplano sobre un círculo 246
8.12 Transformación de Schwarz-Christoffel 246
8.13 Transformaciones de fronteras en forma paramétrica 247
8.14 Algunas transformaciones especiales 247

CAPÍTULO 9 APLICACIONES FÍSICAS DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES 280
9.1 Problemas de valor frontera 280
9.2 Funciones armónicas y conjugadas 280
9.3 Problemas de Dirichlet y de Neumann 280
9.4 Problema de Dirichlet para la circunferencia unitaria. Fórmula de Poisson 281
9.5 Problema de Dirichlet para el semiplano 281
9.6 Soluciones a los problemas de Dirichlet y de Neumann mediante transformaciones conformes 282
9.7 Suposiciones básicas 282
9.8 Potencial complejo 283
9.9 Líneas equipotenciales y líneas de flujo 284
9.10 Fuentes y sumideros 284
9.11 Algunos flujos especiales 284
9.12 Flujo en torno a un obstáculo 286
9.13 Teorema de Bernoulli 286

www.FreeLibros.me

9.14 Teorema de Blasius 286
9.15 Ley de Coulomb 287
9.16 Intensidad del campo eléctrico. Potencial electrostático 287
9.17 Teorema de Gauss 288
9.18 Potencial electrostático complejo 288
9.19 Carga lineal 288
9.20 Conductores 289
9.21 Capacitancia 289
9.22 Flujo de calor 289
9.23 Temperatura compleja 289

CAPÍTULO 10 TEMAS ESPECIALES 319
10.1 Prolongación analítica 319
10.2 Principio de reflexión de Schwarz 320
10.3 Productos infinitos 320
10.4 Convergencia absoluta, condicional y uniforme de productos infinitos 320
10.5 Algunos teoremas importantes sobre productos infinitos 321
10.6 Teorema de Weierstrass para productos infinitos 321
10.7 Algunos productos infinitos especiales 321
10.8 La función gamma 321
10.9 Propiedades de la función gamma 322
10.10 La función beta 323
10.11 Ecuaciones diferenciales 323
10.12 Solución de ecuaciones diferenciales mediante integrales de contorno 325
10.13 Funciones de Bessel 325
10.14 Funciones de Legendre 327
10.15 Función hipergeométrica 328
10.16 La función zeta 328
10.17 Series asintóticas 329
10.18 Método del punto silla 330
10.19 Desarrollos asintóticos especiales 330
10.20 Funciones elípticas 331

ÍNDICE 369

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me

CAPÍTULO 1

Números complejos

1.1 EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

El sistema de los números que se conoce actualmente es el resultado de una evolución gradual, como indica la lista siguiente.

(1) **Números naturales** 1, 2, 3, 4,…, llamados también *enteros positivos*, que al principio sirvieron para contar. Si a y b son números naturales, la *suma* $a + b$ y el *producto* $a \cdot b$, $(a)(b)$ o ab son también números naturales. Por esta razón se dice que el conjunto de los números naturales es *cerrado* bajo las operaciones de *adición* y *multiplicación*, o que satisfacen la *propiedad de cerradura* respecto de estas operaciones.

(2) **Enteros negativos y cero**, que se denotan $-1, -2, -3, \ldots$ y 0, respectivamente, y permiten resolver ecuaciones de la forma $x + b = a$, donde a y b son cualesquiera números naturales. Esto lleva a la operación de *sustracción*, u operación *inversa de la adición*, y se escribe $x = a - b$.

Al conjunto formado por los enteros positivos, negativos y el 0 se le conoce como *enteros*, y es cerrado en las operaciones de adición, multiplicación y sustracción.

(3) **Números racionales** o *fracciones*, por ejemplo, $\frac{3}{4}$, $-\frac{8}{3}$,…, que permiten solucionar ecuaciones de la forma $bx = a$ para todo par de enteros a y b, donde $b \neq 0$. Esto lleva a la operación de *división* o *inversa de la multiplicación*; se escribe $x = a/b$ o $a \div b$ (el *cociente* de a y b), donde a es el *numerador* y b es el *denominador*.

El conjunto de los enteros es una parte o *subconjunto* de los números racionales, pues los enteros corresponden a los números racionales de la forma a/b, donde $b = 1$.

El conjunto de los números racionales es cerrado bajo las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, en tanto se excluya la división entre cero.

(4) **Números irracionales**, como $\sqrt{2}$ y π, que no se expresan de la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

Al conjunto de números racionales e irracionales se le denomina conjunto de números *reales*. Se supone que el estudiante conoce las diversas operaciones con los números reales.

1.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS REALES

Los números reales se representan como puntos sobre una línea recta, o *eje real* como se indica en la figura 1-1. El punto correspondiente a cero es el *origen*.

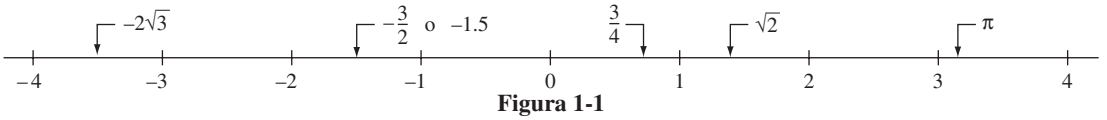


Figura 1-1

www.FreeLibros.me

Al contrario, por cada punto sobre esta recta hay uno y sólo un número real. Si un punto A, correspondiente a un número real a, se encuentra a la derecha de un punto B, correspondiente al número real b, se dice que a es *mayor que* b o, lo que es lo mismo, que b es *menor que* a, y se escribe $a > b$ o $b < a$, respectivamente.

El conjunto de todos los números x tales que $a < x < b$ es un *intervalo abierto* en el eje real, mientras que $a \leq x \leq b$, en donde también se incluyen los puntos finales a y b, es un *intervalo cerrado*. Al símbolo x, que representa cualquier número real, se le conoce como *variable real*.

El *valor absoluto* de un número real a, que se denota $|a|$, es igual a a si $a > 0$, es igual a $-a$ si $a < 0$ y es igual a 0 si $a = 0$. La distancia entre dos puntos a y b en el eje real es $|a - b|$.

1.3 EL SISTEMA DE NÚMEROS COMPLEJOS

No existe ningún número real x que satisfaga la ecuación polinómica $x^2 + 1 = 0$. Para solucionar esta ecuación y otras similares se introduce el conjunto de *números complejos*.

Los *números complejos* son números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, e i, denominado *unidad imaginaria*, tiene la propiedad de que $i^2 = -1$. Si $z = a + bi$, entonces a es llamada *parte real* de z, y b, *parte imaginaria* de z, y se les denota $\mathrm{Re}\{z\}$ e $\mathrm{Im}\{z\}$, respectivamente. El símbolo z, que representa un número complejo cualquiera, es llamado *variable compleja.*

Dos números complejos, $a + bi$ y $c + di$, son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Los números reales se consideran el subconjunto de los números complejos formado por los números complejos en los que $b = 0$. Así, los números complejos $0 + 0i$ y $-3 + 0i$ representan los números reales 0 y -3, respectivamente. Si $a = 0$, al número complejo $0 + bi$ o bi se le conoce como *número imaginario puro.*

El *complejo conjugado*, o simplemente *conjugado*, de un número complejo $a + bi$ es $a - bi$, y a menudo se denota por $\bar{z}$ o z^*.

1.4 OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Para efectuar operaciones con números complejos se procede como en el álgebra de números reales: se reemplaza i^2 por -1 cuando se presente.

(1) *Suma*

$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

(2) *Resta*

$$(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$$

(3) *Multiplicación*

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

(4) *División*
Si $c \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2}$$
$$= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

www.FreeLibros.me

1.5 VALOR ABSOLUTO

El *valor absoluto* o *módulo* de un número complejo $a + bi$ se define como $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

EJEMPLO 1.1: $|-4 + 2i| = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Si $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$ son números complejos, se satisfacen las propiedades siguientes:

(1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ o $|z_1 z_2 \cdots z_m| = |z_1||z_2| \cdots |z_m|$

(2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ si $z_2 \neq 0$

(3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ o $|z_1 + z_2 + \cdots + z_m| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_m|$

(4) $|z_1 \pm z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

1.6 FUNDAMENTOS AXIOMÁTICOS DEL SISTEMA DE NÚMEROS COMPLEJOS

Desde un punto de vista estrictamente lógico, es deseable definir un número complejo como par ordenado (a, b) de números reales a y b sujetos a ciertas definiciones operacionales que resulten equivalentes a las definiciones anteriores. Estas definiciones son las siguientes, y en todas ellas las literales representan números reales.

A. Igualdad $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$, $b = d$

B. Suma $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

C. Producto $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

$m(a, b) = (ma, mb)$

A partir de lo anterior se puede demostrar [problema 1.14] que $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, lo que corresponde a $a + bi$, donde i es un símbolo de $(0, 1)$ y tiene la propiedad de que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ [que se considera que equivale al número real -1] y $(1, 0)$ equivale al número real 1. El par ordenado $(0, 0)$ corresponde al número real 0.

A partir de lo anterior se puede demostrar lo siguiente.

TEOREMA 1.1: Suponga que z_1, z_2 y z_3 pertenecen al conjunto S de números complejos. Entonces:

(1) $z_1 + z_2$ y $z_1 z_2$ pertenecen a S — Ley de cerradura

(2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ — Ley conmutativa de la suma

(3) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ — Ley asociativa de la suma

(4) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ — Ley conmutativa de la multiplicación

(5) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ — Ley asociativa de la multiplicación

(6) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ — Ley distributiva

(7) $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$, $1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1$, al 0 se le conoce como *identidad respecto de la suma*, y al 1, como *identidad respecto de la multiplicación.*

(8) Para todo número complejo z_1 existe un número único z en S tal que $z + z_1 = 0$; [z es el *inverso de* z_1 *respecto de la suma* y se denota $-z_1$].

(9) Para todo $z_1 \neq 0$ existe un número único z en S tal que $z_1 z = z z_1 = 1$; [z es el *inverso de* z_1 *respecto de la multiplicación* y se denota z_1^{-1} o $1/z_1$].

En general, todo conjunto como S cuyos elementos satisfagan lo anterior se conoce como *campo.*

1.7 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Suponga que se toman dos ejes reales $X'0X$ y $Y'0Y$ mutuamente perpendiculares [*eje x* y *eje y*, respectivamente], como se muestra en la figura 1-2. En el plano determinado por estas dos rectas se ubica cualquier punto mediante un par ordenado de números reales (x, y), o *coordenadas rectangulares* del punto. En la figura 1-2 se presentan ejemplos para ubicar los puntos P, Q, R, S y T.

www.FreeLibros.me

Como un número complejo $x + iy$ puede verse como un par ordenado de números reales, los números complejos se representan mediante puntos en el plano xy, al que se le llama *plano complejo* o *diagrama de Argand*. Así, el número complejo representado por P se lee como $(3, 4)$ o como $3 + 4i$. A cada número complejo corresponde uno y sólo un punto en el plano, y a cada punto en el plano, uno y sólo un número complejo. Debido a esto, a un número z se le llama también *punto* z. En ocasiones, a los ejes x y y también se les denomina *eje real* y *eje imaginario*, respectivamente, y al plano complejo, *plano* z. La distancia entre dos puntos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, en el plano complejo está dada por $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

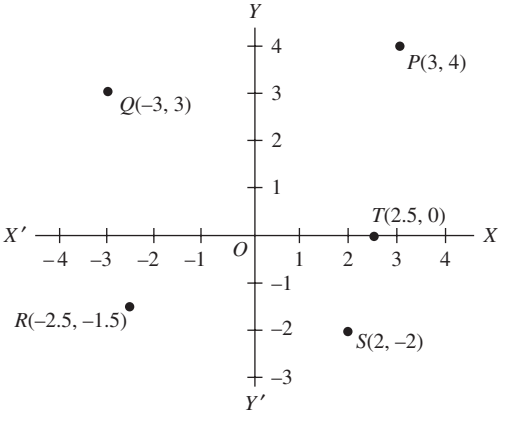


Figura 1-2

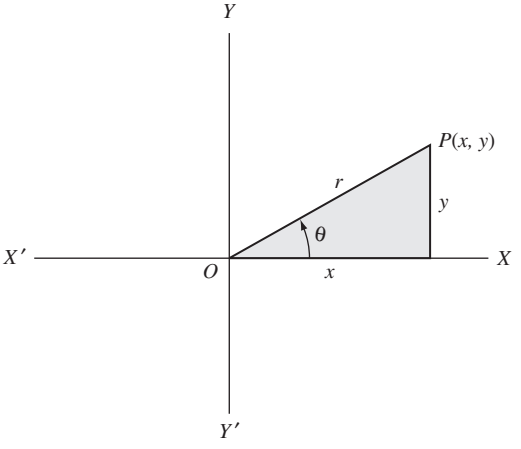


Figura 1-3

1.8 FORMA POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Sea P el punto en el plano complejo correspondiente al número complejo (x, y) o $x + iy$. Entonces, de acuerdo con la figura 1-3, se ve que

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ se conoce como *módulo* o *valor absoluto* de $z = x + iy$ [que se denota mod z o $|z|$]; y θ, como *amplitud* o *argumento* de $z = x + iy$ [que se denota arg z], es el ángulo que forma la recta OP con el lado positivo del eje x.

Se sigue que

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \tag{1.1}$$

que se conoce como *forma polar* de un número complejo, y r y θ, como *coordenadas polares.* Suele ser conveniente escribir, en lugar de $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, la forma abreviada cis θ.

A todo número complejo $z \neq 0$ le corresponde únicamente un valor de θ en $0 \leq \theta < 2\pi$; sin embargo, puede emplearse cualquier otro intervalo de longitud 2π, como $-\pi < \theta \leq \pi$. A cualquiera de estos intervalos elegido de antemano se le conoce como *rango principal*, y al valor de θ, como *valor principal*.

1.9 TEOREMA DE DE MOIVRE

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$ se puede demostrar que [vea el problema 1.19]

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\} \tag{1.2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)\} \tag{1.3}$$

www.FreeLibros.me

Una generalización de la ecuación (1.2) conduce a

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \{\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)\} \tag{1.4}$$

y si $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ se obtiene

$$z^n = \{r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \tag{1.5}$$

que suele conocerse como *teorema de De Moivre.*

1.10 RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Se dice que un número w es la *raíz* n-ésima de un número complejo z si $w^n = z$, y se escribe $w = z^{1/n}$. De acuerdo con el teorema de De Moivre se aprecia que, si n es un entero positivo,

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \{r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\}^{1/n} \\ &= r^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right\} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

de donde se infiere que hay n valores diferentes de $z^{1/n}$; es decir, n raíces n-ésimas de z, siempre y cuando $z \neq 0$.

1.11 FÓRMULA DE EULER

Si se supone que se satisface la expansión de la serie infinita $e^x = 1 + x + (x^2/2!) + (x^3/3!) + \cdots$ del cálculo elemental para $x = i\theta$, se llega a la igualdad

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \tag{1.7}$$

que se conoce como *fórmula de Euler.* Sin embargo, es más práctico tomar (1.7) como definición de $e^{i\theta}$. En general, se define

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \tag{1.8}$$

En el caso especial que $y = 0$, esta igualdad se reduce a e^x.

Observe que en términos de (1.7) el teorema de De Moivre se reduce a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

1.12 ECUACIONES POLINÓMICAS

En la práctica, con frecuencia se necesitan las soluciones de ecuaciones polinómicas de la forma

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{1.9}$$

donde $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ son números complejos dados y n es un entero positivo al que se conoce como *grado* de la ecuación. A las soluciones de estas ecuaciones se les llama *ceros* del polinomio de la izquierda en (1.9) o *raíces de la ecuación*.

www.FreeLibros.me

Un teorema muy importante llamado *teorema fundamental del álgebra* [que se demostrará en el capítulo 5] establece que toda ecuación polinómica de la forma (1.9) tiene al menos una raíz en el plano complejo. A partir de esto se puede demostrar que, en realidad, estas ecuaciones tienen n raíces complejas, de las cuales algunas o todas pueden ser idénticas.

Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son las n raíces (1.9) se escribe como

$$a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = 0 \tag{1.10}$$

que se conoce como *forma factorizada* de la ecuación polinómica.

1.13 RAÍCES *N*-ÉSIMAS DE LA UNIDAD

Las soluciones de la ecuación $z^n = 1$, donde n es un entero positivo, se llaman *raíces n-ésimas de la unidad*, y están dadas por

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{n} = e^{2k\pi i/n} \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1 \tag{1.11}$$

Si $\omega = \cos 2\pi/n + i \operatorname{sen} 2\pi/n = e^{2\pi i/n}$, las n raíces son $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$. Geométricamente, estas raíces representan los n vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en un círculo de radio uno, con centro en el origen. La ecuación de este círculo es $|z| = 1$ y se le suele llamar *círculo unitario*.

1.14 INTERPRETACIÓN VECTORIAL DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo $z = x + iy$ se considera como un vector OP cuyo *punto inicial* se encuentra en el origen O y cuyo *punto final* P es (x, y), como se ve en la figura 1-4. A $OP = x + iy$ se le llama *vector posición* de P. Dos vectores con la misma *longitud* o *magnitud* y la misma *dirección* pero puntos iniciales diferentes, como OP y AB en la figura 1-4, se consideran iguales. Por tanto, se escribe $OP = AB = x + iy$.

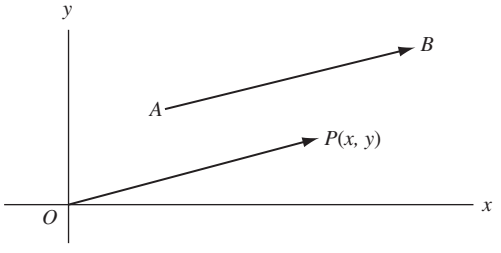


Figura 1-4

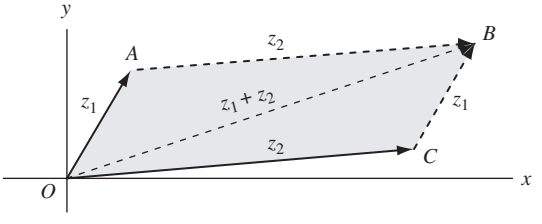


Figura 1-5

La suma de números complejos corresponde a la *ley del paralelogramo* para la suma de vectores [vea la figura 1-5]. Por tanto, para sumar los números complejos z_1 y z_2 se traza el paralelogramo $OABC$, cuyos lados OA y OC corresponden a z_1 y z_2. La diagonal OB de este paralelogramo corresponde a $z_1 + z_2$. Vea el problema 1-5.

1.15 PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

Sea $\mathcal{P}$ [figura 1-6] el plano complejo y considérese una esfera $\mathcal{S}$ tangente a $\mathcal{P}$ en $z = 0$. El diámetro NS es perpendicular a $\mathcal{P}$, y a los puntos N y S se les llama *polo norte* y *polo sur* de $\mathcal{S}$. Para cada punto A de $\mathcal{P}$ puede trazarse una recta NA que interseca a $\mathcal{S}$ en un punto A'. De esta manera, a cada punto del plano complejo $\mathcal{P}$ le corresponde uno y sólo un punto en la esfera $\mathcal{S}$, y todo número complejo se representa mediante un punto de la esfera. Para completar se

www.FreeLibros.me

dice que el punto N corresponde al "punto en el infinito" del plano. Al conjunto de todos los puntos del plano complejo, incluso el punto en el infinito, se le conoce como *plano complejo completo*, *plano z entero* o *plano complejo extendido.*

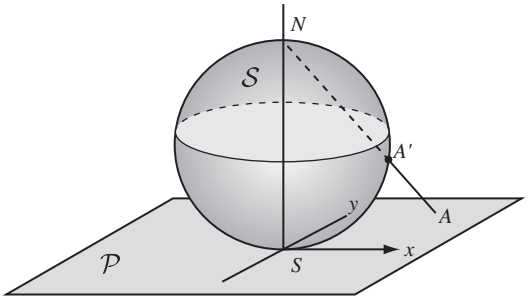


Figura 1-6

A este método para asignar a cada punto del plano uno y sólo un punto de la esfera se le llama *proyección estereográfica.* A la esfera se le suele llamar *esfera de Riemann.* Si se elige que el diámetro de la esfera de Riemann sea la unidad, el ecuador corresponde al círculo unitario del plano complejo.

1.16 PRODUCTO PUNTO Y PRODUCTO CRUZ

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dos números complejos [vectores]. El *producto punto* [también llamado *producto escalar*] de z_1 y z_2 se define como el número real

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 = |z_1||z_2| \cos \theta \tag{1.12}$$

donde θ es el ángulo entre z_1 y z_2 ubicado entre 0 y π.

El *producto cruz* de z_1 y z_2 se define como vector $z_1 \times z_2 = (0, 0, x_1y_2 - y_1x_2)$ perpendicular al plano complejo y de magnitud

$$|z_1 \times z_2| = x_1y_2 - y_1x_2 = |z_1||z_2| \operatorname{sen} \theta \tag{1.13}$$

TEOREMA **1.2:** Sean z_1 y z_2 distintos de cero. Entonces:

(1) Una condición necesaria y suficiente para que z_1 y z_2 sean perpendiculares es que $z_1 \cdot z_2 = 0$.
(2) Una condición necesaria y suficiente para que z_1 y z_2 sean paralelos es que $|z_1 \times z_2| = 0$.
(3) La magnitud de la proyección de z_1 sobre z_2 es $|z_1 \cdot z_2|/|z_2|$.
(4) El área de un paralelogramo cuyos lados sean z_1 y z_2 es $|z_1 \times z_2|$.

1.17 COORDENADAS CONJUGADAS COMPLEJAS

Un punto en el plano complejo se localiza mediante las coordenadas rectangulares (x, y) o mediante las coordenadas polares (r, θ). Existen muchas otras posibilidades. Una de estas posibilidades es aprovechar que $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = (1/2i)(z - \bar{z})$, donde $z = x + iy$. A las coordenadas $(z, \bar{z})$ que localizan un punto se les llama *coordenadas conjugadas complejas*, o simplemente *coordenadas conjugadas* del punto [vea los problemas 1.43 y 1.44].

1.18 CONJUNTOS DE PUNTOS

A toda colección de puntos en el plano complejo se le llama conjunto (*bidimensional*) de puntos, y cada punto es un *miembro* o *elemento* del conjunto. Las siguientes definiciones fundamentales se presentan aquí como referencia.

(1) **Vecindades.** Una *vecindad delta* o δ de un punto z_0 es el conjunto de todos los puntos z tales que $|z - z_0| < \delta$, donde δ es cualquier número positivo dado. Una *vecindad agujerada* δ de z_0 es una vecindad de z_0 en la que se omite el punto z_0, es decir, $0 < |z - z_0| < \delta$.

www.FreeLibros.me

(2) **Puntos límite.** Un punto z_0 se llama *punto límite*, *punto de agrupación* o *punto de acumulación* de un conjunto S si toda vecindad δ agujerada de z_0 contiene puntos de S.

Como δ puede ser cualquier número positivo, se sigue que S debe tener una cantidad infinita de puntos. Observe que z_0 puede o no pertenecer al conjunto S.

(3) **Conjuntos cerrados.** Se dice que un conjunto S es *cerrado* si todo punto límite de S pertenece a S, es decir, si S contiene todos sus puntos límite. Por ejemplo, el conjunto de todos los puntos z tales que $|z| \leq 1$ es un conjunto cerrado.

(4) **Conjuntos acotados.** Se dice que un conjunto S es *acotado* si se puede encontrar una constante M tal que $|z| < M$ para todo punto z en S. Un *conjunto no acotado* es un conjunto que no satisface esta condición. Se dice que un conjunto acotado y cerrado es *compacto*.

(5) **Puntos interiores, puntos exteriores y puntos frontera.** Un punto z_0 es un *punto interior* de un conjunto S si se puede hallar una vecindad δ de z_0 tal que todos sus puntos pertenezcan a S. Si toda vecindad δ de z_0 contiene puntos que pertenecen a S y puntos que no pertenecen a S, entonces z_0 es un *punto frontera.* Si un punto no es un punto interior o un punto frontera de un conjunto, entonces es un *punto exterior* de S.

(6) **Conjuntos abiertos.** Un *conjunto abierto* es un conjunto que consta únicamente de puntos interiores. Por ejemplo, el conjunto de los puntos z tales que $|z| < 1$ es un conjunto abierto.

(7) **Conjuntos conexos.** Un conjunto abierto S es *conexo* si cada par de puntos del conjunto puede unirse mediante una trayectoria que conste de segmentos de recta (una *trayectoria poligonal*) de modo que todos sus puntos pertenezcan a S.

(8) **Regiones abiertas o dominios.** A un conjunto conexo abierto se le llama *región abierta* o *dominio*.

(9) **Cerradura de un conjunto.** Si a un conjunto S se agregan todos los puntos límite de S, el nuevo conjunto es la *cerradura de S*, y es un conjunto cerrado.

(10) **Regiones cerradas.** La cerradura de una región abierta o dominio se llama *región cerrada.*

(11) **Regiones.** Si a una región o dominio se añaden algunos, todos o ninguno de sus puntos límite, se obtiene un conjunto que se llama *región*. Si se agregan todos los puntos límite, la región es *cerrada*; si no se agrega ningún punto límite, la región es *abierta*. En este libro, siempre que se use la palabra *región* sin más calificativo, se hará referencia a una *región abierta* o *dominio*.

(12) **Unión e intersección de conjuntos.** Al conjunto que consta de todos los puntos que pertenecen al conjunto S_1 o al conjunto S_2, o a ambos conjuntos S_1 y S_2, se le llama *unión* de S_1 y S_2, y se denota $S_1 \cup S_2$.

Un conjunto que conste de todos los puntos pertenecientes a los conjuntos S_1 y S_2 se denomina *intersección* de S_1 y S_2, y se denota $S_1 \cap S_2$.

(13) **Complemento de un conjunto.** El conjunto que consta de todos los puntos que no pertenecen al conjunto S se llama *complemento* de S, y se denota $\widetilde{S}$ o S^c.

(14) **Conjunto vacío y subconjuntos.** Es conveniente considerar el conjunto que no tiene ningún punto. A este conjunto se le llama *conjunto vacío* y se denota $\varnothing$. Si dos conjuntos S_1 y S_2 no tienen ningún punto en común (en cuyo caso se dice que son conjuntos *disjuntos* o *mutuamente excluyentes*), esto se indica como sigue: $S_1 \cap S_2 = \varnothing$.

Todo conjunto que se forme al elegir algunos, todos o ningún punto de un conjunto S se llama *subconjunto* de S. Si dejamos de lado el caso en que se eligen todos los puntos de S, el conjunto se llama *conjunto adecuado* de S.

(15) **Numerabilidad o contabilidad de un conjunto.** Suponga que un conjunto sea finito o que sus elementos se colocan en correspondencia uno a uno con los números naturales $1, 2, 3, \ldots$. Entonces se dice que este conjunto es *contable* o *numerable*; si no es así, el conjunto es *no contable* o *no numerable.*

Los siguientes son dos teoremas importantes sobre conjuntos de puntos:

(1) **Teorema de Bolzano-Weierstrass.** Todo conjunto infinito acotado tiene al menos un punto límite.

(2) **Teorema de Heine-Borel.** Sea S un conjunto compacto, cada punto del cual está contenido en uno o más de los conjuntos abiertos $A_1, A_2, \ldots$ [los que se dice que son una *cubierta* de S]. Entonces existe un número finito de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ que forman una cubierta de S.

www.FreeLibros.me

PROBLEMAS RESUELTOS

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS COMPLEJOS

1.1. Realice las operaciones indicadas.

Solución

a) $(3+2i)+(-7-i)=3-7+2i-i=-4+i$
b) $(-7-i)+(3+2i)=-7+3-i+2i=-4+i$
Los resultados de *a*) y *b*) ilustran la *ley conmutativa de la suma.*

c) $(8-6i)-(2i-7)=8-6i-2i+7=15-8i$
d) $(5+3i)+\{(-1+2i)+(7-5i)\}=(5+3i)+\{-1+2i+7-5i\}=(5+3i)+(6-3i)=11$
e) $\{(5+3i)+(-1+2i)\}+(7-5i)=\{5+3i-1+2i\}+(7-5i)=(4+5i)+(7-5i)=11$
Los resultados de *d*) y *e*) ilustran la *ley asociativa de la suma.*

f) $(2-3i)(4+2i)=2(4+2i)-3i(4+2i)=8+4i-12i-6i^2=8+4i-12i+6=14-8i$
g) $(4+2i)(2-3i)=4(2-3i)+2i(2-3i)=8-12i+4i-6i^2=8-12i+4i+6=14-8i$
Los resultados de *f*) y *g*) ilustran la *ley conmutativa de la multiplicación.*

h) $$(2-i)\{(-3+2i)(5-4i)\}=(2-i)\{-15+12i+10i-8i^2\}$$
$$=(2-i)(-7+22i)=-14+44i+7i-22i^2=8+51i$$

i) $$\{(2-i)(-3+2i)\}(5-4i)=\{-6+4i+3i-2i^2\}(5-4i)$$
$$=(-4+7i)(5-4i)=-20+16i+35i-28i^2=8+51i$$

Los resultados de *h*) e *i*) ilustran la *ley asociativa de la multiplicación.*

j) $(-1+2i)\{(7-5i)+(-3+4i)\}=(-1+2i)(4-i)=-4+i+8i-2i^2=-2+9i$

Otro método
$$(-1+2i)\{(7-5i)+(-3+4i)\}=(-1+2i)(7-5i)+(-1+2i)(-3+4i)$$
$$=\{-7+5i+14i-10i^2\}+\{3-4i-6i+8i^2\}$$
$$=(3+19i)+(-5-10i)=-2+9i$$
Lo anterior ilustra la *ley distributiva.*

k) $$\frac{3-2i}{-1+i}=\frac{3-2i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}=\frac{-3-3i+2i+2i^2}{1-i^2}=\frac{-5-i}{2}=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$$

Otro método Por definición, $(3-2i)/(-1+i)$ es el número $a+bi$, donde a y b son números reales, tales que $(-1+i)(a+bi)=-a-b+(a-b)i=3-2i$. Por tanto, $-a-b=3$, $a-b=-2$ y, al resolver simultáneamente, $a=-5/2$, $b=-1/2$, o $a+bi=-5/2-i/2$.

l) $$\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}=\frac{5+5i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}+\frac{20}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}$$
$$=\frac{15+20i+15i+20i^2}{9-16i^2}+\frac{80-60i}{16-9i^2}=\frac{-5+35i}{25}+\frac{80-60i}{25}=3-i$$

m) $$\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}=\frac{3(i^2)^{15}-(i^2)^9 i}{2i-1}=\frac{3(-1)^{15}-(-1)^9 i}{-1+2i}$$
$$=\frac{-3+i}{-1+2i}\cdot\frac{-1-2i}{-1-2i}=\frac{3+6i-i-2i^2}{1-4i^2}=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

www.FreeLibros.me

1.2. Suponga que $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$, y $z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Evalúe las expresiones siguientes.

Solución

a) $|3z_1 - 4z_2| = |3(2+i) - 4(3-2i)| = |6 + 3i - 12 + 8i|$

$$= |-6 + 11i| = \sqrt{(-6)^2 + (11)^2} = \sqrt{157}$$

b) $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8 = (2+i)^3 - 3(2+i)^2 + 4(2+i) - 8$

$$= \{(2)^3 + 3(2)^2(i) + 3(2)(i)^2 + i^3\} - 3(4 + 4i + i^2) + 8 + 4i - 8$$
$$= 8 + 12i - 6 - i - 12 - 12i + 3 + 8 + 4i - 8 = -7 + 3i$$

c) $(\bar{z}_3)^4 = \left(\overline{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^4 = \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = \left[\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\right]^2$

$$= \left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2\right]^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

d) $\left|\dfrac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}\right|^2 = \left|\dfrac{2(3-2i) + (2+i) - 5 - i}{2(2+i) - (3-2i) + 3 - i}\right|^2$

$$= \left|\frac{3 - 4i}{4 + 3i}\right|^2 = \frac{|3-4i|^2}{|4+3i|^2} = \frac{(\sqrt{(3)^2 + (-4)^2})^2}{(\sqrt{(4)^2 + (3)^2})^2} = 1$$

1.3. Encuentre números reales x y y tales que $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$.

Solución

La ecuación dada se escribe $3x + 5y + i(2y - x) = 7 + 5i$. Así, al igualar las partes real e imaginaria, $3x + 5y = 7$, $2y - x = 5$. Al resolver simultáneamente, $x = -1$ y $y = 2$.

1.4. Demuestre: *a*) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ y *b*) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Solución

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$. Así

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2} = \overline{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)}$

$$= x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{x_1 + iy_1} + \overline{x_2 + iy_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

b) $|z_1 z_2| = |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| = |x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)|$

$$= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |z_1||z_2|$$

Otro método

$$|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2}) = z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2 = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2) = |z_1|^2|z_2|^2 \text{ o } |z_1z_2| = |z_1||z_2|$$

donde se aprovechó que el conjugado de un producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados (vea el problema 1.55).

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS. VECTORES

1.5. Realice las operaciones indicadas de manera tanto analítica como gráfica:

a) $(3 + 4i) + (5 + 2i)$, *b*) $(6 - 2i) - (2 - 5i)$ y *c*) $(-3 + 5i) + (4 + 2i) + (5 - 3i) + (-4 - 6i)$.

www.FreeLibros.me

Solución

a) *Analíticamente.* $(3 + 4i) + (5 + 2i) = 3 + 5 + 4i + 2i = 8 + 6i$

Gráficamente. Estos dos números complejos se representan mediante los puntos P_1 y P_2, respectivamente, como en la figura 1-7. Se completa el paralelogramo cuyos lados adyacentes son OP_1 y OP_2. El punto P representa la suma, $8 + 6i$, de los dos números complejos dados. Observe la similitud con la ley del paralelogramo para la suma de dos vectores OP_1 y OP_2 para obtener el vector OP. Debido a esto, suele ser conveniente considerar un número complejo $a + bi$ como vector con *componentes* a y b en dirección de los ejes positivos x y y, respectivamente.

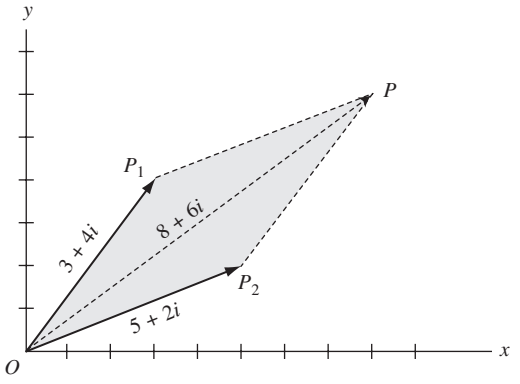


Figura 1-7

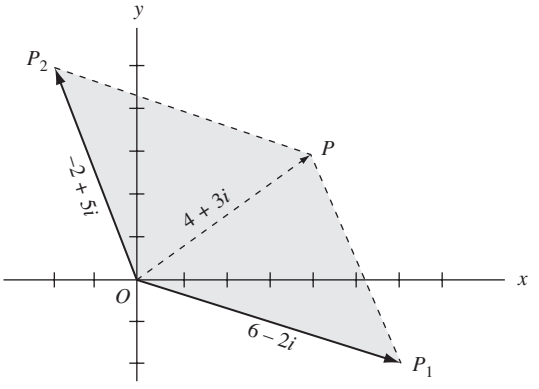


Figura 1-8

b) *Analíticamente.* $(6 - 2i) - (2 - 5i) = 6 - 2 - 2i + 5i = 4 + 3i$
Gráficamente. $(6 - 2i) - (2 - 5i) = 6 - 2i + (-2 + 5i)$. Ahora se suman $6 - 2i$ y $(-2 + 5i)$, como en el inciso *a*). En la figura 1-8, el resultado está indicado por OP.

c) *Analíticamente.*

$$(-3 + 5i) + (4 + 2i) + (5 - 3i) + (-4 - 6i) = (-3 + 4 + 5 - 4) + (5i + 2i - 3i - 6i) = 2 - 2i$$

Gráficamente. Los números que se van a sumar se representan como z_1, z_2, z_3 y z_4, respectivamente. Estos números se representan gráficamente en la figura 1-9. Para hallar la suma buscada se procede como se muestra en la figura 1-10. A partir del punto final del vector z_1 se traza el vector z_2. A partir del punto final de z_2 se traza el vector z_3, y a partir del punto final de z_3 se traza el vector z_4. La suma buscada, a la que se le suele llamar *resultante*, se obtiene con el trazo del vector OP desde el punto inicial de z_1 hasta el punto final de z_4, es decir, $OP = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 2 - 2i$.

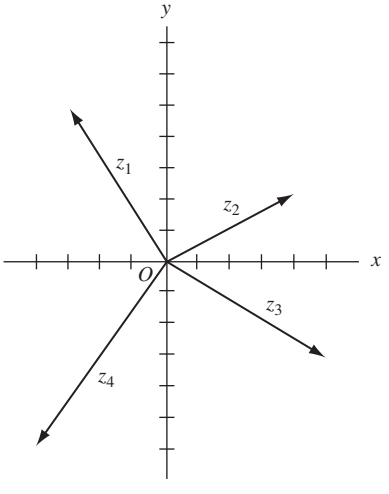


Figura 1-9

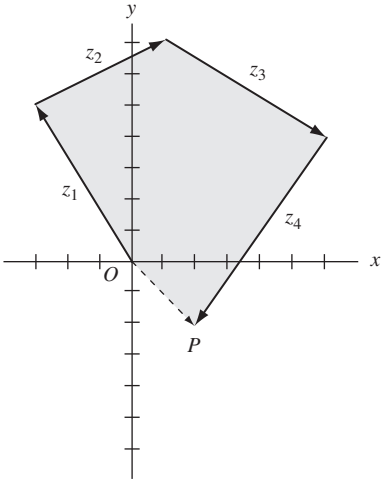


Figura 1-10

www.FreeLibros.me

1.6. Suponga que z_1 y z_2 son dos números complejos (vectores), como en la figura 1-11. Obtenga gráficamente

a) $3z_1 - 2z_2$ y *b*) $\frac{1}{2}z_2 + \frac{5}{3}z_1$

Solución

a) En la figura 1-12, $OA = 3z_1$ es un vector en la misma dirección que el vector z_1 y cuya longitud es tres veces la longitud del vector z_1. $OB = -2z_2$ es un vector en dirección opuesta al vector z_2 y cuya longitud es dos veces la longitud del vector z_2.
Así, el vector es $OC = OA + OB = 3z_1 - 2z_2$.

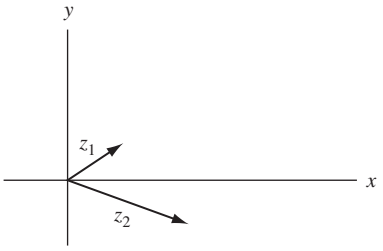


Figura 1-11

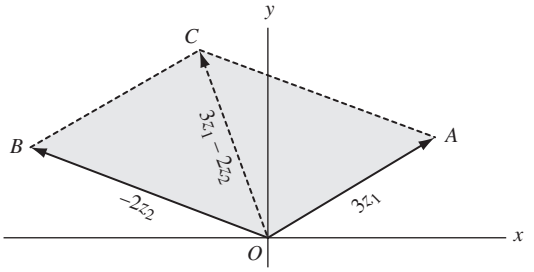


Figura 1-12

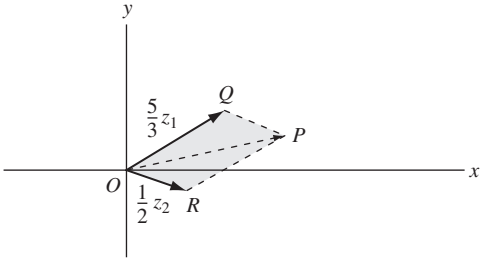


Figura 1-13

b) El vector (número complejo) buscado está representado por OP en la figura 1-13.

1.7. Demuestre que *a*) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, *b*) $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$, *c*) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ y dé una interpretación gráfica.

Solución

a) *Analíticamente.* Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$. Hay que demostrar que

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados, esto será cierto si

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leq x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2$$

es decir, si
$$x_1x_2 + y_1y_2 \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$$

o si (de nuevo al elevar al cuadrado ambos lados)

$$x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 \leq x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2$$

o
$$2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2$$

Pero esto equivale a $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$, lo cual es verdadero. El resultado se demuestra al retroceder paso por paso, lo que sí es posible.

www.FreeLibros.me

Gráficamente. El resultado se colige de que $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$ representan las longitudes de los lados de un triángulo (vea la figura 1-14) y de que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor o igual a la longitud del tercer lado.

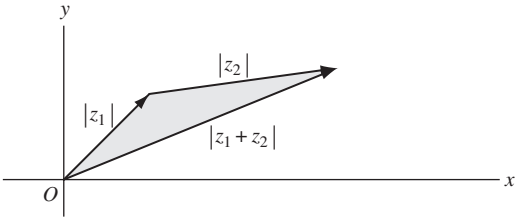


Figura 1-14

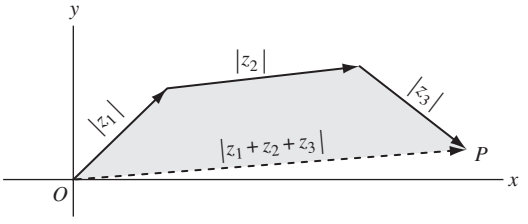


Figura 1-15

b) *Analíticamente.* De acuerdo con el inciso *a*),

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 + (z_2 + z_3)| \leq |z_1| + |z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

Gráficamente. Este resultado es consecuencia del hecho geométrico de que, en un plano, la distancia más corta entre dos puntos O y P es la recta que los une (vea la figura 1-15).

c) *Analíticamente.* De acuerdo con el inciso *a*), $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$. Entonces $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$. Un resultado equivalente que se obtiene al sustituir z_2 por $-z_2$ es $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.
Gráficamente. El resultado equivale a decir que la longitud de uno de los lados de un triángulo es mayor o igual a la diferencia de las longitudes de los otros dos lados.

1.8. Los vectores posición de los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ están representados por z_1 y z_2, respectivamente. *a*) Represente el vector AB como número complejo. *b*) Encuentre la distancia entre los puntos A y B.

Solución

a) De acuerdo con la figura 1-16, $OA + AB = OB$ o

$$AB = OB - OA = z_2 - z_1 = (x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1) = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$$

b) La distancia entre los puntos A y B está dada por

$$|AB| = |(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

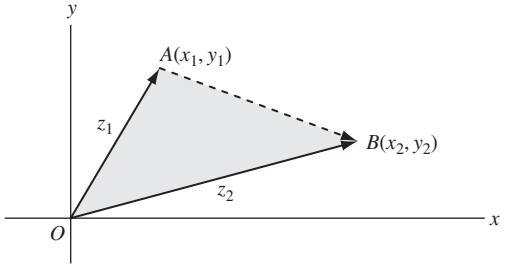


Figura 1-16

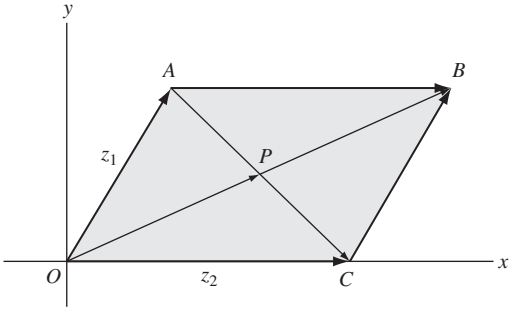


Figura 1-17

1.9. Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ que representan dos vectores no colineales o no paralelos. Si a y b son números reales (escalares) tales que $az_1 + bz_2 = 0$, demuestre que $a = 0$ y $b = 0$.

www.FreeLibros.me

Solución

La condición dada $az_1 + bz_2 = 0$ es equivalente a

$$a(x_1 + iy_1) + b(x_2 + iy_2) = 0 \quad \text{o} \quad ax_1 + bx_2 + i(ay_1 + by_2) = 0.$$

Así, $ax_1 + bx_2 = 0$ y $ay_1 + by_2 = 0$. Estas ecuaciones tienen la solución simultánea $a = 0$ y $b = 0$ si $y_1/x_1 \neq y_2/x_2$, es decir, si los vectores no son colineales o no son paralelos.

1.10. Demuestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

Solución

Sea $OABC$ [figura 1-17] el paralelogramo dado, cuyas diagonales se intersecan en P.
Como $z_1 + AC = z_2$, $AC = z_2 - z_1$. Entonces $AP = m(z_2 - z_1)$, donde $0 \leq m \leq 1$.
Como $OB = z_1 + z_2$, $OP = n(z_1 + z_2)$, donde $0 \leq n \leq 1$.
Pero $OA + AP = OP$; es decir, $z_1 + m(z_2 - z_1) = n(z_1 + z_2)$ o $(1 - m - n)z_1 + (m - n)z_2 = 0$. Por tanto, de acuerdo con el problema 1.9, $1 - m - n = 0$, $m - n = 0$ o $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, de manera que P es el punto medio de las dos diagonales.

1.11. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

Solución

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ los vectores posición de A y B, respectivamente. Sea $z = x + iy$ el vector posición de un punto P en la recta que une A y B.

De acuerdo con la figura 1-18,

$$\begin{array}{lcll} OA + AP = OP & \text{o} & z_1 + AP = z, & \text{es decir, } AP = z - z_1 \\ OA + AB = OB & \text{o} & z_1 + AB = z_2, & \text{es decir, } AB = z_2 - z_1 \end{array}$$

Como AP y AB son colineales, $AP = tAB$ o $z - z_1 = t(z_2 - z_1)$, donde t es real; la ecuación buscada es

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad \text{o} \quad z = (1 - t)z_1 + tz_2$$

Con $z_1 = x_1 + iy_1$, $\quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad$ y $z = x + iy$, lo anterior se expresa como

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = t(y_2 - y_1) \quad \text{o} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Las primeras dos se conocen como *ecuaciones paramétricas* de la recta, en donde t es el parámetro; la segunda es la ecuación de una recta en *forma estándar.*

Otro método Como AP y PB son colineales, existen números reales m y n tales que:

$$mAP = nPB \quad \text{o} \quad m(z - z_1) = n(z_2 - z)$$

Se despeja,

$$z = \frac{mz_1 + nz_2}{m + n} \quad \text{o} \quad x = \frac{mx_1 + nx_2}{m + n} \quad y = \frac{my_1 + ny_2}{m + n}$$

que se conoce como *forma simétrica*.

www.FreeLibros.me

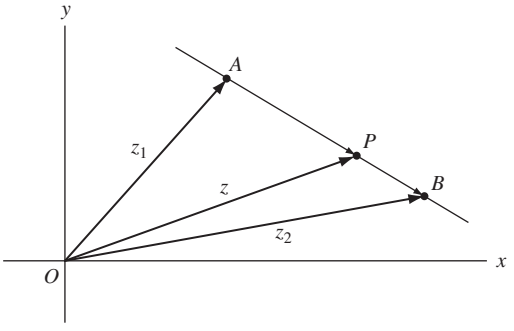


Figura 1-18

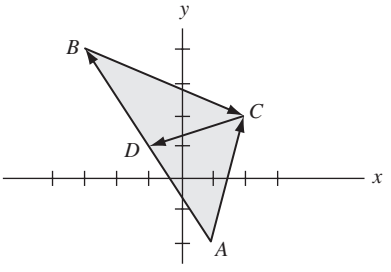


Figura 1-19

1.12. Sean $A(1, -2)$, $B(-3, 4)$ y $C(2, 2)$ los tres vértices del triángulo ABC. Encuentre la longitud de la mediana de C al lado AB.

Solución

Los vectores posición de A, B y C están dados por $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + 4i$ y $z_3 = 2 + 2i$, respectivamente. Entonces, de acuerdo con la figura 1-19,

$$\begin{aligned}
AC &= z_3 - z_1 = 2 + 2i - (1 - 2i) = 1 + 4i \\
BC &= z_3 - z_2 = 2 + 2i - (-3 + 4i) = 5 - 2i \\
AB &= z_2 - z_1 = -3 + 4i - (1 - 2i) = -4 + 6i \\
AD &= \tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}(-4 + 6i) = -2 + 3i \quad \text{pues } D \text{ es el punto medio de } AB. \\
AC + CD &= AD \quad \text{o} \quad CD = AD - AC = -2 + 3i - (1 + 4i) = -3 - i.
\end{aligned}$$

Así, la longitud de la mediana CD es $|CD| = |-3 - i| = \sqrt{10}$.

1.13. Encuentre la ecuación de *a*) un círculo de radio 4 con centro en $(-2, 1)$ y *b*) una elipse cuyo eje mayor tenga longitud 10 y focos en $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

Solución

a) El centro se representa mediante el número complejo $-2 + i$. Si z es un punto cualquiera del círculo [figura 1-20], la distancia de z a $-2 + i$ es

$$|z - (-2 + i)| = 4$$

Entonces, la ecuación requerida es $|z + 2 - i| = 4$, que en forma rectangular está dada por

$$|(x + 2) + i(y - 1)| = 4, \quad \text{es decir } (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

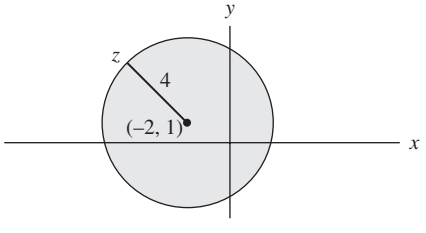


Figura 1-20

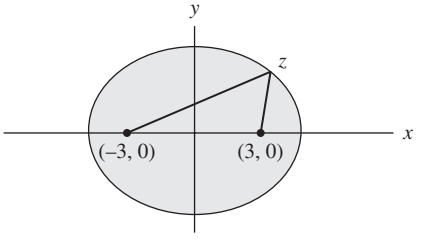


Figura 1-21

www.FreeLibros.me

b) La suma de las distancias de cualquier punto z de la elipse [figura 1-21] a los focos es igual a 10. Por tanto, la ecuación requerida es

$$|z+3| + |z-3| = 10$$

En forma rectangular, esto se reduce a $x^2/25 + y^2/16 = 1$ (vea el problema 1.74).

FUNDAMENTOS AXIOMÁTICOS DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1.14. Con la definición de número complejo como par ordenado de números reales y las definiciones de la página 3 demuestre que $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, donde $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

Solución

De acuerdo con las definiciones de la suma y de la multiplicación de la página 3, se tiene

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

donde

$$(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

Se identifica $(1, 0)$ con 1 y $(0, 1)$ con i, y se ve que $(a, b) = a + bi$.

1.15. Suponga que $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ y $z_3 = (a_3, b_3)$. Demuestre la ley distributiva:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

Solución

Se tiene

$$\begin{aligned} z_1(z_2+z_3) &= (a_1, b_1)\{(a_2, b_2) + (a_3, b_3)\} = (a_1, b_1)(a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\ &= \{a_1(a_2+a_3) - b_1(b_2+b_3), a_1(b_2+b_3) + b_1(a_2+a_3)\} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_2 + b_1a_2 + a_1b_3 + b_1a_3) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_3 + b_1a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) + (a_1, b_1)(a_3, b_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \end{aligned}$$

FORMA POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1.16. Exprese en forma polar los números complejos siguientes.

a) $2 + 2\sqrt{3}i$, *b*) $-5 + 5i$, *c*) $-\sqrt{6} - \sqrt{2}i$ y *d*) $-3i$

Solución

a) $2 + 2\sqrt{3}i$ [vea la figura 1-22.]

El módulo o valor absoluto es $r = |2 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{4+12} = 4$.
La amplitud o argumento es $\theta = \operatorname{sen}^{-1} 2\sqrt{3}/4 = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{3}/2 = 60^\circ = \pi/3$ (radianes).
Entonces

$$2 + 2\sqrt{3}i = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = 4(\cos 60^\circ + i\operatorname{sen} 60^\circ) = 4(\cos \pi/3 + i\operatorname{sen}\pi/3)$$

Este resultado también se expresa como 4 cis $\pi/3$ o, con la fórmula de Euler, como $4e^{\pi i/3}$.

www.FreeLibros.me

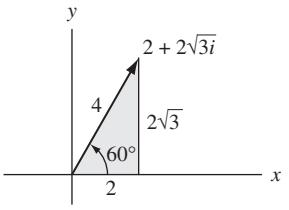


Figura 1-22

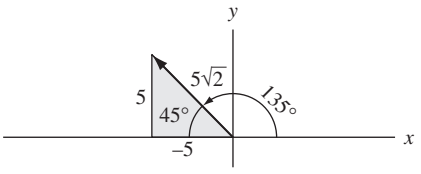


Figura 1-23

b) $-5 + 5i$ [vea la figura 1-23.]

$$r = |-5 + 5i| = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$
$$\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ = 3\pi/4 \text{ (radianes)}$$

De manera que

$$-5 + 5i = 5\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = 5\sqrt{2} \text{ cis } 3\pi/4 = 5\sqrt{2}e^{3\pi i/4}$$

c) $-\sqrt{6} - \sqrt{2}i$ [vea la figura 1-24.]

$$r = |-\sqrt{6} - \sqrt{2}i| = \sqrt{6 + 2} = 2\sqrt{2}$$
$$\theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ = 7\pi/6 \text{ (radianes)}$$

De manera que

$$-\sqrt{6} - \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} 7\pi/6 = 2\sqrt{2}e^{7\pi i/e}$$

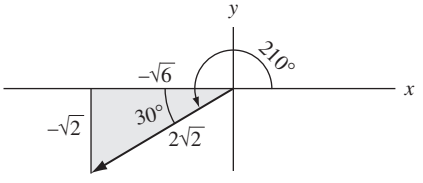


Figura 1-24

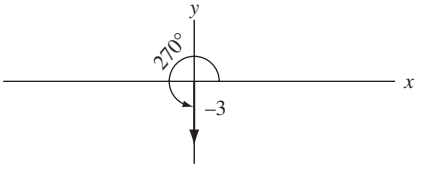


Figura 1-25

d) $-3i$ [vea la figura 1-25.]

$$r = |-3i| = |0 - 3i| = \sqrt{0 + 9} = 3$$
$$\theta = 270^\circ = 3\pi/2 \text{ (radianes)}$$

De manera que

$$-3i = 3(\cos 3\pi/2 + i \operatorname{sen} 3\pi/2) = 3 \text{ cis } 3\pi/2 = 3e^{3\pi i/2}$$

1.17. Represente en forma gráfica las expresiones de los incisos siguientes: *a*) $6(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$, *b*) $4e^{3\pi i/5}$ y *c*) $2e^{-\pi i/4}$.

Solución

a) $6(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = 6 \text{ cis } 240^\circ = 6 \text{ cis } 4\pi/3 = 6e^{4\pi i/3}$ se representa en forma gráfica mediante el vector OP de la figura 1-26.

www.FreeLibros.me

Si se parte del vector AO, de magnitud 6 y en dirección del eje x positivo, se obtiene OP al rotar AO 240° en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En general, $re^{i\theta}$ equivale a un vector que se obtiene al rotar un vector de magnitud r y dirección del eje positivo x en un ángulo θ, en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

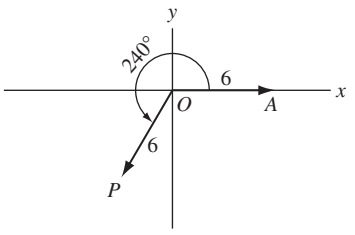


Figura 1-26

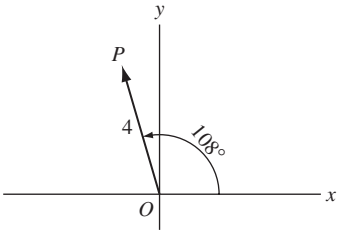


Figura 1-27

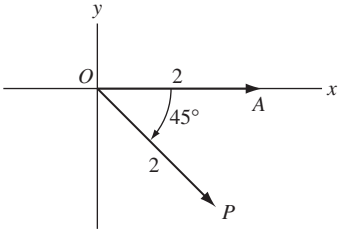


Figura 1-28

b) $$4e^{3\pi i/5} = 4(\cos 3\pi/5 + i \operatorname{sen} 3\pi/5) = 4(\cos 108° + i \operatorname{sen} 108°)$$

está representado en la figura 1-27 mediante el vector OP.

c) $$2e^{-\pi i/4} = 2\{\cos(-\pi/4) + i \operatorname{sen}(-\pi/4)\} = 2\{\cos(-45°) + i \operatorname{sen}(-45°)\}$$

Este número complejo está representado en la figura 1-28 mediante el vector OP. Este vector se obtiene al empezar con el vector OA, de magnitud 2, en la dirección positiva del eje x, y rotarlo un ángulo de −45° en dirección contraria a las manecillas del reloj (que es lo mismo que rotar este vector un ángulo de 45° *en la dirección de las manecillas del reloj*).

1.18. Un hombre recorre 12 millas hacia el noreste, 20 millas 30° hacia el oeste del norte y después 18 millas 60° hacia el suroeste. Determine *a*) de manera analítica y *b*) de manera gráfica cuánto y en qué dirección se alejó de su punto de partida.

Solución

a) *Analíticamente.* Sea O el punto de partida (vea la figura 1-29). Los desplazamientos sucesivos están representados por los vectores OA, AB y BC. El resultado de estos tres desplazamientos se representa con el vector

$$OC = OA + AB + BC$$

Ahora,

$OA = 12(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) = 12e^{\pi i/4}$

$AB = 20\{\cos(90° + 30°) + i \operatorname{sen}(90° + 30°)\} = 20e^{2\pi i/3}$

$BC = 18\{\cos(180° + 60°) + i \operatorname{sen}(180° + 60°)\} = 18e^{4\pi i/3}$

De manera que

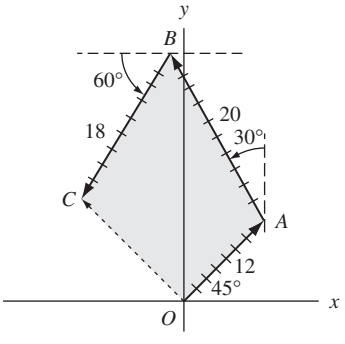


Figura 1-29

$$\begin{aligned} OC &= 12e^{\pi i/4} + 20e^{2\pi i/3} + 18e^{4\pi i/3} \\ &= \{12\cos 45° + 20\cos 120° + 18\cos 240°\} + i\{12\operatorname{sen} 45° + 20\operatorname{sen} 120° + 18\operatorname{sen} 240°\} \\ &= \{(12)(\sqrt{2}/2) + (20)(-1/2) + (18)(-1/2)\} + i\{(12)(\sqrt{2}/2) + (20)(\sqrt{3}/2) + (18)(-\sqrt{3}/2) \\ &= (6\sqrt{2} - 19) + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})i \end{aligned}$$

Si $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = 6\sqrt{2} - 19 + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})i$, entonces $r = \sqrt{(6\sqrt{2} - 19)^2 + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = 14.7$ aproximadamente, y $\theta = \cos^{-1}(6\sqrt{2} - 19)/r = \cos^{-1}(-.717) = 135°49'$ aproximadamente.

Por tanto, el hombre se encuentra a 14.7 millas de su punto de partida en dirección $135°49' - 90° = 45°49'$ al oeste del norte.

b) *Gráficamente.* Con una unidad de longitud adecuada, como PQ en la figura 1-29, que representa 2 millas, y un transportador para medir los ángulos, trace los vectores OA, AB y BC. Después, determine las unidades que mide OC y el ángulo que forma con el eje y positivo, y se obtienen los resultados aproximados de *a*).

www.FreeLibros.me

TEOREMA DE DE MOIVRE

1.19. Suponga que $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$. Demuestre que:

$$a)\quad z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\} \quad \text{y} \quad b)\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\}.$$

Solución

$$\begin{aligned} a)\quad z_1z_2 &= \{r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\}\{r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)\} \\ &= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)\} \\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)\quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)}\cdot\frac{(\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left\{\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2}\right\} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\} \end{aligned}$$

En términos de la fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, los resultados indican que si $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, entonces $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ y $z_1/z_2 = r_1e^{i\theta_1}/r_2e^{i\theta_2} = (r_1/r_2)e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

1.20. Demuestre el teorema de De Moivre: $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta$, donde n es un entero positivo.

Solución

Se usará el *principio de inducción matemática.* Suponga que esta igualdad es verdadera para un determinado entero positivo k, es decir, que $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^k = \cos k\theta + i\operatorname{sen} k\theta$. Se multiplican ambos lados por $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, y se obtiene

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^{k+1} = (\cos k\theta + i\operatorname{sen} k\theta)(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = \cos(k+1)\theta + i\operatorname{sen}(k+1)\theta$$

de acuerdo con el problema 1.19. Por tanto, *si* esta igualdad es verdadera para $n = k$, también lo será para $n = k + 1$. Pero como esta igualdad es claramente verdadera para $n = 1$, también debe serlo para $n = 1 + 1 = 2$ y para $n = 2 + 1 = 3$, etc., y, por ende, debe ser verdadera para todo entero positivo.

Esta igualdad es equivalente a declarar que $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$.

1.21. Demuestre las identidades: *a*) $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$;
b) $(\operatorname{sen} 5\theta)/(\operatorname{sen}\theta) = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1$, si $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$.

Solución

Se emplea la *fórmula binomial*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n$$

donde a los coeficientes

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

que se denotan también como $C(n, r)$ o ${}_nC_r$, se les llama *coeficientes binomiales*. El número $n!$, o *n factorial*, se define como el producto $n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ y se define $0! = 1$.

www.FreeLibros.me

De acuerdo con el problema 1.20, para $n = 5$, y la fórmula binomial, se tiene

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta + i \operatorname{sen} 5\theta &= (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^5 \\
&= \cos^5\theta + \binom{5}{1}(\cos^4\theta)(i\operatorname{sen}\theta) + \binom{5}{2}(\cos^3\theta)(i\operatorname{sen}\theta)^2 \\
&\quad + \binom{5}{3}(\cos^2\theta)(i\operatorname{sen}\theta)^3 + \binom{5}{4}(\cos\theta)(i\operatorname{sen}\theta)^4 + (i\operatorname{sen}\theta)^5 \\
&= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta - 10\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta \\
&\quad - 10i\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta + 5\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta + i\operatorname{sen}^5\theta \\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta + 5\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta \\
&\quad + i(5\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta - 10\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^5\theta)
\end{aligned}$$

Por tanto,

a) $$\begin{aligned}
\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta + 5\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta \\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2 \\
&= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta
\end{aligned}$$

b) $\operatorname{sen} 5\theta = 5\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta - 10\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^5\theta$

o

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 5\theta}{\operatorname{sen}\theta} &= 5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta \\
&= 5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) + (1-\cos^2\theta)^2 \\
&= 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1
\end{aligned}$$

siempre que $\operatorname{sen}\theta \neq 0$, es decir, $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$.

1.22. Muestre que *a*) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y *b*) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Solución

Se tiene

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta \tag{2}$$

a) Se suman (1) y (2),

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \qquad \text{o} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

b) Se resta (2) de (1),

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\operatorname{sen}\theta \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

www.FreeLibros.me

1.23. Demuestre las identidades *a*) $\operatorname{sen}^3\theta = \frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}3\theta$ y *b*) $\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$.

Solución

a) $$\operatorname{sen}^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3}{8i^3} = -\frac{1}{8i}\{(e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}) + 3(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3\}$$
$$= -\frac{1}{8i}(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) = \frac{3}{4}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i}\right)$$
$$= \frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}3\theta$$

b) $$\cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^4}{16}$$
$$= \frac{1}{16}\{(e^{i\theta})^4 + 4(e^{i\theta})^3(e^{-i\theta}) + 6(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta})^2 + 4(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4\}$$
$$= \frac{1}{16}(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}\right) + \frac{3}{8}$$
$$= \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

1.24. Dado un número complejo (vector) z, interprete en forma geométrica $ze^{i\alpha}$, donde α es real.

Solución

$z = re^{i\theta}$ se representa gráficamente por el vector OA en la figura 1-30. Entonces,

$$ze^{i\alpha} = re^{i\theta}\cdot e^{i\alpha} = re^{i(\theta+\alpha)}$$

es el vector representado por OB.

Por tanto, multiplicar un vector z por $e^{i\alpha}$ es lo mismo que rotar z un ángulo α en sentido contrario al de las manecillas del reloj; $e^{i\alpha}$ se considera un *operador* que actúa sobre z para efectuar esta rotación.

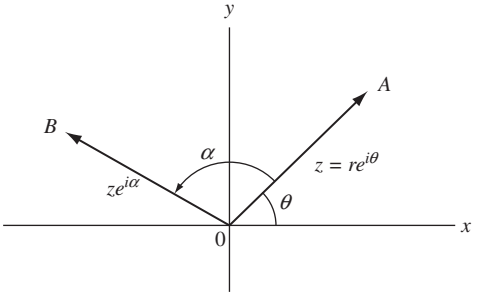


Figura 1-30

1.25. Demuestre: $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Solución

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta+2k\pi) + i\operatorname{sen}(\theta+2k\pi) = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}$$

1.26. Evalúe las expresiones de los incisos siguientes.

a) $[3(\cos 40^\circ + i\operatorname{sen}40^\circ)][4(\cos 80^\circ + i\operatorname{sen}80^\circ)]$ *b*) $\dfrac{(2\text{ cis }15^\circ)^7}{(4\text{ cis }45^\circ)^3}$ y *c*) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$

Solución

a) $$[3(\cos 40^\circ + i\operatorname{sen}40^\circ)][4(\cos 80^\circ + i\operatorname{sen}80^\circ)] = 3\cdot 4[\cos(40^\circ+80^\circ) + i\operatorname{sen}(40^\circ+80^\circ)]$$
$$= 12(\cos 120^\circ + i\operatorname{sen}120^\circ)$$
$$= 12\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -6 + 6\sqrt{3}i$$

www.FreeLibros.me

b) $$\frac{(2 \text{ cis } 15^\circ)^7}{(4 \text{ cis } 45^\circ)^3} = \frac{128 \text{ cis } 105^\circ}{64 \text{ cis } 135^\circ} = 2 \text{ cis}(105^\circ - 135^\circ)$$

$$= 2[\cos(-30^\circ) + i \operatorname{sen}(-30^\circ)] = 2[\cos 30^\circ - i \operatorname{sen} 30^\circ] = \sqrt{3} - i$$

c) $$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = \left\{\frac{2 \text{ cis}(60^\circ)}{2 \text{ cis}(-60^\circ)}\right\}^{10} = (\text{cis } 120^\circ)^{10} = \text{cis } 1200^\circ = \text{cis } 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Otro método

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = \left(\frac{2e^{\pi i/3}}{2e^{-\pi i/3}}\right)^{10} = (e^{2\pi i/3})^{10} = e^{20\pi i/3}$$

$$= e^{6\pi i} e^{2\pi i/3} = (1)[\cos(2\pi/3) + i \operatorname{sen}(2\pi/3)] = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

1.27. Demuestre que *a*) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ y *b*) $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$, e indique las condiciones para que esto sea válido.

Solución

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$. Entonces, $\arg z_1 = \theta_1$ y $\arg z_2 = \theta_2$.

a) Como $z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\}$, $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

b) Como $z_1/z_2 = (r_1/r_2)\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\}$, $\arg(z_1/z_2) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2$.

Como hay muchos valores posibles para $\theta_1 = \arg z_1$ y para $\theta_2 = \arg z_2$, los dos lados de las igualdades anteriores sólo serán iguales para *algunos* valores de $\arg z_1$ y $\arg z_2$. Estas igualdades pueden no satisfacerse aunque se usen los valores principales.

RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS

1.28. *a*) Encuentre todos los valores de z para los que $z^5 = -32$ y *b*) localice estos valores en el plano complejo.

Solución

a) En forma polar, $-32 = \{\cos(\pi + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi)\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Sea $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Entonces, de acuerdo con el teorema de De Moivre,

$$z^5 = r^5(\cos 5\theta + i \operatorname{sen} 5\theta) = 32\{\cos(\pi + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi)\}$$

y de esta manera $r^5 = 32$, $5\theta = \pi + 2k\pi$, de donde $r = 2$, $\theta = (\pi + 2k\pi)/5$. Por tanto,

$$z = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right)\right\}$$

Si $k = 0$, $z = z_1 = 2(\cos \pi/5 + i \operatorname{sen} \pi/5)$.
Si $k = 1$, $z = z_2 = 2(\cos 3\pi/5 + i \operatorname{sen} 3\pi/5)$.
Si $k = 2$, $z = z_3 = 2(\cos 5\pi/5 + i \operatorname{sen} 5\pi/5) = -2$.
Si $k = 3$, $z = z_4 = 2(\cos 7\pi/5 + i \operatorname{sen} 7\pi/5)$.
Si $k = 4$, $z = z_5 = 2(\cos 9\pi/5 + i \operatorname{sen} 9\pi/5)$.

www.FreeLibros.me

Con $k = 5, 6, \ldots$ así como con los valores negativos $-1, -2, \ldots$, se obtienen repeticiones de los anteriores cinco valores de z. Por tanto, éstas son las únicas *soluciones* o *raíces* de la ecuación dada. Estas cinco raíces se llaman *raíces quintas de* -32 y se denotan en conjunto $(-32)^{1/5}$. En general, $a^{1/n}$ representa las n-ésimas raíces de a, y hay n raíces n-ésimas.

b) En la figura 1-31 se muestran los valores de z. Observe que se encuentran distribuidos en espacios iguales sobre la circunferencia de un círculo de radio 2, con centro en el origen. Otra manera de decir esto es que las raíces se representan con los vértices de un polígono regular.

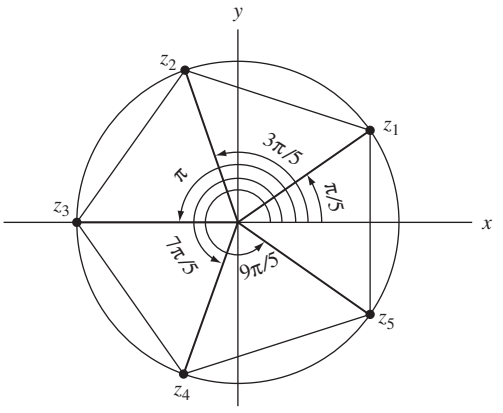


Figura 1-31

1.29. Encuentre las raíces que se indican y localícelas gráficamente.

a) $(-1+i)^{1/3}$ y *b*) $(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4}$

Solución

a) $(-1+i)^{1/3}$

$$-1+i = \sqrt{2}\{\cos(3\pi/4+2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(3\pi/4+2k\pi)\}$$

$$(-1+i)^{1/3} = 2^{1/6}\left\{\cos\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right)\right\}$$

Si $k = 0$, $z_1 = 2^{1/6}(\cos\pi/4 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/4)$.

Si $k = 1$, $z_2 = 2^{1/6}(\cos 11\pi/12 + i\,\mathrm{sen}\,11\pi/12)$.

Si $k = 2$, $z_3 = 2^{1/6}(\cos 19\pi/12 + i\,\mathrm{sen}\,19\pi/12)$.

En la figura 1-32 se representan gráficamente estas raíces.

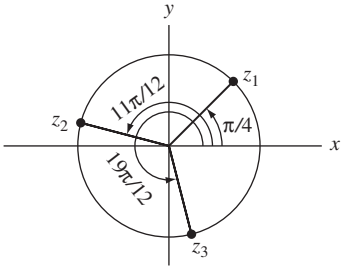


Figura 1-32

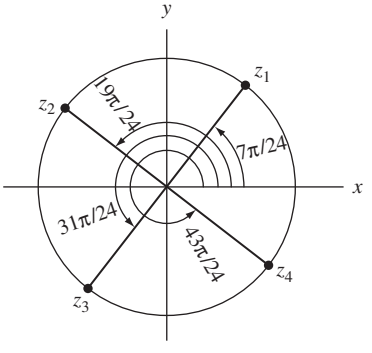


Figura 1-33

b) $(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4}$

$$-2\sqrt{3}-2i = 4\{\cos(7\pi/6+2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(7\pi/6+2k\pi)\}$$

$$(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4} = 4^{1/4}\left\{\cos\left(\frac{7\pi/6+2k\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi/6+2k\pi}{4}\right)\right\}$$

Si $k = 0$, $z_1 = \sqrt{2}(\cos 7\pi/24 + i\,\mathrm{sen}\,7\pi/24)$.

Si $k = 1$, $z_2 = \sqrt{2}(\cos 19\pi/24 + i\,\mathrm{sen}\,19\pi/24)$.

Si $k = 2$, $z_3 = \sqrt{2}(\cos 31\pi/24 + i\,\mathrm{sen}\,31\pi/24)$.

Si $k = 3$, $z_4 = \sqrt{2}(\cos 43\pi/24 + i\,\mathrm{sen}\,43\pi/24)$.

En la figura 1-33 se representan gráficamente estas raíces.

www.FreeLibros.me

1.30. Encuentre las raíces cuadradas de $-15 - 8i$.

Solución

Método 1.

$$-15 - 8i = 17\{\cos(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)\}$$

donde $\cos\theta = -15/17$, $\operatorname{sen}\theta = -8/17$. Entonces, las raíces cuadradas de $-15 - 8i$ son

$$\sqrt{17}(\cos\theta/2 + i \operatorname{sen}\theta/2) \tag{1}$$

y

$$\sqrt{17}\{\cos(\theta/2 + \pi) + i \operatorname{sen}(\theta/2 + \pi)\} = -\sqrt{17}(\cos\theta/2 + i \operatorname{sen}\theta/2) \tag{2}$$

Ahora,

$$\cos\theta/2 = \pm\sqrt{(1 + \cos\theta)/2} = \pm\sqrt{(1 - 15/17)/2} = \pm 1/\sqrt{17}$$

$$\operatorname{sen}\theta/2 = \pm\sqrt{(1 - \cos\theta)/2} = \pm\sqrt{(1 + 15/17)/2} = \pm 4/\sqrt{17}$$

Como θ es un ángulo en el tercer cuadrante, $\theta/2$ es un ángulo en el segundo cuadrante. Por tanto, $\cos\theta/2 = -1/\sqrt{17}$, $\operatorname{sen}\theta/2 = 4/\sqrt{17}$, de manera que de acuerdo con (1) y (2) las raíces cuadradas buscadas son $-1 + 4i$ y $1 - 4i$. Como verificación, observe que $(-1 + 4i)^2 = (1 - 4i)^2 = -15 - 8i$.

Método 2.
Sea $p + iq$, donde p y q son números reales, que representan las raíces cuadradas buscadas. Así,

$$(p + iq)^2 = p^2 - q^2 + 2pqi = -15 - 8i$$

o

$$p^2 - q^2 = -15 \tag{3}$$

$$pq = -4 \tag{4}$$

Se sustituye de (4) $q = -4/p$ en (3), y se obtiene $p^2 - 16/p^2 = -15$ o $p^4 + 15\,p^2 - 16 = 0$, es decir $(p^2 + 16)(p^2 - 1) = 0$ o $p^2 = -16$, $p^2 = 1$. Como p es real, $p = \pm 1$. Según (4), si $p = 1$, $q = -4$; si $p = -1$, $q = 4$. Por tanto, las raíces son $-1 + 4i$ y $1 - 4i$.

ECUACIONES POLINÓMICAS

1.31. Resuelva la *ecuación cuadrática* $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$.

Solución

Se pasa c al lado derecho y se divide entre $a \neq 0$,

$$z^2 + \frac{b}{a}z = -\frac{c}{a}$$

Se suma a ambos lados $(b/2a)^2$ [para completar cuadrados],

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2. \quad \text{Entonces, } \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se obtiene la raíz cuadrada en ambos lados,

$$z + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad \text{Por tanto, } z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

www.FreeLibros.me

1.32. Resuelva la ecuación $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.

Solución

De acuerdo con el problema 1.31, $a = 1$, $b = 2i - 3$ y $c = 5 - i$, por lo que las soluciones son:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4(1)(5-i)}}{2(1)} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2}$$
$$= \frac{3 - 2i \pm (1 - 4i)}{2} = 2 - 3i \quad \text{o} \quad 1 + i$$

pues las raíces cuadradas de $-15 - 8i$ son $\pm(1 - 4i)$ [vea el problema 1.30]. Resulta que estas raíces satisfacen la ecuación dada.

1.33. Suponga que el número racional p/q (donde p y q no tienen factores comunes excepto ± 1, es decir, p/q es irreducible) satisface la ecuación polinómica $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son enteros. Muestre que p y q deben ser factores de a_n y a_0, respectivamente.

Solución

Se sustituye en la ecuación dada $z = p/q$ y se multiplica por q^n, con lo que se obtiene

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0 \tag{1}$$

Se divide entre p y se pasa el último término al lado derecho,

$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \cdots + a_{n-1}q^{n-1} = -\frac{a_nq^n}{p} \tag{2}$$

Como el lado izquierdo de (2) es un entero, el lado derecho también lo es. Pero como p no tiene factores comunes con q, no puede dividir a q^n y por tanto, debe dividir a a_n.

De manera similar, al dividir (1) entre q y pasar al lado derecho el primer término, se encuentra que q debe dividir a a_0.

1.34. Resuelva $6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = 0$.

Solución

Los factores enteros de 6 y de -10 son, respectivamente, ± 1, ± 2, ± 3, ± 6 y ± 1, ± 2, ± 5, ± 10. Por tanto, de acuerdo con el problema 1.33, las soluciones racionales posibles son ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 1/3$, $\pm 1/6$, ± 2, $\pm 2/3$, ± 5, $\pm 5/2$, $\pm 5/3$, $\pm 5/6$, ± 10, $\pm 10/3$.

Al probar, se encuentra que $z = -1/2$ y $z = 2/3$ son soluciones y, de esta manera, el polinomio

$$(2z + 1)(3z - 2) = 6z^2 - z - 2 \text{ es un factor de } 6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10$$

el otro factor es $z^2 - 4z + 5$, que se encuentra por división larga. Por tanto,

$$6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = (6z^2 - z - 2)(z^2 - 4z + 5) = 0$$

Las soluciones de $z^2 - 4z + 5 = 0$ son [vea el problema 1.31]

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

Así, las soluciones son $-1/2$, $2/3$, $2 + i$, $2 - i$.

1.35. Demuestre que la suma y el producto de todas las raíces de $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, donde $a_0 \neq 0$, son $-a_1/a_0$ y $(-1)^na_n/a_0$, respectivamente.

Solución

Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son las n raíces, esta ecuación se escribe en forma factorizada como

$$a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = 0$$

www.FreeLibros.me

La multiplicación directa revela que

$$a_0\{z^n - (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)z^{n-1} + \cdots + (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n\} = 0$$

Se deduce que $-a_0(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = a_1$ y $a_0(-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n = a_n$, por lo que

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -a_1/a_0, \quad z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n a_n/a_0$$

como se requería.

1.36. Suponga que $p + qi$ es una raíz de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, donde $a_0 \neq 0$, $a_1, \ldots, a_n$, p y q son reales. Demuestre que $p - qi$ también es una raíz.

Solución

Sea $p + qi = re^{i\theta}$ en forma polar. Como esto satisface la ecuación,

$$a_0 r^n e^{in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \cdots + a_{n-1} r e^{i\theta} + a_n = 0.$$

Se toma el conjugado de ambos lados

$$a_0 r^n e^{-in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta} + \cdots + a_{n-1} r e^{-i\theta} + a_n = 0$$

y se observa que $re^{-i\theta} = p - qi$ es también una raíz. Este resultado no es válido si no todos los $a_0, \ldots, a_n$ son reales (vea el problema 1.32).

Este teorema suele expresarse como sigue: los ceros de un polinomio con coeficientes reales se presentan en pares conjugados.

RAÍCES *N*-ÉSIMAS DE LA UNIDAD

1.37. Encuentre todas las raíces quintas de la unidad.

Solución

$$z^5 = 1 = \cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi = e^{2k\pi i}$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Entonces,

$$z = \cos\frac{2k\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{5} = e^{2k\pi i/5}$$

donde basta usar $k = 0, 1, 2, 3, 4$, pues los demás valores de k conducen a repeticiones.

Así, las raíces son 1, $e^{2\pi i/5}$, $e^{4\pi i/5}$, $e^{6\pi i/5}$ y $e^{8\pi i/5}$, las cuales al llamar $e^{2\pi i/5} = \omega$, se denotan con 1, ω, ω^2, ω^3 y ω^4.

1.38. Suponga que $n = 2, 3, 4, \ldots$ Demuestre que

a) $$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$$

b) $$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{6\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

Solución

Considere la ecuación $z^n - 1 = 0$, cuyas soluciones son las raíces n-ésimas de la unidad,

$$1,\ e^{2\pi i/n},\ e^{4\pi i/n},\ e^{6\pi i/n}, \ldots, e^{2(n-1)\pi i/n}$$

www.FreeLibros.me

De acuerdo con el problema 1.35, la suma de estas raíces es cero. Entonces,

$$1 + e^{2\pi i/n} + e^{4\pi i/n} + e^{6\pi i/n} + \cdots + e^{2(n-1)\pi i/n} = 0$$

es decir,

$$\left\{1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} + i\left\{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} = 0$$

de donde se derivan los resultados buscados.

PRODUCTO PUNTO Y PRODUCTO CRUZ

1.39. Suponga que $z_1 = 3 - 4i$ y $z_2 = -4 + 3i$. Encuentre: *a*) $z_1 \cdot z_2$ y *b*) $|z_1 \times z_2|$.

Solución

a) $z_1 \cdot z_2 = \operatorname{Re}\{\bar{z}_1 z_2\} = \operatorname{Re}\{(3 + 4i)(-4 + 3i)\} = \operatorname{Re}\{-24 - 7i\} = -24$

Otro método. $z_1 \cdot z_2 = (3)(-4) + (-4)(3) = -24$

b) $|z_1 \times z_2| = |\operatorname{Im}\{\bar{z}_1 z_2\}| = |\operatorname{Im}\{(3 + 4i)(-4 + 3i)\}| = |\operatorname{Im}\{-24 - 7i\}| = |-7| = 7$

Otro método. $|z_1 \times z_2| = |(3)(3) - (-4)(-4)| = |-7| = 7$

1.40. Encuentre el ángulo agudo que forman los vectores del problema 1.39.

Solución

De acuerdo con el problema 1.39 *a*), se tiene

$$\cos\theta = \frac{z_1 \cdot z_2}{|z_1||z_2|} = \frac{-24}{|3 - 4i||-4 + 3i|} = \frac{-24}{25} = -.96$$

Por lo que el ángulo agudo es $\cos^{-1} 0.96 = 16°16'$, aproximadamente.

1.41. Demuestre que el área de un paralelogramo cuyos lados son z_1 y z_2 es $|z_1 \times z_2|$.

Solución

$$\begin{aligned}\text{Área del paralelogramo [figura 1-34]} &= (\text{base})(\text{altura})\\ &= (|z_2|)(|z_1| \operatorname{sen}\theta) = |z_1||z_2| \operatorname{sen}\theta = |z_1 \times z_2|\end{aligned}$$

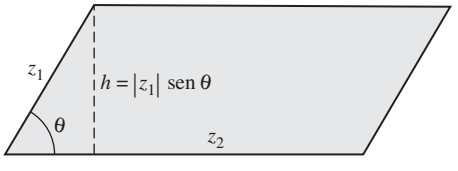


Figura 1-34

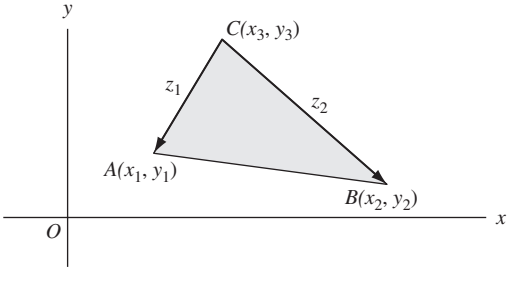


Figura 1-35

www.FreeLibros.me

1.42. Encuentre el área de un triángulo cuyos vértices están en $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$.

Solución

Los vectores de C a A y B [figura 1-35] están dados, respectivamente, por

$$z_1 = (x_1 - x_3) + i(y_1 - y_3) \quad \text{y} \quad z_2 = (x_2 - x_3) + i(y_2 - y_3)$$

Como el área de un triángulo en el que z_1 y z_2 son dos de sus lados es la mitad del área del paralelogramo correspondiente se tiene, de acuerdo con el problema 1.41:

$$\begin{aligned}
\text{Área del triángulo} &= \tfrac{1}{2}|z_1 \times z_2| = \tfrac{1}{2}|\text{Im}\{[(x_1 - x_3) - i(y_1 - y_3)][(x_2 - x_3) + i(y_2 - y_3)]\}| \\
&= \tfrac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)| \\
&= \tfrac{1}{2}|x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3 + x_3y_1 - y_3x_1| \\
&= \tfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|
\end{aligned}$$

expresada como determinante.

COORDENADAS CONJUGADAS COMPLEJAS

1.43. Exprese cada ecuación en coordenadas conjugadas: *a*) $2x + y = 5$ y *b*) $x^2 + y^2 = 36$.

Solución

a) Como $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $x = (z + \bar{z})/2$ y $y = (z - \bar{z})/2i$. Entonces, $2x + y = 5$ se transforma en

$$2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = 5 \quad \text{o} \quad (2i + 1)z + (2i - 1)\bar{z} = 10i$$

Esta ecuación representa una línea recta en el plano z.

b) ***Método 1.*** La ecuación es $(x + iy)(x - iy) = 36$ o $z\bar{z} = 36$.

Método 2. En $x^2 + y^2 = 36$ se sustituye $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$, y se obtiene $z\bar{z} = 36$.

La ecuación representa un círculo en el plano z de radio 6, con centro en el origen.

1.44. Demuestre que, en el plano z, la ecuación de un círculo o de una recta se expresa como $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$, donde α y γ son constantes reales mientras que β puede ser una constante compleja.

Solución

La ecuación general de un círculo en el plano xy se expresa como

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

lo que en coordenadas conjugadas se convierte en

$$Az\bar{z} + B\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + C\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + D = 0 \quad \text{o} \quad Az\bar{z} + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)z + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)\bar{z} + D = 0$$

Con $A = \alpha$, $(B/2) + (C/2i) = \beta$ y $D = \gamma$, se obtiene el resultado buscado.

En el caso especial en el que $A = \alpha = 0$, el círculo degenera en una recta.

www.FreeLibros.me

CONJUNTOS DE PUNTOS

1.45. Se da el conjunto de puntos S:$\{i,\ \frac{1}{2}i,\ \frac{1}{3}i,\ \frac{1}{4}i,\ \ldots\}$, o brevemente $\{i/n\}$. *a*) ¿Es S acotado? *b*) ¿Cuáles son sus puntos límites, si los hay? *c*) ¿Es S cerrado? *d*) ¿Cuáles son sus puntos interiores y sus puntos frontera? *e*) ¿Es S abierto? *f*) ¿Es S conexo? *g*) ¿Es S una región abierta o dominio? *h*) ¿Cuál es la cerradura de S? *i*) ¿Cuál es el complemento de S? *j*) ¿Es S numerable? *k*) ¿Es S compacto? *l*) ¿Es compacta la cerradura de S?

Solución

a) S es acotado, pues para todo punto z de S, $|z| < 2$ (por ejemplo), es decir, todos los puntos de S se encuentran dentro de un círculo de radio 2 y centro en el origen.

b) Como toda vecindad agujerada de $z = 0$ contiene puntos de S, un punto límite es $z = 0$. Es el único punto límite.

Observe que, como S está acotado y es infinito, el teorema de Bolzano-Weierstrass prevé *por lo menos un* punto límite.

c) S no es cerrado, pues el punto límite $z = 0$ no pertenece a S.

d) Toda vecindad δ de un punto i/n (es decir, todo círculo de radio δ y centro en un punto i/n) contiene puntos que pertenecen a S y puntos que no pertenecen a S. Por tanto, todo punto de S, incluso el punto $z = 0$, es un punto frontera. S *no* tiene puntos interiores.

e) S no tiene ningún punto interior. Por tanto, no puede ser abierto. S ni es abierto ni es cerrado.

f) Si dos puntos cualesquiera de S se unen mediante una trayectoria poligonal, en esta trayectoria habrá puntos que no pertenezcan a S. Por tanto, S no es conexo.

g) Como S no es un conjunto conexo abierto, no es una región o un dominio.

h) La cerradura de S consta del conjunto S junto con el punto cero, es decir, de $\{0,\ i,\ \frac{1}{2}i,\ \frac{1}{3}i, \ldots\}$.

i) El complemento de S es el conjunto de todos los puntos que no pertenecen a S, es decir, todos los puntos $z \neq i, i/2, i/3, \ldots$.

j) Entre los elementos de S y los números naturales, $1, 2, 3, \ldots$ existe una correspondencia uno a uno, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ccccc} i & \frac{1}{2}i & \frac{1}{3}i & \frac{1}{4} & i\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{array}$$

Por tanto, S es contable.

k) S está acotado pero no es cerrado. Por tanto, no es compacto.

l) La cerradura de S está acotada y cerrada, y por tanto es compacta.

1.46. Dados los conjuntos de puntos $A = \{3,\ -i,\ 4,\ 2+i,\ 5\}$, $B = \{-i,\ 0,\ -1,\ 2+i\}$ y $C = \{-\sqrt{2}i,\ \frac{1}{2},\ 3\}$, encuentre *a*) $A \cup B$, *b*) $A \cap B$, *c*) $A \cap C$, *d*) $A \cap (B \cup C)$, *e*) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ y *f*) $A \cap (B \cap C)$.

Solución

a) $A \cup B$ consta de los puntos que pertenecen ya sea a A o a B o a ambos, y está dado por $\{3, -i, 4, 2+i, 5, 0, -1\}$.

b) $A \cap B$ consta de los puntos que pertenecen tanto a A como a B, y está dado por $\{-i, 2+i\}$.

c) $A \cap C = \{3\}$, que tiene un único miembro, 3.

d) $B \cup C = \{-i, 0, -1, 2+i,\ -\sqrt{2}i,\ \frac{1}{2},\ 3\}$.

Entonces, $A \cap (B \cup C) = \{3, -i, 2+i\}$, que consta de los puntos que pertenecen tanto a A como a $B \cup C$.

e) $A \cap B = \{-i, 2+i\}$, $A \cap C = \{3\}$, de acuerdo con los incisos *b*) y *c*). Por tanto, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{-i, 2+i, 3\}$.

A partir de este inciso y del resultado de *d*) se observa que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, lo que ilustra que A, B y C satisfacen la *ley distributiva.* Es demostrable que los conjuntos manifiestan muchas de las propiedades válidas en el álgebra de números. Esto reviste gran importancia en la teoría y la aplicación.

f) $B \cap C = \varnothing$, el *conjunto vacío*, pues no hay puntos comunes a B y a C. Por tanto, también $A \cap (B \cap C) = \varnothing$.

www.FreeLibros.me

PROBLEMAS DIVERSOS

1.47. A un número se le llama *número algebraico* si es solución de una ecuación polinómica

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0, \text{ donde } a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ son enteros.}$$

Demuestre que *a*) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ y *b*) $\sqrt[3]{4} - 2i$ son números algebraicos.

Solución

a) Sea $z = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ o $z - \sqrt{2} = \sqrt{3}$. Se eleva al cuadrado y se obtiene $z^2 - 2\sqrt{2}z + 2 = 3$ o $z^2 - 1 = 2\sqrt{2}z$. Se eleva de nuevo al cuadrado y se obtiene $z^4 - 2z^2 + 1 = 8z^2$ o $z^4 - 10z^2 + 1 = 0$, ecuación polinómica con coeficientes enteros, una de cuyas raíces es $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Por tanto, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ es un número algebraico.

b) Sea $z = \sqrt[3]{4} - 2i$ o $z + 2i = \sqrt[3]{4}$. Se eleva al cubo y se obtiene $z^3 + 3z^2(2i) + 3z(2i)^2 + (2i)^3 = 4$ o $z^3 - 12z - 4 = i(8 - 6z^2)$. Se eleva al cuadrado y se obtiene $z^6 + 12z^4 - 8z^3 + 48z^2 + 96z + 80 = 0$, ecuación polinómica con coeficientes enteros, una de cuyas raíces es $\sqrt[3]{4} - 2i$. Por tanto, $\sqrt[3]{4} - 2i$ es un número algebraico.

Los números que no son algebraicos, es decir, que no satisfacen ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros, son *números trascendentes.* Se ha demostrado que los números π y e son trascendentes. Sin embargo, aún no se sabe si números como $e\pi$ o $e + \pi$, por ejemplo, son o no trascendentes.

1.48. Represente en forma gráfica el conjunto de valores de z para los que *a*) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| = 2$ y *b*) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| < 2$.

Solución

a) La ecuación dada es equivalente a $|z - 3| = 2|z + 3|$ o, si $z = x + iy$, $|x + iy - 3| = 2|x + iy + 3|$, es decir,

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

Se eleva al cuadrado y se simplifica para obtener

$$x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$$

o

$$(x + 5)^2 + y^2 = 16$$

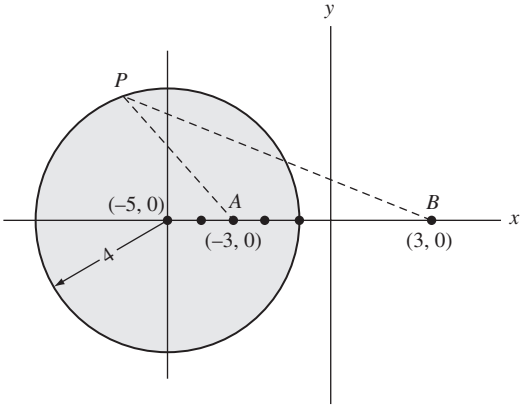


Figura 1-36

es decir, $|z + 5| = 4$, un círculo de radio 4 y centro en $(-5, 0)$ como se muestra en la figura 1-36.

Geométricamente, todo punto P de este círculo es tal que la distancia de P al punto $B(3, 0)$ es el doble de la distancia de P al punto $A(-3, 0)$.

Otro método

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \text{ es equivalente a } \left(\frac{z-3}{z+3}\right)\left(\frac{\bar{z}-3}{\bar{z}+3}\right) = 4 \quad \text{o} \quad z\bar{z} + 5\bar{z} + 5z + 9 = 0$$

es decir, $(z + 5)(\bar{z} + 5) = 16$ o $|z + 5| = 4$.

b) La igualdad dada es equivalente a $|z - 3| < 2|z + 3|$ o $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} < 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$. Se eleva al cuadrado y se simplifica, con lo que se convierte en $x^2 + y^2 + 10x + 9 > 0$ o $(x + 5)^2 + y^2 > 16$, es decir, $|z + 5| > 4$.

Por tanto, el conjunto buscado consta de todos los puntos en el exterior del círculo de la figura 1-36.

www.FreeLibros.me

1.49. Dados los conjuntos A y B representados por $|z - 1| < 2$ y $|z - 2i| < 1.5$, respectivamente, represente geométricamente *a*) $A \cup B$ y *b*) $A \cap B$.

Solución

Los conjuntos de puntos que se buscan aparecen sombreados en las figuras 1-37 y 1-38, respectivamente.

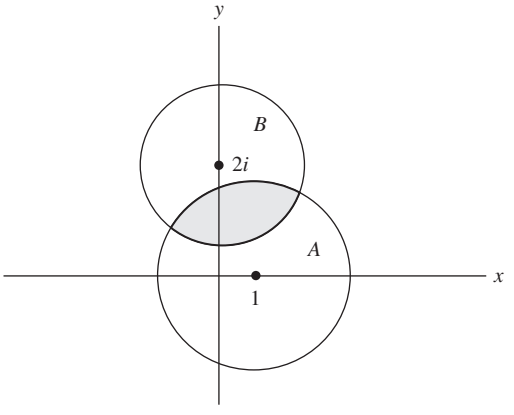


Figura 1-37

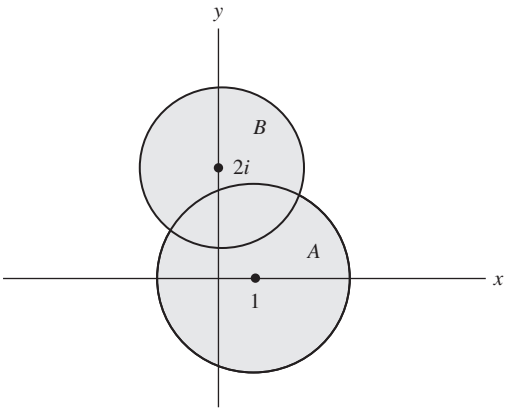


Figura 1-38

1.50. Resuelva $z^2(1 - z^2) = 16$.

Solución

Método 1. Esta ecuación se puede escribir como $z^4 - z^2 + 16 = 0$, es decir, $z^4 + 8z^2 + 16 - 9z^2 = 0$, $(z^2 + 4) - 9z^2 = 0$ o bien, $(z^2 + 4 + 3z)(z^2 + 4 - 3z) = 0$. Por tanto, las soluciones buscadas son las soluciones de $z^2 + 3z + 4 = 0$ y $z^2 - 3z + 4 = 0$, o

$$-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i \quad \text{y} \quad \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Método 2. Si $w = z^2$, esta ecuación se puede escribir como $w^2 - w + 16 = 0$ y $w = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{7}i$. Para obtener las soluciones de $z^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{7}i$ se emplean los métodos del problema 1.30.

1.51. Sean z_1, z_2 y z_3 los vértices de un triángulo equilátero. Demuestre que

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$$

Solución

A partir de la figura 1-39 se observa que

$$z_2 - z_1 = e^{\pi i/3}(z_3 - z_1)$$

$$z_1 - z_3 = e^{\pi i/3}(z_2 - z_3)$$

Entonces, al dividir,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$$

o bien,

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$$

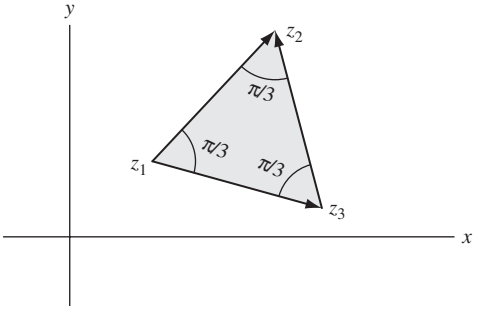


Figura 1-39

www.FreeLibros.me

1.52. Demuestre que para $m = 2, 3, \ldots$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{m}\cdots\operatorname{sen}\frac{(m-1)\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}$$

Solución

Las raíces de $z^m = 1$ son $z = 1, e^{2\pi i/m}, e^{4\pi i/m}, \ldots, e^{2(m-1)\pi i/m}$. Por tanto, se escribe

$$z^m - 1 = (z-1)(z - e^{2\pi i/m})(z - e^{4\pi i/m})\cdots(z - e^{2(m-1)\pi i/m})$$

Se dividen ambos lados entre $z - 1$ y después se establece $z = 1$ [observando que $(z^m - 1)/(z - 1) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{m-1}$], y se encuentra que

$$m = (1 - e^{2\pi i/m})(1 - e^{4\pi i/m})\cdots(1 - e^{2(m-1)\pi i/m}) \tag{1}$$

Se sustituye por el complejo conjugado en ambos lados de (1) y se obtiene

$$m = (1 - e^{-2\pi i/m})(1 - e^{-4\pi i/m})\cdots(1 - e^{-2(m-1)\pi i/m}) \tag{2}$$

Se multiplica (1) por (2) con $(1 - e^{2k\pi i/m})\,(1 - e^{-2k\pi i/m}) = 2 - 2\cos(2k\pi/m)$, y se tiene

$$m^2 = 2^{m-1}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\left(1 - \cos\frac{4\pi}{m}\right)\cdots\left(1 - \cos\frac{2(m-1)\pi}{m}\right) \tag{3}$$

Como $1 - \cos(2k\pi/m) = 2\operatorname{sen}^2(k\pi/m)$, (3) se convierte en

$$m^2 = 2^{2m-2}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{m}\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{m}\cdots\operatorname{sen}^2\frac{(m-1)\pi}{m} \tag{4}$$

Después se saca la raíz cuadrada positiva en ambos lados y se obtiene el resultado deseado.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS COMPLEJOS

1.53. Realice las operaciones indicadas:

a) $(4 - 3i) + (2i - 8)$

b) $3(-1 + 4i) - 2(7 - i)$

c) $(3 + 2i)(2 - i)$

d) $(i - 2)\{2(1 + i) - 3(i - 1)\}$

e) $\dfrac{2 - 3i}{4 - i}$

f) $(4 + i)(3 + 2i)(1 - i)$

g) $\dfrac{(2 + i)(3 - 2i)(1 + 2i)}{(1 - i)^2}$

h) $(2i - 1)^2\left\{\dfrac{4}{1 - i} + \dfrac{2 - i}{1 + i}\right\}$

i) $\dfrac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}}$

1.54. Suponga que $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 4i$ y $z_3 = \sqrt{3} - 2i$. Evalúe los incisos siguientes:

a) $z_1^2 + 2z_1 - 3$

b) $|2z_2 - 3z_1|^2$

c) $(z_3 - \bar{z}_3)^5$

d) $|z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1|$

e) $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right|$

f) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z_3}{\bar{z}_3} + \dfrac{\bar{z}_3}{z_3}\right)$

g) $\overline{(z_2 + z_3)(z_1 - z_3)}$

h) $|z_1^2 + \bar{z}_2^2|^2 + |\bar{z}_3^2 - z_2^2|^2$

i) $\operatorname{Re}\{2z_1^3 + 3z_2^2 - 5z_3^2\}$

www.FreeLibros.me

1.55. Demuestre que *a*) $(\overline{z_1 z_2}) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ y *b*) $(\overline{z_1 z_2 z_3}) = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3$. Generalice estos resultados.

1.56. Pruebe que *a*) $(\overline{z_1/z_2}) = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ y *b*) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ si $z_2 \neq 0$.

1.57. Encuentre números reales x y y tales que $2x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i = (x + y + 2) - (y - x + 3)i$.

1.58. Demuestre que *a*) $\text{Re}\{z\} = (z + \bar{z})/2$ y *b*) $\text{Im}\{z\} = (z - \bar{z})/2i$.

1.59. Suponga que el producto de dos números complejos es cero. Demuestre que por lo menos uno de los dos números debe ser cero.

1.60. Sea $w = 3iz - z^2$ y $z = x + iy$. Encuentre $|w|^2$ en términos de x y y.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE NÚMEROS COMPLEJOS. VECTORES

1.61. Realice las operaciones indicadas tanto analítica como gráficamente.

a) $(2 + 3i) + (4 - 5i)$

b) $(7 + i) - (4 - 2i)$

c) $3(1 + 2i) - 2(2 - 3i)$

d) $3(1 + i) + 2(4 - 3i) - (2 + 5i)$

e) $\frac{1}{2}(4 - 3i) + \frac{3}{2}(5 + 2i)$

1.62. Sean z_1, z_2 y z_3 los vectores de la figura 1-40. Indique gráficamente.

a) $2z_1 + z_3$

b) $(z_1 + z_2) + z_3$

c) $z_1 + (z_2 + z_3)$

d) $3z_1 - 2z_2 + 5z_3$

e) $\frac{1}{3}z_2 - \frac{3}{4}z_1 + \frac{2}{3}z_3$

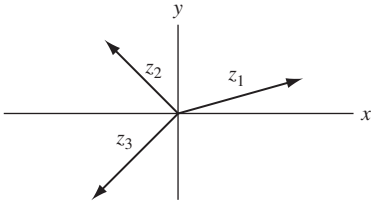


Figura 1-40

1.63. Sean $z_1 = 4 - 3i$ y $z_2 = -1 + 2i$. Obtenga gráfica y analíticamente.

a) $|z_1 + z_2|$, *b*) $|z_1 - z_2|$, *c*) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$ y *d*) $|2\bar{z}_1 - 3\bar{z}_2 - 2|$.

1.64. Los vectores posición de los puntos A, B y C del triángulo ABC están dados por $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4 - 2i$, y $z_3 = 1 - 6i$ respectivamente. Demuestre que ABC es un triángulo isósceles y encuentre la longitud de sus lados.

1.65. Sean z_1, z_2, z_3 y z_4 los vectores posición de los vértices del cuadrilátero $ABCD$. Demuestre que $ABCD$ es un paralelogramo si y sólo si $z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = 0$.

1.66. Suponga que las diagonales de un cuadrilátero se bisecan. Demuestre que el cuadrilátero es un paralelogramo.

1.67. Demuestre que las medianas de un triángulo se encuentran en un punto.

1.68. Sea $ABCD$ un cuadrilátero y sean E, F, G y H los puntos medios de sus lados. Demuestre que $EFGH$ es un paralelogramo.

1.69. En un paralelogramo $ABCD$, el punto E biseca el lado AD. Demuestre que el punto en que BE corta AC triseca AC.

1.70. Los vectores posición de los puntos A y B son $2 + i$ y $3 - 2i$, respectivamente. *a*) Encuentre una ecuación de la recta AB. *b*) Halle la ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio.

1.71. Describa y represente gráficamente el lugar geométrico representado en los incisos siguientes *a*) $|z - i| = 2$, *b*) $|z + 2i| + |z - 2i| = 6$, *c*) $|z - 3| - |z + 3| = 4$, *d*) $z(\bar{z} + 2) = 3$ y *e*) $\text{Im}\{z^2\} = 4$.

1.72. Encuentre en la ecuación de *a*) un círculo de radio 2 con centro en $(-3, 4)$ y *b*) una elipse con focos en $(0, 2)$ y $(0, -2)$ y un eje mayor de longitud 10.

www.FreeLibros.me

1.73. Describa gráficamente la región representada en los incisos siguientes:

a) $1 < |z + i| \leq 2$, *b*) $\text{Re}\{z^2\} > 1$, *c*) $|z + 3i| > 4$ y *d*) $|z + 2 - 3i| + |z - 2 + 3i| < 10$.

1.74. Muestre que la elipse $|z + 3| + |z - 3| = 10$ se expresa en forma rectangular como $x^2/25 + y^2/16 = 1$ [vea el problema 1.13*b*)].

FUNDAMENTOS AXIOMÁTICOS DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1.75. Con la definición de número complejo como par ordenado de números reales, demuestre que si el producto de dos números complejos es cero, al menos uno de estos números debe ser cero.

1.76. Demuestre la ley conmutativa respecto de *a*) la suma y *b*) la multiplicación.

1.77. Demuestre la ley asociativa respecto de *a*) la suma y *b*) la multiplicación.

1.78. *a*) Encuentre números reales x y y tales que $(c, d) \cdot (x, y) = (a, b)$, donde $(c, d) \neq (0, 0)$.

b) ¿Qué relación tiene (x, y) con el resultado de la división de números complejos dado en la página 2?

1.79. Demuestre que

$$\begin{aligned}&(\cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2, \operatorname{sen}\theta_2)\cdots(\cos\theta_n, \operatorname{sen}\theta_n)\\ &= (\cos[\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n], \operatorname{sen}[\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n])\end{aligned}$$

1.80. *a*) ¿Cómo define $(a, b)^{1/n}$, donde n es un entero positivo?

b) Determine $(a, b)^{1/2}$ en términos de a y b.

FORMA POLAR DE NÚMEROS COMPLEJOS

1.81. Exprese en forma polar cada número complejo de los incisos siguientes:

a) $2 - 2i$, *b*) $-1 + \sqrt{3}i$, *c*) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$, *d*) $-i$, *e*) -4, *f*) $-2\sqrt{3} - 2i$ y *g*) $\sqrt{2}i$, *h*) $\sqrt{3}/2 - 3i/2$.

1.82. Muestre que $2 + i = \sqrt{5}e^{i\tan^{-1}(1/2)}$.

1.83. Exprese en forma polar: *a*) $-3 - 4i$ y *b*) $1 - 2i$.

1.84. Represente en forma gráfica lo que se indica en los incisos siguientes y expréselo en forma rectangular:

a) $6(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$, *b*) $12 \operatorname{cis} 90°$, *c*) $4 \operatorname{cis} 315°$, *d*) $2e^{5\pi i/4}$, *e*) $5e^{7\pi i/6}$ y *f*) $3e^{-2\pi i/3}$.

1.85. Un avión recorre 150 millas hacia el sureste, 100 millas hacia el oeste, 225 millas en una dirección de 30° hacia el norte del este, y 200 millas hacia el noreste. Determine *a*) analíticamente y *b*) gráficamente a qué distancia y en qué dirección está de su punto de partida.

1.86. Tres fuerzas actúan en un plano sobre un objeto colocado en O, como se muestra en la figura 1-41. Determine *a*) de manera gráfica y *b*) de manera analítica qué fuerza se requiere para evitar que el objeto se mueva. [A esta fuerza se le suele llamar *equilibrante*.]

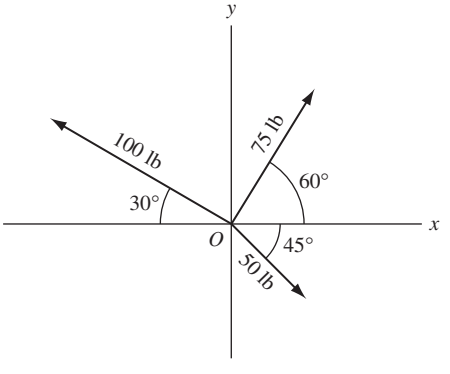


Figura 1-41

1.87. Demuestre que en el círculo $z = Re^{i\theta}$, $|e^{iz}| = e^{-R\operatorname{sen}\theta}$.

1.88. *a*) Demuestre que $r_1e^{i\theta_1} + r_2e^{i\theta_2} = r_3e^{i\theta_3}$, donde

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

y

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{r_1\operatorname{sen}\theta_1 + r_2\operatorname{sen}\theta_2}{r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2}\right)$$

b) Generalice el resultado de *a*).

www.FreeLibros.me

TEOREMA DE DE MOIVRE

1.89. Evalúe las expresiones de los incisos siguientes: *a*) $(5 \text{ cis } 20°)(3 \text{ cis } 40°)$ *b*) $(2 \text{ cis } 50°)^6$

c) $\dfrac{(8 \text{ cis } 40°)^3}{(2 \text{ cis } 60°)^4}$ *d*) $\dfrac{(3e^{\pi i/6})(2e^{-5\pi i/4})(6e^{5\pi i/3})}{(4e^{2\pi i/3})^2}$ *e*) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$

1.90. Demuestre que *a*) $\operatorname{sen} 3\theta = 3 \operatorname{sen}\theta - 4 \operatorname{sen}^3\theta$ y *b*) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

1.91. Compruebe que las soluciones de $z^4 - 3z^2 + 1 = 0$ están dadas por $z = 2\cos 36°, 2\cos 72°, 2\cos 216°$ y $2\cos 252°$.

1.92. Muestre que *a*) $\cos 36° = (\sqrt{5}+1)/4$, *b*) $\cos 72° = (\sqrt{5}-1)/4$. [*Sugerencia*: Use el problema 1.91.]

1.93. Demuestre que *a*) $\operatorname{sen} 4\theta/\operatorname{sen}\theta = 8\cos^3\theta - 4\cos\theta = 2\cos 3\theta + 2\cos\theta$

b) $\cos 4\theta = 8\operatorname{sen}^4\theta - 8\operatorname{sen}^2\theta + 1$

1.94. Demuestre el teorema de De Moivre *a*) para enteros negativos y *b*) números racionales.

RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS

1.95. Encuentre las raíces que se indican en los incisos siguientes y localícelas gráficamente.

a) $(2\sqrt{3}-2i)^{1/2}$, *b*) $(-4+4i)^{1/5}$, *c*) $(2+2\sqrt{3}i)^{1/3}$, *d*) $(-16i)^{1/4}$, *e*) $(64)^{1/6}$ y *f*) $(i)^{2/3}$.

1.96. Encuentre las raíces que se indican y localícelas en el plano complejo. *a*) Raíces cúbicas de 8, *b*) raíces cuadradas de $4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$, *c*) raíces quintas de $-16+16\sqrt{3}i$ y *d*) raíces sextas de $-27i$.

1.97. Resuelva las ecuaciones *a*) $z^4 + 81 = 0$ y *b*) $z^6 + 1 = \sqrt{3}i$.

1.98. Encuentre las raíces cuadradas de *a*) $5 - 12i$ y *b*) $8 + 4\sqrt{5}i$.

1.99. Encuentre las raíces cúbicas de $-11 - 2i$.

ECUACIONES POLINÓMICAS

1.100. Resuelva las ecuaciones siguientes. Encuentre todas las raíces:

a) $5z^2 + 2z + 10 = 0$ y *b*) $z^2 + (i-2)z + (3-i) = 0$

1.101. Resuelva $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$.

1.102. *a*) Encuentre todas las raíces de $z^4 + z^2 + 1 = 0$ y *b*) localícelas en el plano complejo.

1.103. Demuestre que la suma de las raíces de $a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_n = 0$, donde $a_0 \neq 0$, tomadas de r a la vez, es $(-1)^r a_r/a_0$, donde $0 < r < n$.

1.104. Encuentre dos números cuya suma sea 4 y cuyo producto sea 8.

RAÍCES *N*-ÉSIMAS DE LA UNIDAD

1.105. Encuentre todas las raíces *a*) cuartas y *b*) séptimas de la unidad, y muéstrelas en forma gráfica.

1.106. *a*) Compruebe que $1 + \cos 72° + \cos 144° + \cos 216° + \cos 288° = 0$.

b) Dé una interpretación gráfica del resultado obtenido en el inciso *a*).

1.107. Demuestre que $\cos 36° + \cos 72° + \cos 108° + \cos 144° = 0$ e interprételo de manera gráfica.

www.FreeLibros.me

1.108. Compruebe que la suma de los productos de todas las raíces n-ésimas de la unidad tomadas 2, 3, 4. . . , $(n-1)$ a la vez, es cero.

1.109. Encuentre todas las raíces de $(1+z)^5 = (1-z)^5$.

PRODUCTO PUNTO Y PRODUCTO CRUZ

1.110. Dados $z_1 = 2+5i$ y $z_2 = 3-i$, encuentre
a) $z_1 \cdot z_2$, *b)* $|z_1 \times z_2|$, *c)* $z_2 \cdot z_1$, *d)* $|z_2 \times z_1|$, *e)* $|z_1 \cdot z_2|$ y *f)* $|z_2 \cdot z_1|$.

1.111. Demuestre que $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

1.112. Suponga que $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. Compruebe que
a) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$ y *b)* $|z_1 \times z_2| = r_1 r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$.

1.113. Demuestre que $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

1.114. Encuentre el área de un triángulo cuyos vértices se encuentren en $-4-i$, $1+2i$ y $4-3i$.

1.115. Encuentre el área de un cuadrilátero cuyos vértices estén en $(2, -1)$, $(4, 3)$, $(-1, 2)$ y $(-3, -2)$.

COORDENADAS CONJUGADAS

1.116. Describa cada uno de los siguientes lugares geométricos en términos de coordenadas conjugadas z, $\bar{z}$.
a) $z\bar{z} = 16$, *b)* $z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 8 = 0$, *c)* $z + \bar{z} = 4$ y *d)* $\bar{z} = z + 6i$.

1.117. Exprese las ecuaciones siguientes en términos de coordenadas conjugadas.
a) $(x-3)^2 + y^2 = 9$, *b)* $2x - 3y = 5$ y *c)* $4x^2 + 16y^2 = 25$.

CONJUNTOS DE PUNTOS

1.118. Sea S el conjunto de todos los puntos $a + bi$, donde a y b son números racionales, que se encuentran en el interior del cuadrado que aparece sombreado en la figura 1-42. *a)* ¿Es S acotado? *b)* ¿Cuáles son los puntos límites de S, si los hay? *c)* ¿Es S cerrado? *d)* ¿Cuáles son sus puntos interiores y sus puntos frontera? *e)* ¿Es S abierto? *f)* ¿Es S conexo? *g)* ¿Es S una región abierta o un dominio? *h)* ¿Cuál es la cerradura de S? *i)* ¿Cuál es el complemento de S? *j)* ¿Es S contable? *k)* ¿Es S compacto? *l)* ¿Es compacta la cerradura de S?

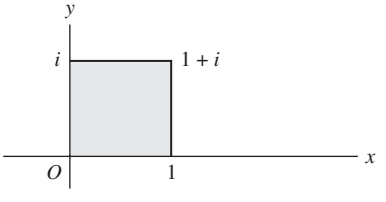


Figura 1-42

1.119. Responda el problema 1.118 si S es el conjunto de todos los puntos en el interior del cuadrado.

1.120. Responda el problema 1.118 si S es el conjunto de todos los puntos en el interior del cuadrado o sobre el cuadrado.

1.121. Dados los conjuntos de puntos $A = \{1, i, -i\}$, $B = \{2, 1, -i\}$, $C = \{i, -i, 1+i\}$ y $D = \{0, -i, 1\}$, encuentre: *a)* $A \cup (B \cup C)$, *b)* $(A \cap C) \cup (B \cap D)$ y *c)* $(A \cup C) \cap (B \cup D)$.

1.122. Suponga que A, B, C y D son conjuntos de puntos. Compruebe que *a)* $A \cup B = B \cup A$, *b)* $A \cap B = B \cap A$, *c)* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, *d)* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ y *e)* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1.123. Suponga que A, B y C son los conjuntos de puntos definidos por $|z+i| < 3$, $|z| < 5$ y $|z+1| < 4$. Represente en forma gráfica las expresiones de los incisos siguientes.

a) $A \cap B \cap C$, *b)* $A \cup B \cup C$, *c)* $A \cap B \cup C$, *d)* $C \cap (A \cup B)$, *e)* $(A \cup B) \cap (B \cup C)$,
f) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ y *g)* $(A \cap \widetilde{B}) \cup (B \cap \widetilde{C}) \cup (C \cap \widetilde{A})$.

1.124. Demuestre que el complemento de un conjunto S es abierto o cerrado según S sea cerrado o abierto.

1.125. Suponga que $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son conjuntos abiertos. Demuestre que $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ es abierto.

1.126. Suponga que el punto límite de un conjunto no pertenece al conjunto. Demuestre que ese punto debe ser un punto frontera del conjunto.

www.FreeLibros.me

PROBLEMAS DIVERSOS

1.127. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Compruebe que $(AC)^2 + (BD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2$.

1.128. Explique el error en: $-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$. Por tanto, $1 = -1$.

1.129. *a*) Muestre que la ecuación $z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 0$, donde a_1, a_2, a_3 y a_4 son constantes reales distintas de cero, tiene una raíz imaginaria pura si $a_3^2 + a_1^2a_4 = a_1a_2a_3$.

b) ¿Es verdad el recíproco de *a*)?

1.130. *a*) Demuestre que $\cos^n \phi = \dfrac{1}{2^{n-1}}\left\{\cos n\phi + n\cos(n-2)\phi + \dfrac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)\phi + \cdots + R_n\right\}$ donde

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{n!}{[(n-1)/2]![(n+1)/2]!}\cos\phi & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{n!}{2[(n/2)!]^2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

b) Encuentre una fórmula similar para $\operatorname{sen}^n \phi$.

1.131. *a*) Sea $z = 6e^{\pi i/3}$. Evalúe $|e^{iz}|$.

1.132. Muestre que para todo par de números reales p y m, $e^{2mi\cot^{-1}p}\left\{\dfrac{pi+1}{pi-1}\right\}^m = 1$.

1.133. Sea $P(z)$ un polinomio en z con coeficientes reales. Compruebe que $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

1.134. Suponga que z_1, z_2 y z_3 son colineales. Demuestre que existen constantes reales α, β, γ, no todas igual a cero, tales que $\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0$, donde $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

1.135. Dado un número complejo z, represente geométricamente *a*) $\overline{z}$, *b*) $-z$ y *c*) $1/z$, *d*) z^2.

1.136. Considere dos números complejos z_1 y z_2 distintos de cero. Muestre cómo representar en forma gráfica, sólo con regla y compás, *a*) z_1z_2, *b*) z_1/z_2, *c*) $z_1^2 + z_2^2$, *d*) $z_1^{1/2}$ y *e*) $z_2^{3/4}$.

1.137. Compruebe que la ecuación de una recta que pase por los puntos z_1 y z_2 está dada por

$$\arg\{(z - z_1)/(z_2 - z_1)\} = 0$$

1.138. Suponga que $z = x + iy$. Demuestre que $|x| + |y| \le \sqrt{2}|x + iy|$.

1.139. ¿Es verdad el recíproco del problema 1.51? Justifique su respuesta.

1.140. Encuentre una ecuación para el círculo que pasa por los puntos $1 - i$, $2i$, $1 + i$.

1.141. Muestre que el lugar geométrico de z tal que $|z - a||z + a| = a^2$, $a > 0$ es una *lemniscata*, como la que se muestra en la figura 1-43.

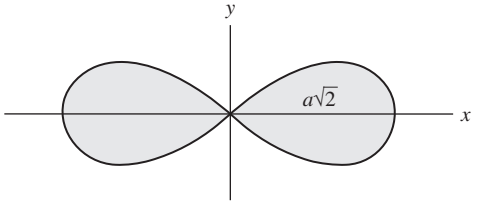


Figura 1-43

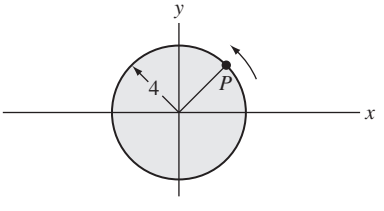


Figura 1-44

www.FreeLibros.me

1.142. Sea $p_n = a_n^2 + b_n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde a_n y b_n son enteros positivos. Compruebe que para todo entero positivo M siempre se hallan enteros positivos A y B tales que $p_1 p_2 \cdots p_M = A^2 + B^2$. [Ejemplo: Si $5 = 2^2 + 1^2$ y $25 = 3^2 + 4^2$, entonces $5 \cdot 25 = 2^2 + 11^2$.]

1.143. Demuestre que: *a*) $\cos\theta + \cos(\theta+\alpha) + \cdots + \cos(\theta + n\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}\cos(\theta + \frac{1}{2}n\alpha)$

b) $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(\theta+\alpha) + \cdots + \operatorname{sen}(\theta + n\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}\operatorname{sen}(\theta + \frac{1}{2}n\alpha)$

1.144. Compruebe que *a*) $\operatorname{Re}\{z\} > 0$ y *b*) $|z-1| < |z+1|$ son expresiones equivalentes.

1.145. Una rueda de 4 pies de radio [figura 1-44] gira a 30 revoluciones por minuto en sentido contrario al de las manecillas del reloj, en torno a un eje que pasa por su centro. *a*) Muestre que la posición y la velocidad de cualquier punto P de la rueda están dadas, respectivamente, por $4e^{i\pi t}$ y $4\pi i e^{i\pi t}$, donde t es el tiempo en segundos, medido a partir del instante en que P se encuentra en el eje x positivo. *b*) Encuentre la posición y la velocidad cuando $t = 2/3$ y $t = 15/4$.

1.146. Demuestre que para cualquier entero $m > 1$,

$$(z+a)^{2m} - (z-a)^{2m} = 4maz\prod_{k=1}^{m-1}\{z^2 + a^2\cot^2(k\pi/2m)\}$$

donde $\prod_{k=1}^{m-1}$ denota el producto de todos los factores indicados desde $k = 1$ hasta $m - 1$.

1.147. Suponga que los puntos P_1 y P_2, representados por z_1 y z_2, respectivamente, son tales que $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$. Compruebe que *a*) z_1/z_2 es un número imaginario puro y *b*) $\angle P_1OP_2 = 90°$.

1.148. Demuestre que para cualquier entero $m > 1$,

$$\cot\frac{\pi}{2m}\cot\frac{2\pi}{2m}\cot\frac{3\pi}{2m}\cdots\cot\frac{(m-1)\pi}{2m} = 1$$

1.149. Compruebe y generalice *a*) $\csc^2(\pi/7) + \csc^2(2\pi/7) + \csc^2(4\pi/7) = 2$ y

b) $\tan^2(\pi/16) + \tan^2(3\pi/16) + \tan^2(5\pi/16) + \tan^2(7\pi/16) = 28$

1.150. Sean m_1, m_2 y m_3 masas localizadas en los puntos z_1, z_2 y z_3, respectivamente. Demuestre que el centro de masa está dado por

$$\hat{z} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Generalice a n masas.

1.151. En la recta que une a los puntos z_1 y z_2 encuentre el punto que la divide en la relación $p{:}q$.

1.152. Muestre que

$$\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)\Big/\left(\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\right) = \left(\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}-\bar{z}_2}\right)\Big/\left(\frac{\bar{z}_3-\bar{z}_1}{\bar{z}_3-\bar{z}_2}\right)$$

es una ecuación del círculo que pasa por los puntos z_1, z_2 y z_3.

1.153. Compruebe que las medianas de un triángulo con vértices en z_1, z_2, z_3 se intersecan en el punto $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$.

1.154. Demuestre que los números racionales entre 0 y 1 son numerables.

[*Sugerencia.* Ordene los números en la forma $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \ldots$.]

1.155. Compruebe que todos los números racionales son numerables.

1.156. Demuestre que los números irracionales entre 0 y 1 no son numerables.

1.157. Represente en forma gráfica el conjunto de valores de z para los que *a*) $|z| > |z-1|$ y *b*) $|z+2| > 1 + |z-2|$.

www.FreeLibros.me

1.158. Muestre que *a*) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ y *b*) $2-\sqrt{2}i$ son números algebraicos. [Vea el problema 1.47.]

1.159. Compruebe que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es un número irracional.

1.160. Sea $ABCD\ldots PQ$ un polígono regular de n lados, inscrito en un círculo de radio unitario. Demuestre que el producto de las longitudes de las diagonales $AC, AD, \ldots AP$ es $\frac{1}{4}n\csc^2(\pi/n)$.

1.161. Suponga que $\operatorname{sen}\theta \neq 0$. Compruebe que *a*) $\dfrac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 2^{n-1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\{\cos\theta - \cos(k\pi/n)\}$ y

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(2n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} = (2n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left\{1-\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2 k\pi/(2n+1)}\right\}$.

1.162. Demuestre que $\cos 2n\theta = (-1)^n\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left\{1-\frac{\cos^2\theta}{\cos^2(2k-1)\pi/4n}\right\}$.

1.163. Suponga que el producto de dos números complejos z_1 y z_1 es real y distinto de cero. Compruebe que existe un número real p tal que $z_1 = p\bar{z}_2$.

1.164. Sea z un punto del círculo $|z-1|=1$. Demuestre que $\arg(z-1) = 2\arg z = \frac{2}{3}\arg(z^2-z)$ y dé una interpretación geométrica.

1.165. Compruebe que, con las restricciones adecuadas, *a*) $z^m z^n = z^{m+n}$ y *b*) $(z^m)^n = z^{mn}$.

1.166. Compruebe *a*) $\operatorname{Re}\{z_1z_2\} = \operatorname{Re}\{z_1\}\operatorname{Re}\{z_2\} - \operatorname{Im}\{z_1\}\operatorname{Im}\{z_2\}$ y

b) $\operatorname{Im}\{z_1z_2\} = \operatorname{Re}\{z_1\}\operatorname{Im}\{z_2\} + \operatorname{Im}\{z_1\}\operatorname{Re}\{z_2\}$.

1.167. Encuentre el área del polígono cuyos vértices se encuentran en $2+3i$, $3+i$, $-2-4i$, $-4-i$ y $-1+2i$.

1.168. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números complejos. Demuestre la *desigualdad de Schwarz.*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)$$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.53. *a*) $-4-i$, *b*) $-17+14i$, *c*) $8+i$, *d*) $-9+7i$, *e*) $11/17-(10/17)i$, *f*) $21+i$, *g*) $-15/2+5i$, *h*) $-11/2-(23/2)i$ y *i*) $2+i$

1.54. *a*) $-1-4i$, *b*) 170, *c*) $1024i$, *d*) 12, *e*) $3/5$, *f*) $-1/7$, *g*) $-7+3\sqrt{3}+\sqrt{3}i$, *h*) $765+128\sqrt{3}$ y *i*) -35

1.57. $x=1$ y $y=-2$

1.60. $x^4+y^4+2x^2y^2-6x^2y-6y^3+9x^2+9y^2$

1.61. *a*) $6-2i$, *b*) $3+3i$, *c*) $-1+12i$, *d*) $9-8i$ y *e*) $19/2+(3/2)i$

1.63. *a*) $\sqrt{10}$, *b*) $5\sqrt{2}$, *c*) $5+5i$ y *d*) 15

1.64. 5, 5, 8

1.70. *a*) $z-(2+i)=t(1-3i)$ o $x=2+t$, $y=1-3t$ o $3x+y=7$ y

b) $z-(5/2-i/2)=t(3+i)$ o $x=3t+5/2$, $y=t-1/2$ o $3-3y=4$

1.71. *a*) círculo, *b*) elipse, *c*) hipérbola, *d*) $z=1$ y $x=-3$ y *e*) hipérbola

1.72. *a*) $|z+3-4i|=2$ o $(x+3)^2+(y-4)^2=4$ y *b*) $|z+2i|+|z-2i|=10$

1.73. *a*) $1<|z+i|\leq 2$, *b*) $\operatorname{Re}\{z^2\}>1$, *c*) $|z+3i|>4$ y *d*) $|z+2-3i|+|z-2+3i|<10$

1.81. *a*) $2\sqrt{2}\operatorname{cis}315^\circ$ o $2\sqrt{2}e^{7\pi i/4}$, *b*) $2\operatorname{cis}120^\circ$ o $2e^{2\pi i/3}$, *c*) $4\operatorname{cis}45^\circ$ o $4e^{\pi i/4}$, *d*) $\operatorname{cis}270^\circ$ o $e^{3\pi i/2}$, *e*) $4\operatorname{cis}180^\circ$ o $4e^{\pi i}$, *f*) $4\operatorname{cis}210^\circ$ o $4e^{7\pi i/6}$, *g*) $\sqrt{2}\operatorname{cis}90^\circ$ o $\sqrt{2}e^{\pi i/2}$ y *h*) $\sqrt{3}\operatorname{cis}300^\circ$ o $\sqrt{3}e^{5\pi i/3}$

www.FreeLibros.me

1.83. *a*) $5\exp[i(\pi + \tan^{-1}(4/3)$ y *b*) $\sqrt{5}\exp[\,-i\tan^{-1} 2]$

1.84. *a*) $-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$, *b*) $12i$, *c*) $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$, *d*) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ y *e*) $-5\sqrt{3}/2 - (5/2)i$, *f*) $-3\sqrt{3}/2 - (3/2)i$

1.85. 375 millas, 23° al norte del este (aproximadamente).

1.89. *a*) $15/2 + (15\sqrt{3}/2)i$, *b*) $32 - 32\sqrt{3}i$, *c*) $-16 - 16\sqrt{3}i$, *d*) $3\sqrt{3}/2 - (3\sqrt{3}/2)i$ y *e*) $-\sqrt{3}/2 - (1/2)i$

1.95. *a*) 2 cis 165°, 2 cis 345°; *b*) $\sqrt{2}$ cis 27°, $\sqrt{2}$ cis 99°, $\sqrt{2}$ cis 171°, $\sqrt{2}$ cis 243°, $\sqrt{2}$ cis 315°; *c*) $\sqrt[3]{4}$ cis 20°, $\sqrt[3]{4}$ cis 140°, $\sqrt[3]{4}$ cis 260°; *d*) 2 cis 67.5°, 2 cis 157.5°, 2 cis 247.5°, 2 cis 337.5°; *e*) 2 cis 0°, 2 cis 60°, 2 cis 120°, 2 cis 180°, 2 cis 240°, 2 cis 300° y *f*) cis 60°, cis 180°, cis 300°

1.96. *a*) 2 cis 0°, 2 cis 120°, 2 cis 240°, *b*) $\sqrt{8}$ cis 22.5°, $\sqrt{8}$ cis 202.5°, *c*) 2 cis 48°, 2 cis 120°, 2 cis 192°, 2 cis 264°, 2 cis 336° y *d*) $\sqrt{3}$ cis 45°, $\sqrt{3}$ cis 105°, $\sqrt{3}$ cis 165°, $\sqrt{3}$ cis 225°, $\sqrt{3}$ cis 285°, $\sqrt{3}$ cis 345°

1.97. *a*) 3 cis 45°, 3 cis 135°, 3 cis 225°, 3 cis 315°
b) $\sqrt[6]{2}$ cis 40°, $\sqrt[6]{2}$ cis 100°, $\sqrt[6]{2}$ cis 160°, $\sqrt[6]{2}$ cis 220°, $\sqrt[6]{2}$ cis 280°, $\sqrt[6]{2}$ cis 340°

1.98. *a*) $3 - 2i$, $-3 + 2i$ y *b*) $\sqrt{10} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{10} - \sqrt{2}i$

1.99. $1 + 2i$, $\frac{1}{2} - \sqrt{3} + (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3})i$, $-\frac{1}{2} - \sqrt{3} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right)i$

1.100. *a*) $(-1 \pm 7i)/5$ y *b*) $1 + i$, $1 - 2i$

1.101. $1, 1, 2, -1 \pm i$

1.102. $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

1.104. $2 + 2i$, $2 - 2i$

1.105. *a*) $e^{2\pi ik/4} = e^{2\pi ik/2}$, $k = 0, 1, 2, 3$ y *b*) $e^{2\pi ik/7}$, $k = 0, 1, \ldots, 6$

1.109. $\theta_i(\omega - 1)/(\omega + 1)$, $(\omega^2 - 1)/(\omega^2 + 1)$, $(\omega^3 - 1)/(\omega^3 + 1)$, $(\omega^4 - 1)/(\omega^4 + 1)$, donde $\omega = e^{2\pi i/5}$

1.110. *a*) 1, *b*) 178, *c*) 1, *d*) 17 y *e*) 1, *f*) 1

1.114. 17

1.115. 18

1.116. *a*) $x^2 + y^2 = 16$, *b*) $x^2 + y^2 - 4x + 8 = 0$, *c*) $x = 2$ y *d*) $y = -3$

1.117. *a*) $(z - 3)(\bar{z} - 3) = 9$, *b*) $(2i - 3)z + (2i + 3)\bar{z} = 10i$ y *c*) $3(z^2 + \bar{z}^2) - 10z\bar{z} + 25 = 0$

1.118. *a*) Sí. *b*) Todo punto en el interior o en la frontera del cuadrado es un punto límite. *c*) No. *d*) Todos los puntos del cuadrado son puntos frontera; no hay puntos interiores. *e*) No. *f*) No. *g*) No. *h*) La cerradura de S es el conjunto de todos los puntos en el interior y en la frontera del cuadrado. *i*) El complemento de S es el conjunto de todos los puntos distintos de $a + bi$ cuando a y b [donde $0 < a < 1$, $0 < b < 1$] son racionales. *j*) Sí. *k*) No. *l*) Sí.

1.119. *a*) Sí. *b*) Todo punto en el interior del cuadrado o sobre él es un punto límite. *c*) No. *d*) Todo punto en el interior es un punto interior, y todo punto en la frontera es un punto frontera. *e*) Sí. *f*) Sí. *g*) Sí. *h*) La cerradura de S es el conjunto de todos los puntos en el interior y en la frontera del cuadrado. *i*) El complemento de S es el conjunto de todos los puntos en el exterior del cuadrado o en su frontera. *j*) No. *k*) No y *l*) Sí.

1.120. *a*) Sí. *b*) Todo punto de S es un punto límite. *c*) Sí. *d*) Todo punto dentro del cuadrado es un punto interior, mientras que todo punto en la frontera es un punto frontera. *e*) No. *f*) Sí. *g*) No. *h*) S mismo. *i*) Todos los puntos en el exterior del cuadrado. *j*) No. *k*) Sí. *l*). Sí.

1.121. *a*) $\{2, 1, -i, i, 1 + i\}$, *b*) $\{1, i, -i\}$ y *c*) $\{1, -i\}$

1.131. $e^{-3\sqrt{3}}$

1.139. Sí.

1.140. $|z + 1| = \sqrt{5}$ o $(x + 1)^2 + y^2 = 5$

1.151. $(qz_1 + pz_2)/(q + p)$

1.167. $47/2$

www.FreeLibros.me

CAPÍTULO 2

Funciones, límites y continuidad

2.1 VARIABLES Y FUNCIONES

A un símbolo, por ejemplo z, que representa un elemento cualquiera del conjunto de números complejos, se le conoce como *variable compleja*.

Suponga que por cada valor que toma una variable compleja z corresponde uno o más valores de una variable compleja w. Entonces se dice que w es *función* de z y se escribe $w = f(z)$ o $w = G(z)$, etc. A z se le llama *variable independiente*, y a w, *variable dependiente*. El *valor de una función* en $z = a$ se suele escribir $f(a)$. Por tanto, si $f(z) = z^2$, entonces $f(2i) = (2i)^2 = -4$.

2.2 FUNCIONES UNÍVOCAS Y FUNCIONES MULTIVALUADAS

Si a cada valor de z corresponde sólo un valor de w, se dice que w es una función *unívoca* de z, o bien que $f(z)$ es unívoca. Si a cada valor de z corresponde más de un valor de w, se dice que w es una función *multivaluada* de z.

Una función multivaluada puede considerarse como una colección de funciones unívocas, y a cada miembro se le conoce como una *rama* de la función; a un miembro particular suele considerársele la *rama principal* de la función multivaluada, y al correspondiente valor de la función, como *valor principal.*

EJEMPLO 2.1

a) Si $w = z^2$, por cada valor de z se presenta un solo valor de w. Así, $w = f(z) = z^2$ es una función unívoca de z.

b) Si $w^2 = z$, por cada valor de z hay dos valores de w. Así, $w^2 = z$ define una función multivaluada (en este caso con dos valores) de z.

Siempre que se hable de una *función*, a menos que se diga otra cosa, se entenderá que se trata de una *función unívoca.*

2.3 FUNCIONES INVERSAS

Si $w = f(z)$, también z se considera una función, posiblemente multivaluada, de w, y se escribe $z = g(w) = f^{-1}(w)$. La función f^{-1} es la función *inversa* de f. Por tanto, $w = f(z)$ y $w = f^{-1}(z)$ son *funciones inversas* entre sí.

www.FreeLibros.me

2.4 TRANSFORMACIONES

Si $w = u + iv$ (donde u y v son reales) es una función unívoca de $z = x + iy$ (donde x y y son reales), se escribe $u + iv = f(x + iy)$. Si se igualan las partes reales y las imaginarias, se ve que esto equivale a

$$u = u(x, y) \quad \text{y} \quad v = v(x, y) \tag{2.1}$$

Así, dado un punto (x, y) del plano z, como P en la figura 2-1, existe un punto correspondiente (u, v) en el plano w, como P' en la figura 2-2. Al conjunto de ecuaciones (2.1) [o a su equivalente, $w = f(z)$] se le llama *transformación*. Se dice que el punto P se *lleva* o *transforma* en el punto P' por medio de esa transformación, y a P' se le conoce como la *imagen* de P.

EJEMPLO 2.2 Si $w = z^2$, entonces $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, y la transformación es $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. La imagen del punto (1, 2) del plano z es el punto $(-3, 4)$ del plano w.

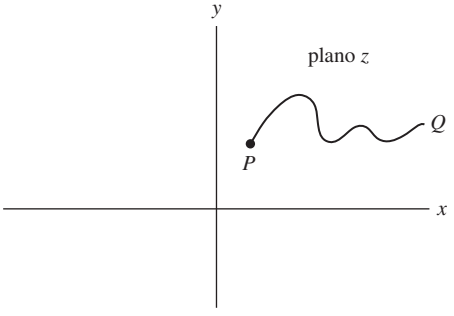


Figura 2-1

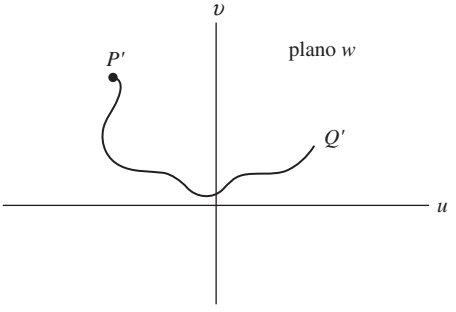


Figura 2-2

En general, mediante una transformación, un conjunto de puntos, como los puntos de la curva PQ de la figura 2-1, se lleva a un conjunto correspondiente de puntos, que es su *imagen*, como los puntos de la curva $P'Q'$ en la figura 2-2. Las características de la imagen dependen, por supuesto, del tipo de función $f(z)$, que en ocasiones se llama *función de transformación*. Si $f(z)$ es multivaluada, un punto (o curva) del plano z, en general, se lleva a más de un punto (o curva) en el plano w.

2.5 COORDENADAS CURVILÍNEAS

Dada la transformación $w = f(z)$ o, de manera equivalente, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, a (x, y) se le conoce como coordenadas rectangulares del punto P en el plano z, y a (u, v) como *coordenadas curvilíneas* de P.

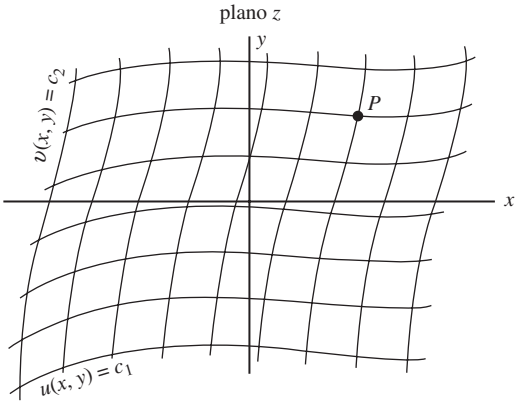


Figura 2-3

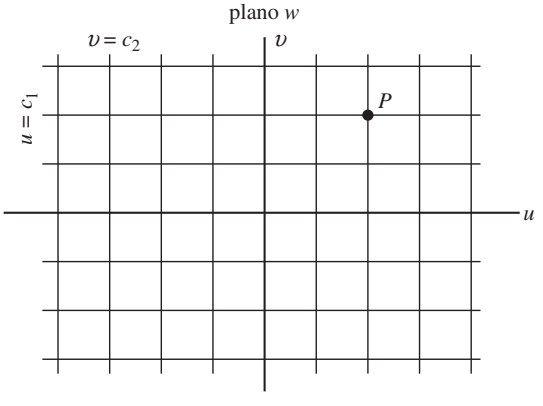


Figura 2-4

www.FreeLibros.me

Las curvas $u(x, y) = c_1$, $v(x, y) = c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes, se llaman *coordenadas curvas* [vea la figura 2-3], y cada par de estas curvas se intersecan en un punto. Estas curvas se llevan a rectas ortogonales del plano w [vea la figura 2-4].

2.6 FUNCIONES ELEMENTALES

1. Las **funciones polinómicas** se definen como

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = P(z) \tag{2.2}$$

donde $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes complejas y n un entero positivo, que es el *grado* del polinomio $P(z)$.

La transformación $w = az + b$ es una *transformación lineal.*

2. Las **funciones algebraicas racionales** se definen como

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{2.3}$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios. A veces la expresión (2.3) se denomina *transformación racional.* El caso especial $w = (az + b)/(cz + d)$, donde $ad - bc \neq 0$, en ocasiones se llama *transformación lineal fraccionaria* o *transformación bilineal.*

3. Las **funciones exponenciales** se definen como

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \tag{2.4}$$

donde e es la *base de los logaritmos naturales*. Si a es un real positivo, se define

$$a^z = e^{z \ln a} \tag{2.5}$$

donde $\ln a$ es el *logaritmo natural de a*. Si $a = e$, esto se reduce a la expresión en (2.4).

Las funciones exponenciales complejas tienen propiedades similares a las de las funciones exponenciales reales. Por ejemplo, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$.

4. **Funciones trigonométricas.** Las funciones trigonométricas o funciones circulares sen z, cos z, etcétera, se definen en términos de funciones exponenciales como se indica a continuación:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}, \qquad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

Las funciones trigonométricas complejas tienen muchas de las propiedades ya conocidas para las funciones trigonométricas reales. Por ejemplo, se tiene:

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad 1 + \tan^2 z = \sec^2 z, \qquad 1 + \cot^2 z = \csc^2 z$$

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z, \qquad \cos(-z) = \cos z, \qquad \tan(-z) = -\tan z$$

$$\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$$

$$\tan(z_1 \pm z_2) = \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}$$

www.FreeLibros.me

5. Las **funciones hiperbólicas** se definen como sigue:

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}, \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$$

$$\tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

Satisfacen las propiedades siguientes:

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1, \qquad 1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z, \qquad \coth^2 z - 1 = \operatorname{csch}^2 z$$

$$\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z, \qquad \cosh(-z) = \cosh z, \qquad \tanh(-z) = -\tanh z$$

$$\operatorname{senh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$$

$$\tanh(z_1 \pm z_2) = \frac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 \tanh z_2}$$

Entre las funciones trigonométricas o funciones circulares y las funciones hiperbólicas existen las relaciones siguientes:

$$\operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z, \qquad \cos iz = \cosh z, \qquad \tan iz = i \tanh z$$

$$\operatorname{senh} iz = i \operatorname{sen} z, \qquad \cosh iz = \cos z, \qquad \tanh iz = i \tan z$$

6. **Funciones logarítmicas.** Si $z = e^w$, entonces $w = \ln z$, que se conoce como *logaritmo natural* de z. Por tanto, la función logaritmo natural es la función inversa de la función exponencial, y se define como

$$w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

donde $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)}$. Observe que $\ln z$ es una función multivaluada (en este caso, una función con una cantidad infinita de valores). El *valor principal* o la *rama principal* de $\ln z$ suele definirse como $\ln r + i\theta$, donde $0 \le \theta < 2\pi$. Pero puede usarse cualquier otro intervalo de longitud 2π, como $-\pi < \theta \le \pi$, etcétera.

También pueden definirse funciones logarítmicas para bases reales distintas de e. Así, si $z = a^w$, entonces $w = \log_a z$, donde $a > 0$ y $a \neq 0, 1$. En este caso, $z = e^{w \ln a}$ y, por tanto, $w = (\ln z)/(\ln a)$.

7. **Funciones trigonométricas inversas.** Si $z = \operatorname{sen} w$, entonces $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ es el *seno inverso de* z o *arco seno de* z. De manera similar se definen las demás funciones circulares inversas o funciones trigonométricas inversas $\cos^{-1} z$, $\tan^{-1} z$, etc. Estas funciones, que son multivaluadas, se expresan en términos de logaritmos naturales, como se indica a continuación. En todos los casos, en el logaritmo se omite la constante aditiva $2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$\operatorname{sen}^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \qquad \csc^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z}\right)$$

$$\cos^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \qquad \sec^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}\right)$$

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right), \qquad \cot^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{z + i}{z - i}\right)$$

www.FreeLibros.me

8. **Funciones hiperbólicas inversas.** Si $z = \operatorname{senh} w$, entonces $w = \operatorname{senh}^{-1} z$ es el *seno hiperbólico inverso de z*. De manera similar se definen las demás funciones hiperbólicas inversas $\cosh^{-1} z$, $\tanh^{-1} z$, etc. Estas funciones, que son multivaluadas, se expresan en términos de logaritmos naturales, como se indica a continuación. En todos los casos se omite la constante aditiva $2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, en el logaritmo:

$$\operatorname{senh}^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right), \qquad \operatorname{csch}^{-1} z = \ln\left(\frac{1+\sqrt{z^2+1}}{z}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \qquad \operatorname{sech}^{-1} z = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad \coth^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

9. La **función** z^α, donde α puede ser un número complejo, se define como $e^{\alpha \ln z}$. De modo semejante, si $f(z)$ y $g(z)$ son dos funciones dadas de z, se define $f(z)^{g(z)} = e^{g(z)\ln f(x)}$. En general, estas funciones son multivaluadas.

10. **Funciones algebraicas y funciones trascendentes.** Si w es una solución de la ecuación polinómica

$$P_0(z)w^n + P_1(z)w^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(z)w + P_n(z) = 0 \tag{2.6}$$

donde $P_0 \neq 0$, $P_1(z), \ldots, P_n(z)$ son polinomios en z y η es un entero positivo, entonces $w = f(z)$ es una *función algebraica* de z.

EJEMPLO 2.3 $w = z^{1/2}$ es solución de la ecuación $w^2 - z = 0$ y, por tanto, es una función algebraica de z.

Toda función que no se exprese como solución de (2.6) es una *función trascendente*. Las funciones logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas y sus correspondientes funciones inversas son ejemplos de funciones trascendentes.

Las funciones consideradas en los números 1 a 9, junto con las funciones obtenidas a partir de ellas mediante un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y raíces son *funciones elementales*.

2.7 PUNTOS DE RAMIFICACIÓN Y LÍNEAS DE RAMIFICACIÓN

Suponga que $w = z^{1/2}$ es una función dada. Suponga además que z da una vuelta completa (en sentido contrario al de las manecillas del reloj) en torno al origen a partir del punto A [figura 2-5]. Se tiene $z = re^{i\theta}$, $w = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, de manera que en A, $\theta = \theta_1$ y $w = \sqrt{r}e^{i\theta_1/2}$. Después de una vuelta completa en torno a A, $\theta = \theta_1 + 2\pi$ y $w = \sqrt{r}e^{i(\theta_1+2\pi)/2} = -\sqrt{r}e^{i\theta_1/2}$. Así, no se obtiene el valor de w con el que se empezó. Sin embargo, al dar otra vuelta completa de regreso a A, es decir, $\theta = \theta_1 + 4\pi$, $w = \sqrt{r}e^{i(\theta_1+4\pi)/2} = \sqrt{r}e^{i\theta_1/2}$, y se obtiene el valor de w con el que se empezó.

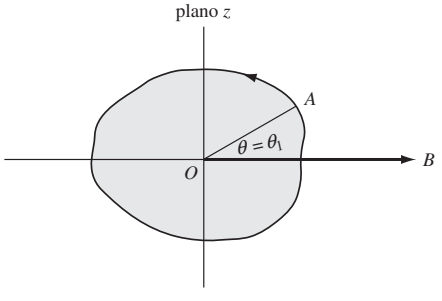


Figura 2-5

Lo anterior se describe con la declaración de que si $0 \leq \theta < 2\pi$, se está en una rama de la función multivaluada $z^{1/2}$, mientras que si $2\pi \leq \theta < 4\pi$, está en otra rama de la función.

Es claro que cada rama de la función es unívoca. Con objeto de mantener la función unívoca, se establece una barrera artificial, por ejemplo OB, donde B está en el infinito [aunque sirva cualquier otra recta que parta de O],

www.FreeLibros.me

que se acuerde no cruzar. Esta barrera [representada en la figura por una recta más gruesa] se conoce como *línea de ramificación* o *corte de ramificación*, y el punto O, como *punto de ramificación*. Hay que observar que una vuelta completa en torno a un punto distinto de $z = 0$ no conduce a valores diferentes; por tanto, $z = 0$ es el único punto de ramificación finito.

2.8 SUPERFICIES DE RIEMANN

Existe otra manera de lograr lo mismo que con la línea de ramificación antes descrita. Para esto, hay que imaginar que el plano z consta de dos capas sobrepuestas, una sobre la otra. Ahora hay que imaginar que estas capas se cortan a lo largo de OB y que el borde inferior de la capa inferior se une al borde superior de la capa superior. Entonces, a partir de la capa inferior y al dar una vuelta completa en torno a O, se llega a la capa superior. Ahora hay que imaginar que se unen los otros bordes de manera que si se continúa dando vuelta se va, de la capa superior, de nuevo a la capa inferior.

La colección de estas dos capas es una *superficie de Riemann* que corresponde a la función $z^{1/2}$. Cada capa corresponde a una rama de la función, y en cada capa la función es unívoca.

El concepto de superficie de Riemann tiene la ventaja de que permite obtener varios valores de una función multivaluada de una manera continua.

Esta idea se extiende fácilmente. Por ejemplo, para la función $z^{1/3}$, la superficie de Riemann tiene tres capas; para $\ln z$, la superficie de Riemann tiene una cantidad infinita de capas.

2.9 LÍMITES

Sea $f(z)$ unívoca y definida en una vecindad de $z = z_0$, salvo posiblemente en $z = z_0$ (es decir, en una vecindad agujerada δ de z_0). Se dice que un número l es el *límite* de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 y se escribe $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$ si para todo número positivo ϵ (tan pequeño como se desee) se halla un número positivo δ (que por lo general depende de ϵ) tal que $|f(z) - l| < \epsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

En tal caso se dice también que $f(z)$ tiende a l cuando z tiende a z_0 y se escribe $f(z) \to l$ cuando $z \to z_0$. Este límite debe ser independiente de la manera en que z se aproxime a z_0.

En forma geométrica, si z_0 es un punto en el plano complejo, entonces $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$ si el valor absoluto de la diferencia entre $f(z)$ y l puede hacerse tan pequeño como se desee al eligir puntos lo bastante cercanos a z_0 (excluyendo a $z = z_0$).

EJEMPLO 2.4 Sea

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & z \neq i \\ 0 & z = i \end{cases}$$

Entonces, a medida que z se acerca a i (es decir, z tiende a i), $f(z)$ se acerca a $i^2 = -1$. Se *sospecha* que $\lim_{z\to i} f(z) = -1$. Para *probar* esto, es necesario ver que se satisfaga la definición de límite dada antes. Esta prueba se muestra en el problema 2.23.

Observe que $\lim_{z\to i} f(z) \neq f(i)$, es decir, el límite de $f(z)$ cuando $z \to i$, no es lo mismo que el valor de $f(z)$ en $z = i$, pues por definición $f(i) = 0$. En realidad, aunque $f(z)$ no estuviera definida en $z = i$, el límite aún sería -1.

Cuando el límite de una función existe, es único, es decir, no hay otro (vea el problema 2.26). Si $f(z)$ es multivaluada, el límite cuando $z \to z_0$ puede depender de la rama de que se trate.

2.10 TEOREMAS SOBRE LÍMITES

TEOREMA 2.1. Suponga que $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = B$. Entonces

1. $\lim_{z\to z_0} \{f(z) + g(z)\} = \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z) = A + B$
2. $\lim_{z\to z_0} \{f(z) - g(z)\} = \lim_{z\to z_0} f(z) - \lim_{z\to z_0} g(z) = A - B$

www.FreeLibros.me

3. $\lim_{z\to z_0}\{f(z)g(z)\} = \left\{\lim_{z\to z_0} f(z)\right\}\left\{\lim_{z\to z_0} g(z)\right\} = AB$

4. $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)} = \dfrac{A}{B}$ si $B \neq 0$

2.11 INFINITO

Mediante la transformación $w = 1/z$, el punto $z = 0$ (es decir, el origen) es llevado a $w = \infty$, que se conoce como *punto al infinito en el plano w*. De manera similar, $z = \infty$ denota el *punto al infinito en el plano z*. Para conocer el comportamiento de $f(z)$ en $z = \infty$, basta con hacer $z = 1/w$ y examinar el comportamiento de $f(1/w)$ en $w = 0$.

Se dice que $\lim_{z\to\infty} f(z) = l$ o que $f(z)$ tiende a l cuando z tiende a infinito, si para todo $\epsilon > 0$ se halla un $M > 0$ tal que $|f(z) - l| < \epsilon$ siempre que $|z| > M$.

Se dice que $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ o que $f(z)$ tiende a infinito cuando z tiende a z_0, si para todo $N > 0$ se halla un $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > N$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

2.12 CONTINUIDAD

Sea $f(z)$ una función definida y unívoca en una vecindad de $z = z_0$ así como en $z = z_0$ (es decir, en una vecindad δ de z_0). Se dice que la función $f(z)$ es *continua* en $z = z_0$ si $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Observe que esto implica que para que $f(z)$ sea continua en $z = z_0$ deben satisfacerse tres condiciones:

1. $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$ debe existir
2. $f(z_0)$ debe existir, es decir, $f(z)$ debe estar definida en z_0
3. $l = f(z_0)$

De manera equivalente, si $f(z)$ es continua en z_0, esto se expresa de manera sugerente como

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f\left(\lim_{z\to z_0} z\right)$$

EJEMPLO 2.5

a) Suponga que

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & z \neq i \\ 0 & z = i \end{cases}$$

Entonces, $\lim_{z\to i} f(z) = -1$. Pero, $f(i) = 0$. Por tanto, $\lim_{z\to i} f(z) \neq f(i)$, y la función no es continua en $z = i$.

b) Suponga que $f(z) = z^2$ para toda z. Entonces, $\lim_{z\to i} f(z) = f(i) = -1$ y $f(z)$ es continua en $z = i$.

A los puntos del plano z en los que $f(z)$ no es continua se les llama *discontinuidades* de $f(z)$, y se dice que $f(z)$ es *discontinua* en esos puntos. Si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe pero no es igual a $f(z_0)$, se dice que z_0 es una *discontinuidad removible*, pues, al redefinir $f(z_0)$ como igual a $\lim_{z\to z_0} f(z)$, esta función se vuelve continua.

Como alternativa a la definición anterior de continuidad, $f(z)$ se define como continua en $z = z_0$ si para todo $\epsilon > 0$ se halla un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$. Observe que esta definición es tan sólo la definición de límite con $l = f(z_0)$ y sin la restricción de que $z \neq z_0$.

Para examinar la continuidad de $f(z)$ en $z = \infty$ se hace $z = 1/w$ y se examina la continuidad de $f(1/w)$ en $w = 0$.

CONTINUIDAD EN UNA REGIÓN

Se dice que una función $f(z)$ es *continua en una región* si es continua en todos los puntos de esa región.

www.FreeLibros.me

2.13 TEOREMAS SOBRE CONTINUIDAD

TEOREMA 2.2. Si $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en $z = z_0$, entonces también lo son $f(z) + g(z)$, $f(z) - g(z)$, $f(z)g(z)$ y $f(z)/g(z)$; la última es continua si $g(z) \neq 0$. Esto también es válido para la continuidad en una región.

TEOREMA 2.3. Entre las funciones que son continuas en toda región finita se encuentran *a*) todos los polinomios, *b*) e^z y *c*) sen z y cos z.

TEOREMA 2.4. Suponga que $w = f(z)$ es continua en $z = z_0$ y $z = g(\zeta)$ es continua en $\zeta = \zeta_0$. Si $z_0 = g(\zeta_0)$, entonces la función $w = f[g(\zeta)]$, que es una *función de una función* o una *función compuesta*, es continua en $\zeta = \zeta_0$. Esto suele expresarse, de manera simplificada, como sigue: una función continua de una función continua es continua.

TEOREMA 2.5. Suponga que $f(z)$ es continua en una región cerrada y acotada. Entonces esta función es acotada en esta región; es decir, existe una constante M tal que $|f(z)| < M$ para todo punto z de la región.

TEOREMA 2.6. Si $f(z)$ es continua en una región, entonces también la parte real y la parte imaginaria de $f(z)$ son continuas en esa región.

2.14 CONTINUIDAD UNIFORME

Sea $f(z)$ continua en una región. Entonces, por definición, para todo punto z_0 de la región y para todo $\epsilon > 0$ se halla un $\delta > 0$ (que en general dependerá tanto de ϵ como del punto z_0 de que se trate) tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$. Si es posible hallar un δ que dependa sólo de ϵ pero no del punto z_0 de que se trate, se dice que $f(z)$ es *uniformemente continua* en esa región.

O, de manera alternativa, $f(z)$ es uniformemente continua en una región si para todo $\epsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$ siempre que $|z_1 - z_2| < \delta$, donde z_1 y z_2 son dos puntos cualesquiera de esa región.

TEOREMA 2.7. Si $f(z)$ es continua en una región *cerrada* y *acotada*, entonces $f(z)$ es uniformemente continua en esa región.

2.15 SUCESIONES

La función de una variable entera positiva, que se denota $f(n)$ o u_n, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$, se llama *sucesión.* Por tanto, una sucesión es un conjunto de números $u_1, u_2, u_3, \ldots$ en un orden definido y formados de acuerdo con una regla definida. Cada número de la sucesión se llama *término* y u_n es el término n-ésimo. La sucesión $u_1, u_2, u_3, \ldots$ también se denota $\{u_n\}$. Una sucesión es *finita* o *infinita* según tenga un número finito o infinito de términos. A menos que se especifique otra cosa, se considerarán únicamente sucesiones infinitas.

EJEMPLO 2.6

a) El conjunto de números $i, i^2, i^3, \ldots, i^{100}$ es una sucesión finita; el término n-ésimo es $u_n = i^n$, $n = 1, 2, \ldots, 100$

b) El conjunto de números $1 + i$, $(1 + i)^2/2!$, $(1 + i)^2/3!$, ... es una sucesión infinita; el término n-ésimo es $u_n = (1 + i)^n/n!$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

www.FreeLibros.me

2.16 LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Se dice que un número l es el *límite* de una sucesión infinita $u_1, u_2, u_3, \ldots$ si para todo número positivo ϵ hay un número positivo N que dependa de ϵ tal que $|u_n - l| < \epsilon$ para todo $n > N$. En ese caso se escribe $\lim_{n\to\infty} u_n = l$. Si una sucesión tiene límite, se dice que la sucesión es *convergente;* si no es así, la sucesión es *divergente*. Una sucesión sólo puede converger a un límite, es decir, si el límite existe, éste es único.

Una manera más intuitiva pero menos rigurosa de expresar este concepto de límite es decir que una sucesión $u_1, u_2, u_3, \ldots$ tiene un límite l si sus términos sucesivos "están cada vez más cerca" de l. Con esto se da un número "que se suponga" el límite, después de lo cual se aplica la definición para ver si de verdad lo es.

2.17 TEOREMAS SOBRE LÍMITES DE SUCESIONES

TEOREMA 2.8. Suponga que $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Entonces

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) = AB$
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$ si $B \neq 0$

En el capítulo 6 se verá más sobre sucesiones.

2.18 SERIES INFINITAS

Sea $u_1, u_2, u_3, \ldots$ una sucesión dada.

Se define una nueva sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots$ mediante

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

donde a S_n, que se le conoce como n-ésima *suma parcial*, es la suma de los primeros n términos de la sucesión $\{u_n\}$.

La sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots$ se simboliza como

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

y se le llama serie infinita. Si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ existe, se dice que la serie es *convergente*, y S, su *suma*; si no es así, se dice que la serie es *divergente.* Una condición necesaria para que una serie converja es que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; sin embargo, esto no es suficiente (vea los problemas 2.40 y 2.150).

En el capítulo 6 se verá más sobre sucesiones.

PROBLEMAS RESUELTOS

FUNCIONES Y TRANSFORMACIONES

2.1. Sea $w = f(z) = z^2$. Encuentre los valores de w que correspondan a *a*) $z = -2 + i$ y *b*) $z = 1 - 3i$, y muestre cómo representar esta correspondencia en forma gráfica.

www.FreeLibros.me

Solución

a) $w = f(-2+i) = (-2+i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$
b) $w = f(1-3i) = (1-3i)^2 = 1 - 6i + 9i^2 = -8 - 6i$

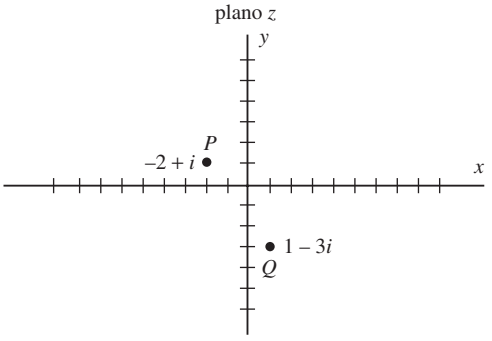


Figura 2-6

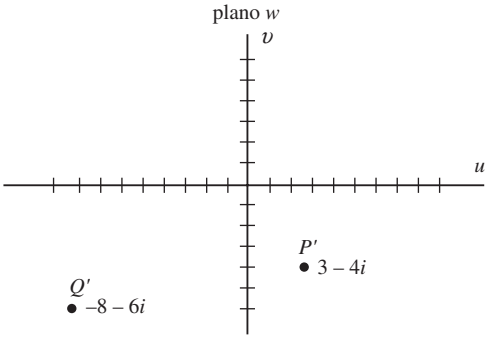


Figura 2-7

El punto $z = -2 + i$, representado por el punto P en el plano z de la figura 2-6, tiene como *punto imagen* $w = 1 - 4i$, representado por el punto P' en el plano w de la figura 2-7. Se dice que P es *llevado* a P' por medio de la *función de aplicación* o *transformación* $w = z^2$. De manera similar, $z = 1 - 3i$ [punto Q de la figura 2-6] es llevado a $w = -8 - 6i$ [punto Q' de la figura 2-7]. Por cada punto en el plano z existe uno y sólo un punto correspondiente (imagen) en el plano w, de manera que w es una función unívoca de z.

2.2. Muestre que la recta que une a los puntos P y Q del plano z en el problema 2.1 [figura 2-6] es llevada por $w = z^2$ a la curva que une los puntos $P'Q'$ [figura 2-7] y determine la ecuación de esta curva.

Solución

Los puntos P y Q tienen las coordenadas $(-2, 1)$ y $(1, -3)$. Entonces, las ecuaciones paramétricas de la recta que unen estos puntos son

$$\frac{x-(-2)}{1-(-2)} = \frac{y-1}{-3-1} = t \qquad \text{o} \qquad x = 3t - 2,\ y = 1 - 4t$$

La ecuación de la recta PQ se representa como $z = 3t - 2 + i(1 - 4t)$. La curva en el plano w a la que se lleva esta recta tiene la ecuación

$$\begin{aligned} w = z^2 &= \{3t - 2 + i(1-4t)\}^2 = (3t-2)^2 - (1-4t)^2 + 2(3t-2)(1-4t)i \\ &= 3 - 4t - 7t^2 + (-4 + 22t - 24t^2)i \end{aligned}$$

Entonces, como $w = u + iv$, las ecuaciones paramétricas de la curva imagen son

$$u = 3 - 4t - 7t^2, \quad v = -4 + 22t - 24t^2$$

Esta curva puede representarse en forma gráfica al dar diversos valores al parámetro t.

2.3. Un punto P se mueve en dirección contraria a las manecillas del reloj en torno a una circunferencia en el plano z cuyo centro se encuentra en el origen y cuyo radio es 1. Si la función es $w = z^3$, muestre que, cuando P realiza una revolución completa, la imagen de P en el plano w, P', realiza tres revoluciones completas en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno a una circunferencia con centro en el origen y radio 1.

www.FreeLibros.me

Solución

Sea $z = re^{i\theta}$. Entonces, en la circunferencia $|z| = 1$ [figura 2-8], $r = 1$ y $z = e^{i\theta}$. Por tanto, $w = z^3 = (e^{i\theta})^3 = e^{3i\theta}$. Si (ρ, ϕ) son las coordenadas polares en el plano w, se tiene $w = \rho e^{i\phi} = e^{3i\theta}$, por lo que $\rho = 1$ y $\phi = 3\theta$.

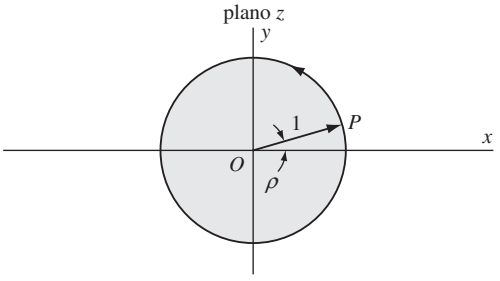


Figura 2-8

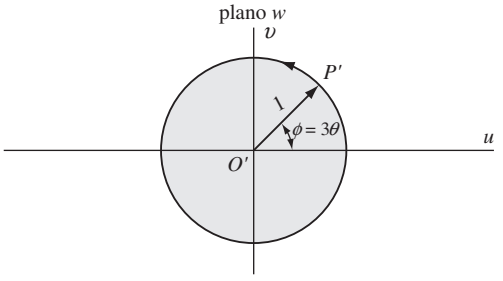


Figura 2-9

Como $\rho = 1$, se sigue que el punto imagen P' se mueve en el plano w sobre la circunferencia de radio 1 con centro en el origen [figura 2-9]. Asimismo, cuando P se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj en un ángulo θ, P' se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj en un ángulo 3θ. Por tanto, cuando P completa una revolución, P' completa tres revoluciones. En términos de vectores, esto significa que el vector $O'P'$ rota tres veces más rápido que el vector OP.

2.4. Suponga que c_1 y c_2 son constantes reales. Determine el conjunto de todos los puntos del plano z que se llevan a las rectas *a*) $u = c_1$, *b*) $v = c_2$ en el plano w mediante la función $w = z^2$. Ilustre considerando los casos $c_1 = 2, 4, -2, -4$ y $c_2 = 2, 4, -2, -4$.

Solución

Se tiene $w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, de modo que $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Entonces, las rectas $u = c_1$ y $v = c_2$ del plano w corresponden, respectivamente, a las hipérbolas $x^2 - y^2 = c_1$ y $2xy = c_2$ del plano z, como se indica en las figuras 2-10 y 2-11.

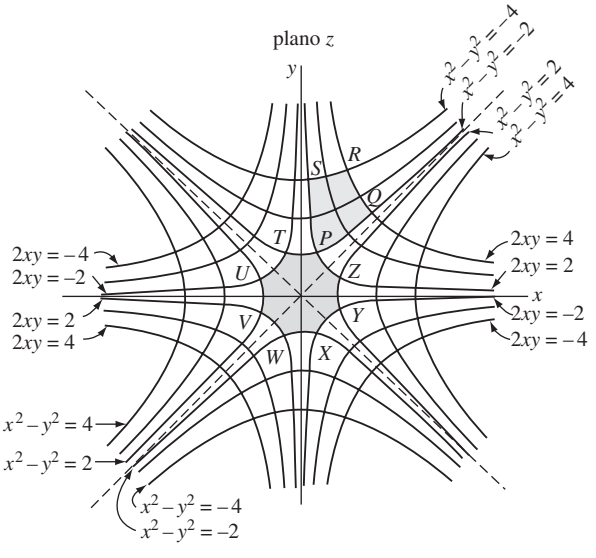


Figura 2-10

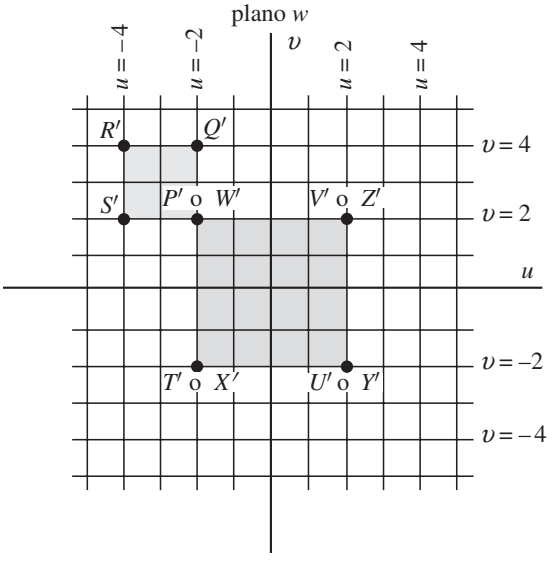


Figura 2-11

2.5. Con los datos del problema 2.4, determine *a*) la imagen de la región del primer cuadrante limitada por $x^2 - y^2 = -2$, $xy = 1$, $x^2 - y^2 = -4$ y $xy = 2$; *b*) la imagen de la región en el plano z limitada por todas las

www.FreeLibros.me

ramas de $x^2 - y^2 = 2$, $xy = 1$, $x^2 - y^2 = -2$ y $xy = -1$ y *c*) las coordenadas curvilíneas del punto en el plano xy cuyas coordenadas rectangulares son $(2, -1)$.

Solución

a) La región en el plano z es la indicada por la porción sombreada $PQRS$ de la figura 2-10. Esta región se lleva a la región imagen $P'Q'R'S'$ que se muestra sombreada en la figura 2-11. Hay que observar que la curva $PQRSP$ se recorre en dirección contraria a las manecillas del reloj, y la curva imagen $P'Q'R'S'P'$ también se recorre en dirección contraria a las manecillas del reloj.

b) La región en el plano z se indica por la porción sombreada $PTUVWXYZ$ de la figura 2-10. Esta región se lleva a la región imagen $P'T'U'V'$ que se muestra sombreada en la figura 2-11.

Es interesante observar que mientras el límite de la región $PTUVWXYZ$ se recorre sólo una vez, el límite de la región imagen $P'T'U'V'$ se recorre dos veces. Esto se debe a que los ocho puntos P y W, T y X, U y Y, V y Z del plano z se llevan a los cuatro puntos P' o W', T' o X', U' o Y', V' o Z', respectivamente.

Sin embargo, cuando el límite de la región $PQRS$ se recorre una sola vez, el límite de la región imagen se recorre también una sola vez. La diferencia se debe a que, al recorrer la curva $PTUVWXYZP$, se encierra el origen $z = 0$, mientras que al recorrer la curva $PQRSP$ no se encierra el origen.

c) $u = x^2 - y^2 = (2)^2 - (-1)^2 = 3$, $v = 2xy = 2(2)(-1) = -4$. Entonces las coordenadas curvilíneas son $u = 3$, $v = -4$.

FUNCIONES MULTIVALUADAS

2.6. Sea $w^5 = z$ y suponga que a un valor particular $z = z_1$ le corresponde $w = w_1$. *a*) Si se parte del punto z_1 del plano z [vea la figura 2-12] y se hace un circuito completo en dirección contraria a las manecillas del reloj en torno al origen, muestre que al volver a z_1 el valor de w es $w_1 e^{2\pi i/5}$. *b*) ¿Cuáles son los valores de w al volver a z_1, después de 2, 3, . . . circuitos completos en torno al origen? *c*) Analice lo que se pregunta en los incisos *a*) y *b*) si las trayectorias no son en torno al origen.

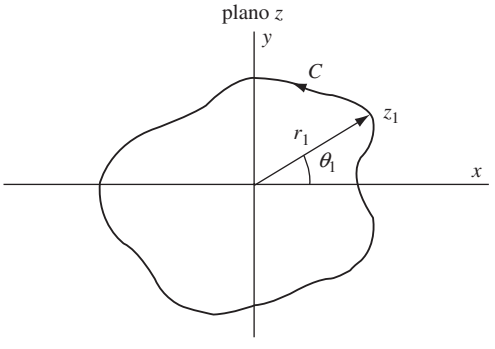


Figura 2-12

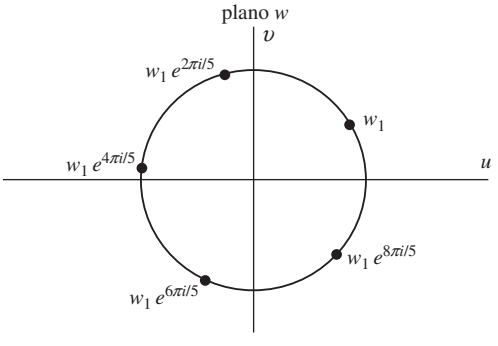


Figura 2-13

Solución

a) Se tiene que $z = re^{i\theta}$, de manera que $w = z^{1/5} = r^{1/5}e^{i\theta/5}$. Si $r = r_1$ y $\theta = \theta_1$, entonces $w_1 = r_1^{1/5}e^{i\theta_1/5}$.

A medida que el valor de θ aumenta de θ_1 a $\theta_1 + 2\pi$, que es lo que ocurre al realizar un circuito completo en sentido contrario a las manecillas del reloj, en torno al origen, se tiene

$$w = r_1^{1/5}e^{i(\theta_1+2\pi)/5} = r_1^{1/5}e^{i\theta_1/5}e^{2\pi i/5} = w_1 e^{2\pi i/5}$$

b) Después de dos circuitos completos en torno al origen, se encuentra

$$w = r_1^{1/5}e^{i(\theta_1+4\pi)/5} = r_1^{1/5}e^{i\theta_1/5}e^{4\pi i/5} = w_1 e^{4\pi i/5}$$

www.FreeLibros.me

De manera similar, después de tres y cuatro circuitos completos en torno al origen, se tiene

$$w = w_1 e^{6\pi i/5} \quad \text{y} \quad w = w_1 e^{8\pi i/5}$$

Después de cinco circuitos completos, el valor de w es $w_1 e^{10\pi i/5} = w_1$, de manera que después de cinco revoluciones completas en torno al origen de nuevo se obtiene el valor original de w. Por tanto, el ciclo se repite [vea la figura 2-13].

Otro método. Como $w^5 = z$, se tiene arg $z = 5$ arg w, de donde

$$\text{Cambio en arg } w = \tfrac{1}{5}(\text{Cambio en arg } z)$$

Entonces, si arg z aumenta $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \ldots$, arg w aumenta $2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5, 2\pi, \ldots$ y se llega así al mismo resultado de los incisos *a*) y *b*).

c) Si la trayectoria no encierra al origen, el aumento de arg z es cero y por ende el aumento de arg w es también cero. En este caso, el valor de w es w_1, sin importar el número de circuitos realizados.

2.7. *a*) Explique por qué, en el problema anterior w, puede considerarse una colección de cinco funciones unívocas de z.

b) Explique, en forma geométrica, la relación entre estas funciones unívocas.

c) Muestre en forma geométrica cómo es posible restringirse a una determinada función unívoca.

Solución

a) Como $w^5 = z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)}$, donde k es un entero, se tiene

$$w = r^{1/5} e^{i(\theta+2k\pi)/5} = r^{1/5}\{\cos(\theta + 2k\pi)/5 + i \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)/5\}$$

y por tanto, w es una función de z con cinco valores, los cuales están dados por $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

De manera equivalente, w puede considerarse una colección de cinco funciones unívocas, a las que se les conoce como *ramas* de la función multivaluada, al restringir θ de manera adecuada. Entonces, por ejemplo, se escribe

$$w = r^{1/5}(\cos\theta/5 + i \operatorname{sen}\theta/5)$$

donde se consideran los cinco intervalos posibles para θ, que son $0 \le \theta < 2\pi$, $2\pi \le \theta < 4\pi, \ldots, 8\pi \le \theta < 10\pi$; el resto de los intervalos da repeticiones de estos intervalos.

El primer intervalo, $0 \le \theta < 2\pi$, suele conocerse como *rango principal* de θ, y corresponde a la *rama principal* de la función multivaluada.

También pueden tomarse otros intervalos para θ de longitud 2π; por ejemplo, $-\pi \le \theta < \pi$, $\pi \le \theta < 3\pi$, etcétera, al primero de los cuales se le considera el rango principal.

b) Se parte de la rama principal

$$w = r^{1/5}(\cos\theta/5 + i \operatorname{sen}\theta/5)$$

donde $0 \le \theta < 2\pi$.

Después de un circuito completo en el plano z en torno al origen, θ aumenta 2π, con lo que se obtiene otra rama de la función. Después de otro circuito completo en torno al origen se obtiene otra rama de la función; así hasta encontrar las cinco ramas, después de lo cual se vuelve a la rama (principal) original.

Como al rodear sucesivamente $z = 0$ se obtienen diferentes valores de $f(z)$, a $z = 0$ se le llama *punto de ramificación*.

c) Es posible restringirse a una determinada función unívoca, por lo general a la rama principal, si se tiene el cuidado de no recorrer más de un circuito en torno al punto de ramificación, es decir, al restringir θ de manera adecuada.

En el caso del rango principal $0 \le \theta < 2\pi$, esto se logra al trazar un corte, que se indica mediante AO en la figura 2-14, llamado *línea de ramificación*, en el eje real positivo, con objeto de no ir más allá de este corte (si se va más allá de este corte se obtiene otra rama de la función).

Si se elige para θ otro intervalo, la línea de ramificación o corte será otra recta del plano z que salga del punto de ramificación.

www.FreeLibros.me

Para algunos propósitos, como se verá más adelante, resulta útil considerar la curva de la figura 2-15, de la cual la figura 2-14 es un caso límite.

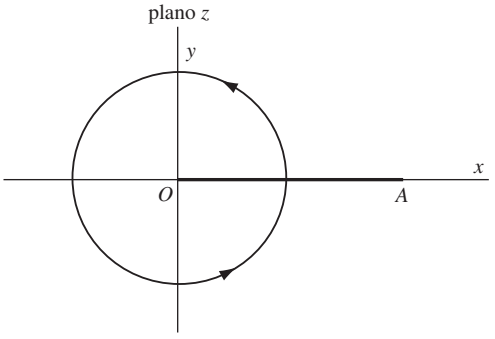


Figura 2-14

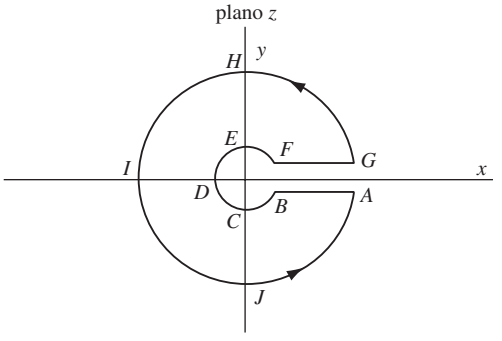


Figura 2-15

FUNCIONES ELEMENTALES

2.8. Demuestre que *a*) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, *b*) $|e^z| = e^x$ y *c*) $e^{z+2k\pi i} = e^z$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Solución

a) Por definición, $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, donde $z = x + iy$. Entonces, si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$,

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1} \cdot e^{x_2}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\{\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)\} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

b) $|e^z| = |e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)| = |e^x||\cos y + i \operatorname{sen} y| = e^x \cdot 1 = e^x$

c) De acuerdo con el inciso *a*),

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z(\cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi) = e^z$$

Esto muestra que la función e^z tiene *periodo* $2k\pi i$. En particular, tiene periodo $2\pi i$.

2.9. Demuestre:

a) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ *c*) $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$

b) $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$, $e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z$ *d*) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$

Solución

Por definición, $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Entonces

a)
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 \\ &= -\left(\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4}\right) + \left(\frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4}\right) = 1 \end{aligned}$$

b)
$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \operatorname{sen} z \tag{1}$$
$$e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z \tag{2}$$

www.FreeLibros.me

Se suman (1) y (2):

$$2e^{iz} = 2\cos z + 2i \operatorname{sen} z \quad \text{y} \quad e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

Se resta (1) de (2):

$$2e^{-iz} = 2\cos z - 2i \operatorname{sen} z \quad \text{y} \quad e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z$$

c) $$\operatorname{sen}(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \frac{e^{iz_1}\cdot e^{iz_2} - e^{-iz_1}\cdot e^{-iz_2}}{2i}$$
$$= \frac{(\cos z_1 + i \operatorname{sen} z_1)(\cos z_2 + i \operatorname{sen} z_2) - (\cos z_1 - i \operatorname{sen} z_1)(\cos z_2 - i \operatorname{sen} z_2)}{2i}$$
$$= \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$$

d) $$\cos(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \frac{e^{iz_1}\cdot e^{iz_2} + e^{-iz_1}\cdot e^{-iz_2}}{2}$$
$$= \frac{(\cos z_1 + i \operatorname{sen} z_1)(\cos z_2 + i \operatorname{sen} z_2) + (\cos z_1 - i \operatorname{sen} z_1)(\cos z_2 - i \operatorname{sen} z_2)}{2}$$
$$= \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$$

2.10. Compruebe que los ceros de *a*) $\operatorname{sen} z$ y *b*) $\cos z$ son números reales, y determínelos.

Solución

a) Si $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$, entonces $e^{iz} = e^{-iz}$ o $e^{2iz} = 1 = e^{2k\pi i}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Por tanto, $2iz = 2k\pi i$ y $z = k\pi$, es decir, $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ son los ceros.

b) Si $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$, entonces $e^{iz} = -e^{-iz}$ o $e^{2iz} = -1 = e^{(2k+1)\pi i}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Por tanto, $2iz = (2k+1)\pi i$ y $z = (k + \frac{1}{2})\pi$, es decir, $z = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$ son los ceros.

2.11. Demuestre que *a*) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$, *b*) $\cos(-z) = \cos z$ y *c*) $\tan(-z) = -\tan z$.

Solución

a) $$\operatorname{sen}(-z) = \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = -\operatorname{sen} z$$

b) $$\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

c) $\tan(-z) = \dfrac{\operatorname{sen}(-z)}{\cos(-z)} = \dfrac{-\operatorname{sen} z}{\cos z} = -\tan z$ con los incisos *a*) y *b*).

A las funciones de z con la propiedad de que $f(-z) = -f(z)$ se les llama *funciones impares*, y a las que tienen la propiedad de que $f(-z) = f(z)$, *funciones pares*. Así, $\operatorname{sen} z$ y $\tan z$ son funciones impares, mientras que $\cos z$ es una función par.

2.12. Compruebe: *a*) $1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$
b) $\operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z$
c) $\cos iz = \cosh z$
d) $\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$

Solución

a) Por definición, $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{senh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$. Entonces

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} = 1$$

www.FreeLibros.me

Al dividir entre $\cosh^2 z$, $\dfrac{\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z}{\cosh^2 z} = \dfrac{1}{\cosh^2 z}$ o $1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$

b) $\operatorname{sen} iz = \dfrac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \dfrac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\left(\dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right) = i \operatorname{senh} z$

c) $\cos iz = \dfrac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \dfrac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \cosh z$

d) De acuerdo con el problema 2.9 *c*) y con los incisos *b*) y *c*), se tiene

$$\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cos iy + \cos x \operatorname{sen} iy = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$

2.13. *a*) Suponga que $z = e^w$, donde $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y $w = u + iv$. Muestre que $u = \ln r$ y $v = \theta + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ de manera que $w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$. *b*) Determine los valores de $\ln(1 - i)$. ¿Cuál es el valor principal?

Solución

a) Como $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = e^w = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v)$, se igualan las partes reales y las partes imaginarias,

$$e^u \cos v = r \cos\theta \qquad (1)$$
$$e^u \operatorname{sen} v = r \operatorname{sen}\theta \qquad (2)$$

Se elevan al cuadrado (1) y (2), y al sumarlos se encuentra $e^{2u} = r^2$ o $e^u = r$ y $u = \ln r$. Entonces, de acuerdo con (1) y (2), $r \cos v = r \cos\theta$, $r \operatorname{sen} v = r \operatorname{sen}\theta$, de donde $v = \theta + 2k\pi$. Por tanto, $w = u + iv = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$.

Si $z = e^w$, entonces $w = \ln z$. Se ve así que $\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$. Una manera equivalente de decir lo mismo es $\ln z = \ln r + i\theta$, donde θ puede tomar una cantidad infinita de valores, los cuales difieren entre sí en 2π.

Observe que *formalmente* $\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$ según las leyes de los logaritmos reales ya conocidas de las matemáticas elementales.

b) Como $1 - i = \sqrt{2}e^{7\pi i/4 + 2k\pi i}$, se tiene $\ln(1 - i) = \ln\sqrt{2} + \left(\dfrac{7\pi i}{4} + 2k\pi i\right) = \dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{7\pi i}{4} + 2k\pi i$.

El valor principal es $\dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{7\pi i}{4}$, que se obtiene con $k = 0$.

2.14. Demuestre que $f(z) = \ln z$ tiene un punto de ramificación en $z = 0$.

Solución

Se tiene $\ln z = \ln r + i\theta$. Suponga que se parte de un punto $z_1 \neq 0$ del plano complejo, para el que $r = r_1$ y $\theta = \theta_1$, de manera que $\ln z_1 = \ln r_1 + i\theta_1$ [vea la figura 2-16]. Entonces, después de una vuelta completa alrededor del origen en dirección positiva, o en dirección contraria a las manecillas del reloj, al volver a z_1 se encuentra que $r = r_1$ y $\theta = \theta_1 + 2\pi$, de manera que $\ln z_1 = \ln r_1 + i(\theta_1 + 2\pi)$. Por tanto, se está en otra rama de la función, y $z = 0$ es un punto de ramificación.

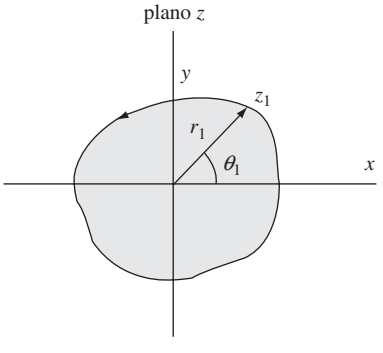


Figura 2-16

www.FreeLibros.me

Las vueltas o circuitos posteriores en torno al origen llevan a otras ramas, y (a diferencia del caso de funciones como $z^{1/2}$ o $z^{1/5}$) *nunca* se vuelve a la misma rama.

Se sigue que $\ln z$ es una función multivaluada de z con una cantidad infinita de ramas. A la rama de $\ln z$ que es real cuando z es real y positiva se le llama *rama principal*. Para obtener esta rama se requiere que $\theta = 0$ cuando $z > 0$. Para esto, se toma $\ln z = \ln r + i\theta$, donde θ se elige de manera que $0 \leq \theta < 2\pi$ o $-\pi \leq \theta < \pi$, etcétera.

Como generalización, se observa que $\ln (z - a)$ de un punto de ramificación en $z = a$.

2.15. Considere la transformación $w = \ln z$. Muestre que *a*) las circunferencias, en el plano z, con centro en el origen se llevan al plano w como rectas paralelas al eje v, *b*) las rectas o *rayos* del plano z que parten del origen se llevan al plano w como rectas paralelas al eje u y *c*) el plano z se lleva a una franja de amplitud 2π en el plano w. Ilustre el resultado gráficamente.

Solución

Se tiene $w = u + iv = \ln z = \ln r + i\theta$ de manera que $u = \ln r$ y $v = \theta$.
Como rama principal se elige $w = \ln r + i\theta$, donde $0 \leq \theta < 2\pi$.

a) Las circunferencias con centro en el origen y radio α tienen como ecuación $|z| = r = \alpha$. Éstas se llevan a rectas en el plano w cuyas ecuaciones son $u = \ln a$. En las figuras 2-17 y 2-18 se muestran las circunferencias y las rectas correspondientes a $\alpha = 1/2, 1, 3/2, 2$.

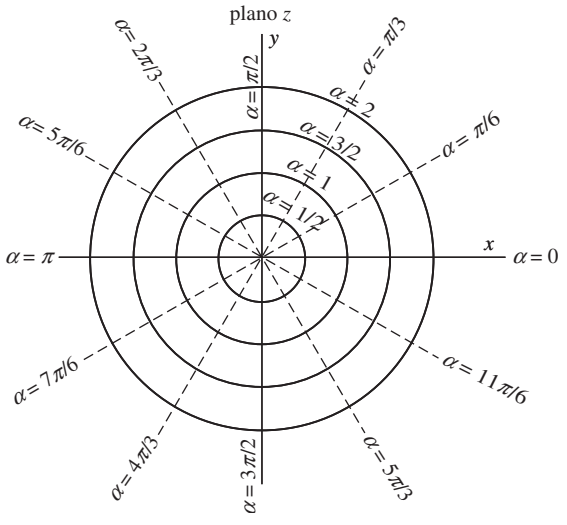


Figura 2-17

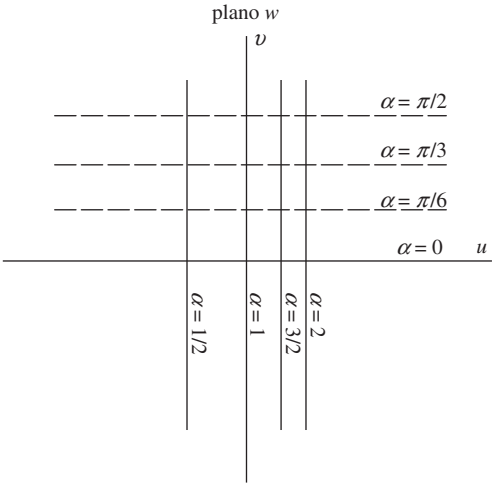


Figura 2-18

b) Las rectas o rayos que en el plano z salen del origen (punteados en la figura 2-17) tienen como ecuación $\theta = \alpha$. Estas rectas se llevan al plano w como rectas (punteadas en la figura 2-18) cuyas ecuaciones son $v = \alpha$; se muestran las rectas correspondientes a $\alpha = 0, \pi/6, \pi/3$ y $\pi/2$.

c) Correspondiente a cada punto P del plano z definido por $z \neq 0$ y con coordenadas polares (r, θ), donde $0 \leq \theta < 2\pi$, $r > 0$ [como en la figura 2-19], existe un punto P' en la franja de amplitud 2π que se indica con líneas punteadas en la figura 2-20. De manera que el plano z se lleva a esta banda. El punto $z = 0$ se lleva a un punto de esta banda, al que a veces se le llama *punto al infinito*.

Si θ es tal que $2\pi \leq \theta < 4\pi$, el plano z se lleva a la franja $2\pi \leq v < 4\pi$ de la figura 2-20. De manera similar se obtienen las demás franjas que se muestran en la figura 2-20.

www.FreeLibros.me

Se sigue que, dado un punto $z \neq 0$ en el plano z, existe una cantidad infinita de puntos imagen en el plano w que corresponden a ese punto.

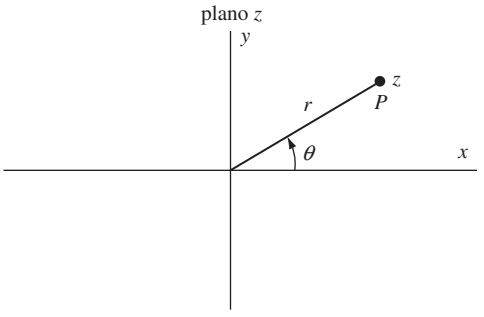


Figura 2-19

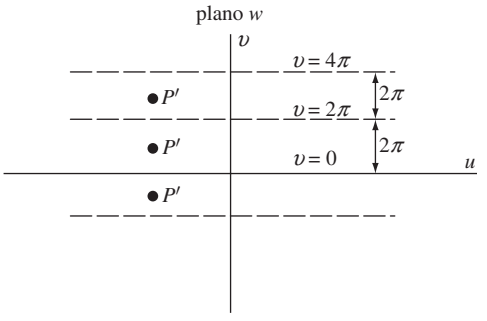


Figura 2-20

Hay que observar que si se hubiera tomado θ en otro intervalo de modo que $-\pi \leq \theta < \pi$, $\pi \leq \theta < 3\pi$, etcétera, las franjas de la figura 2-20 se habrían desplazado verticalmente una distancia π.

2.16. Suponga que se elige como rama principal de $\operatorname{sen}^{-1} z$ la rama en la que $\operatorname{sen}^{-1} 0 = 0$. Compruebe que

$$\operatorname{sen}^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

Solución

Si $w = \operatorname{sen}^{-1} z$, entonces $z = \operatorname{sen} w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$, de donde

$$e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0 \quad \text{o} \quad e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

Se despeja,

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

pues $\pm\sqrt{1 - z^2}$ queda implicado por $\sqrt{1 - z^2}$. Ahora, $e^{iw} = e^{i(w - 2k\pi)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ de manera que

$$e^{i(w-2k\pi)} = iz + \sqrt{1 - z^2} \quad \text{o} \quad w = 2k\pi + \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

La rama para la que $w = 0$ cuando $z = 0$ se obtiene con $k = 0$, de donde se encuentra, como se buscaba,

$$w = \operatorname{sen}^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

2.17. Suponga que se elige como rama principal de $\tanh^{-1} z$ aquella en la que $\tanh^{-1} 0 = 0$. Demuestre que

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

Solución

Si $w = \tanh^{-1} z$, entonces $z = \tanh w = \dfrac{\operatorname{senh} w}{\cosh w} = \dfrac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}}$, de donde

$$(1 - z)e^{w} = (1 + z)e^{-w} \quad \text{o} \quad e^{2w} = (1 + z)/(1 - z)$$

www.FreeLibros.me

Como $e^{2w} = e^{2(w-k\pi i)}$, se tiene

$$e^{2(w-k\pi i)} = \frac{1+z}{1-z} \quad \text{o} \quad w = k\pi i + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

La rama principal es la rama para la que $k = 0$, y conduce al resultado buscado.

2.18. *a*) Suponga que $z = re^{i\theta}$. Compruebe que $z^i = e^{-(\theta+2k\pi)}\{\cos(\ln r) + i\,\text{sen}(\ln r)\}$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) Suponga que z es un punto en la circunferencia unitaria con centro en el origen. Demuestre que z^i representa una cantidad infinita de números reales y determine el valor principal.
c) Encuentre el valor principal de i^i.

Solución

a) Por definición,

$$\begin{aligned} z^i &= e^{i\ln z} = e^{i\{\ln r + i(\theta+2k\pi)\}} \\ &= e^{i\ln r - (\theta+2k\pi)} = e^{-(\theta+2k\pi)}\{\cos(\ln r) + i\,\text{sen}(\ln r)\} \end{aligned}$$

La rama principal de la función multivaluada $f(z) = z^i$ se obtiene con $k = 0$, y está dada por $e^{-\theta}\{\cos(\ln r) + i\,\text{sen}(\ln r)\}$, donde θ se escoge de manera que $0 \le \theta < 2\pi$.

b) Si z es cualquier punto en la circunferencia unitaria con centro en el origen, entonces $|z| = r = 1$. Por tanto, de acuerdo con el inciso *a*), como $\ln r = 0$, se tiene $z^i = e^{-(\theta+2k\pi)}$, que representa una cantidad infinita de números reales. El valor principal es $e^{-\theta}$, donde θ se elige de manera que $0 \le \theta < 2\pi$.

c) Por definición, $i^i = e^{i\ln i} = e^{i\{i(\pi/2+2k\pi)\}} = e^{-(\pi/2+2k\pi)}$, pues $i = e^{i(\pi/2+2k\pi)}$ y $\ln i = i(\pi/2 + 2k\pi)$.
El valor principal es $e^{-\pi/2}$.
Otro método. De acuerdo con el inciso *b*), como $z = i$ se encuentra en la circunferencia unitaria con centro en el origen y $\theta = \pi/2$, el valor principal es $e^{-\pi/2}$.

PUNTOS DE RAMIFICACIÓN, LÍNEAS DE RAMIFICACIÓN, SUPERFICIES DE RIEMANN

2.19. Sea $w = f(z) = (z^2+1)^{1/2}$. *a*) Muestre que $z = \pm i$ son puntos de ramificación de $f(z)$. *b*) Muestre que una vuelta completa en torno a ambos puntos de ramificación no produce ningún cambio en las ramas de $f(z)$.

Solución

a) Se tiene $w = (z^2+1)^{1/2} = \{(z-i)(z+i)\}^{1/2}$. Entonces, $\arg w = \frac{1}{2}\arg(z-i) + \frac{1}{2}\arg(z+i)$ de manera que

$$\text{Cambio en } \arg w = \tfrac{1}{2}\{\text{Cambio en } \arg(z-i)\} + \tfrac{1}{2}\{\text{Cambio en } \arg(z+i)\}$$

Sea C [figura 2-21] una curva cerrada que encierre al punto i pero no al punto $-i$. Entonces, a medida que el punto z da una vuelta completa por C en contra de las manecillas del reloj,

$$\text{Cambio en } \arg(z-i) = 2\pi, \quad \text{Cambio en } \arg(z+i) = 0$$

de manera que

$$\text{Cambio en } \arg w = \pi$$

Por tanto, w no vuelve a su valor original, es decir, hubo un cambio de rama. Como una vuelta completa en torno a $z = i$ modifica las ramas de la función, $z = i$ es un punto de ramificación. De manera similar, si C es una curva cerrada que encierra al punto $-i$ pero no a i, se muestra que $z = -i$ es un punto de ramificación.

Otro método
Sea $z - i = r_1 e^{i\theta_1}$, $z + i = r_2 e^{i\theta_2}$. Entonces

$$w = \{r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}\}^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2}$$

Suponga que se empieza con un determinado valor z correspondiente a $\theta_1 = \alpha_1$ y $\theta_2 = \alpha_2$. Entonces $w = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\alpha_1/2} e^{i\alpha_2/2}$. A medida que z da una vuelta en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno a

www.FreeLibros.me

i, θ_1 aumenta a $\alpha_1 + 2\pi$, mientras θ_2 permanece igual, es decir, $\theta_2 = \alpha_2$. Por tanto,

$$w = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\alpha_1+2\pi)/2} e^{i\alpha_2/2}$$
$$= -\sqrt{r_1 r_2} e^{i\alpha_1/2} e^{i\alpha_2/2}$$

lo que muestra que no se obtiene el mismo valor de w, es decir, hubo un cambio de rama, lo que indica que $z = i$ es un punto de ramificación.

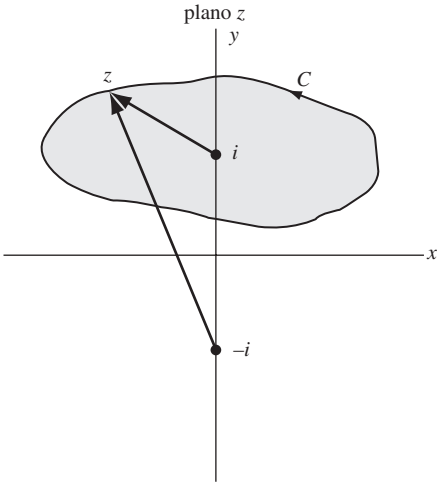


Figura 2-21

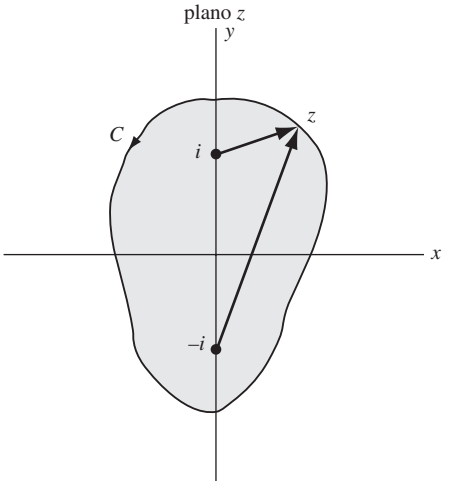


Figura 2-22

a) Si C encierra los dos puntos de ramificación $z = \pm i$, como en la figura 2-22, entonces, a medida que el punto z se mueve por C en sentido contrario a las manecillas del reloj,

$$\text{Cambio en arg } (z - 1) = 2\pi$$
$$\text{Cambio en arg } (z + 1) = 2\pi$$

de manera que

$$\text{Cambio en arg } w = 2\pi$$

Así, una vuelta completa en torno a los dos puntos de ramificación no da lugar a ningún cambio de rama.

Otro método

En este caso, de acuerdo con el segundo método del inciso *a*), θ_1 aumenta de α_1 a $\alpha_1 + 2\pi$ mientras θ_2 aumenta de α_2 a $\alpha_2 + 2\pi$. Por tanto,

$$w = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\alpha_1+2\pi)/2} e^{i(\alpha_2+2\pi)/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\alpha_1/2} e^{i\alpha_2/2}$$

y no se observa ningún cambio de rama.

2.20. Determine líneas de ramificación para la función del problema 2.19.

Solución

Como líneas de ramificación pueden tomarse las que se indican mediante una línea más gruesa en la figura 2-23 o 2-24. En ambos casos, si no se cruzan estas líneas más gruesas, se asegura que la función sea unívoca.

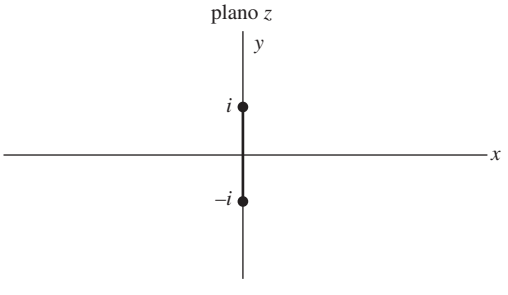


Figura 2-23

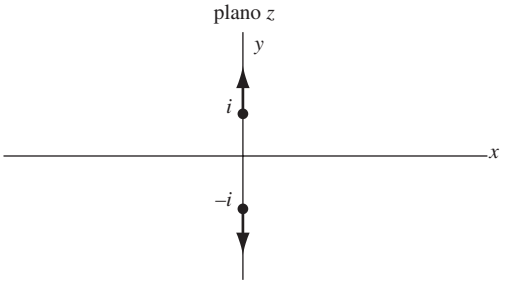


Figura 2-24

www.FreeLibros.me

2.21. Analice la superficie de Riemann de la función del problema 2.19.

Solución

Pueden tenerse varias superficies de Riemann que correspondan a las figuras 2-23 o 2-24 del problema 2.20. Si se toma la figura 2-23, por ejemplo, hay que imaginar que el plano z consta de dos capas sobrepuestas, una encima de la otra, y que estas capas se cortan a lo largo de las líneas de ramificación. Después se unen los bordes opuestos del corte y se obtiene así una superficie de Riemann. Si se da una vuelta completa en torno a $z = i$ se empieza sobre una rama y se termina en la otra. Pero, si se da una vuelta en torno a los dos puntos, $z = i$ y $z = -i$, no habrá ningún cambio de rama. Esto coincide con el resultado del problema 2.19.

2.22. Analice la superficie de Riemann de la función $f(z) = \ln z$ [vea el problema 2.14].

Solución

En este caso, hay que imaginar que el plano z consta de una cantidad infinita de capas sobrepuestas una sobre la otra y que se cortan a lo largo de la línea de ramificación que parte del origen $z = 0$. Después, cada borde del corte se une con el borde opuesto de una capa adyacente. Entonces, cada vez que se da una vuelta en torno a $z = 0$, se llega a otra capa que corresponde a una rama diferente de la función. La colección de estas capas es la superficie de Riemann. En este caso, a diferencia de lo que ocurre en los problemas 2.6 y 2.7, las sucesivas vueltas completas nunca llevan de regreso a la rama original.

LÍMITES

2.23. *a*) Suponga que $f(z) = z^2$. Compruebe que $\lim_{z\to z_0} f(z) = z_0^2$.

b) Encuentre $\lim_{z\to z_0} f(z)$ si $f(z) = \begin{cases} z^2 & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$.

Solución

a) Hay que mostrar que, dado un $\epsilon > 0$, puede hallarse un δ (que generalmente depende de ϵ) tal que $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Si $\delta \leq 1$, entonces $0 < |z - z_0| < \delta$ implica que

$$|z^2 - z_0^2| = |z - z_0||z + z_0| < \delta|z - z_0 + 2z_0| < \delta\{|z - z_0| + |2z_0|\} < \delta(1 + 2|z_0|)$$

Se toma δ como 1 o $\epsilon/(1 + 2|z_0|)$, el que sea menor. Entonces, se tiene $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$, con lo que se llega al resultado buscado.

b) No hay diferencia entre este problema y el del inciso *a*), pues en ningún caso se considera $z = z_0$. Por tanto, $\lim_{z\to z_0} f(z) = z_0^2$. Observe que el límite de $f(z)$ cuando $z \to z_0$ no tiene nada que ver con el valor de $f(z)$ en z_0.

2.24. Interprete en forma geométrica el problema 2.23.

Solución

a) La ecuación $w = f(z) = z^2$ define una transformación o llevado de puntos del plano z en puntos del plano w. En particular, suponga que el punto z_0 se lleva al punto $w_0 = z_0^2$. [Vea figuras 2-25 y 2-26.]

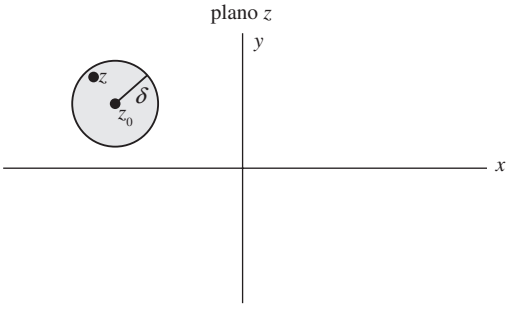


Figura 2-25

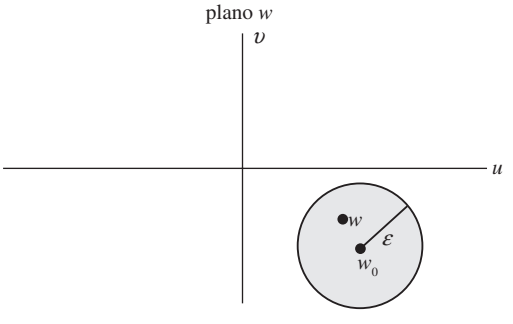


Figura 2-26

www.FreeLibros.me

En el problema 2.23*a*) se prueba que, dado un $\epsilon > 0$, puede hallarse un $\delta > 0$ tal que $|w - w_0| < \epsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$. Geométricamente, esto significa que si se desea que w esté en el interior de un circulo de radio ϵ [vea la figura 2-26] debe elegirse δ [que depende de ϵ] de manera que z esté en el interior de un círculo de radio δ [vea la figura 2-25]. De acuerdo con el problema 2.23*a*), esto es posible si δ es el menor de 1 y $\epsilon/(1 + 2|z_0|)$.

b) En el problema 2.23*a*), $w = w_0 = z_0^2$ es la imagen de $z = z_0$. Sin embargo, en el problema 2.23*b*), $w = 0$ es la imagen de $z = z_0$. Excepto por esto, la interpretación geométrica es idéntica a la del inciso *a*).

2.25. Demuestre que $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$.

Solución

Hay que mostrar que para todo $\epsilon > 0$ puede hallarse un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} - (4 + 4i) \right| < \epsilon \qquad \text{cuando } 0 < |z - i| < \delta$$

Como $z \neq i$, se escribe

$$\begin{aligned} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} &= \frac{[3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z + 5i][z - i]}{z - i} \\ &= 3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z + 5i \end{aligned}$$

al cancelar el factor común $z - i \neq 0$.

Entonces, hay que mostrar que para todo $\epsilon > 0$ puede hallarse un $\delta > 0$ tal que

$$|3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z - 4 + i| < \epsilon \qquad \text{cuando } 0 < |z - i| < \delta$$

Si $\delta \leq 1$, entonces $0 < |z - i| < \delta$ implica

$$\begin{aligned} |3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z - 4 + i| &= |z - i||3z^2 + (6i - 2)z - 1 - 4i| \\ &= |z - i||3(z - i + i)^2 + (6i - 2)(z - i + i) - 1 - 4i| \\ &= |z - i||3(z - i)^2 + (12i - 2)(z - i) - 10 - 6i| \\ &< \delta\{3|z - i|^2 + |12i - 2||z - i| + |-10 - 6i|\} \\ &< \delta(3 + 13 + 12) = 28\delta \end{aligned}$$

Se toma δ como el menor de 1 y $\epsilon/28$, y se llega al resultado buscado.

TEOREMAS SOBRE LÍMITES

2.26. Suponga que existe $\lim_{z \to z_0} f(z)$. Compruebe que debe ser único.

Solución

Hay que mostrar que si $\lim_{z \to z_0} f(z) = l_1$ y $\lim_{z \to z_0} f(z) = l_2$, entonces $l_1 = l_2$.

Por hipótesis, dado un $\epsilon > 0$, puede hallarse un $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - l_1| < \epsilon/2 \qquad \text{cuando } 0 < |z - z_0| < \delta$$

$$|f(z) - l_2| < \epsilon/2 \qquad \text{cuando } 0 < |z - z_0| < \delta$$

Entonces

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(z) + f(z) - l_2| \leq |l_1 - f(z)| + |f(z) - l_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

es decir, $|l_1 - l_2|$ es menor que cualquier número positivo ϵ (tan pequeño como se desee) y, por tanto, debe ser cero. De manera que $l_1 = l_2$.

www.FreeLibros.me

2.27. Suponga que $\lim_{z\to z_0} g(z) = B \neq 0$. Demuestre que existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(z)| > \tfrac{1}{2}|B| \quad \text{para } 0 < |z - z_0| < \delta$$

Solución

Como $\lim_{z\to z_0} g(z) = B$, puede hallarse un δ tal que $|g(z) - B| < \frac{1}{2}|B|$ para $0 < |z - z_0| < \delta$.

Se escribe $B = B - g(z) + g(z)$ y se tiene

$$|B| \leq |B - g(z)| + |g(z)| < \tfrac{1}{2}|B| + |g(z)|$$

es decir,

$$|B| < \tfrac{1}{2}|B| + |g(z)| \quad \text{de donde } |g(z)| > \tfrac{1}{2}|B|$$

2.28. Dados $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = B$, compruebe que

a) $\lim_{z\to z_0} [f(z) + g(z)] = A + B$,

b) $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = AB$,

c) $\lim_{z\to z_0} 1/g(z) = 1/B$ si $B \neq 0$,

d) $\lim_{z\to z_0} f(z)/g(z) = A/B$ si $B \neq 0$.

Solución

a) Hay que mostrar que para todo $\epsilon > 0$ puede hallarse un $\delta > 0$ tal que

$$|[f(z) + g(z)] - (A + B)| < \epsilon \qquad \text{cuando } 0 < |z - z_0| < \delta$$

Se tiene

$$|[f(z) + g(z)] - (A + B)| = |[f(z) - A] + [g(z) - B]| \leq |f(z) - A| + |g(z) - B| \tag{1}$$

Por hipótesis, dado un $\epsilon > 0$ pueden hallarse $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|f(z) - A| < \epsilon/2 \qquad \text{cuando } 0 < |z - z_0| < \delta_1 \tag{2}$$

$$|g(z) - B| < \epsilon/2 \qquad \text{cuando } 0 < |z - z_0| < \delta_2 \tag{3}$$

Entonces, de acuerdo con (1), (2) y (3),

$$|[f(z) + g(z)] - (A + B)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad \text{cuando } 0 < |z - z_0| < \delta$$

donde δ es el mínimo entre δ_1 y δ_2.

b) Se tiene

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - AB| &= |f(z)\{g(z) - B\} + B\{f(z) - A\}| \leq |f(z)||g(z) - B| + |B||f(z) - A| \\ &\leq |f(z)||g(z) - B| + (|B| + 1)|f(z) - A| \end{aligned} \tag{4}$$

Como $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$, puede hallarse δ_1 tal que $|f(z) - A| < 1$ para $0 < |z - z_0| < \delta_1$. Por tanto, de acuerdo con las desigualdades en (4) de la página 3, sección 1.5,

$$|f(z) - A| \geq |f(z)| - |A|, \quad \text{es decir, } 1 \geq |f(z)| - |A| \quad \text{o} \quad |f(z)| \leq |A| + 1$$

es decir, $|f(z)| < P$, donde P es una constante positiva.

Como $\lim_{z\to z_0} g(z) = B$, dado $\epsilon > 0$, puede hallarse $\delta_2 > 0$ tal que $|g(z) - B| < \epsilon/2P$ para $0 < |z - z_0| < \delta_2$.

Como $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$, dado $\epsilon > 0$, puede hallarse $\delta_3 > 0$ tal que $|f(z) - A| < \epsilon/2(|B| + 1)$ para $0 < |z - z_0| < \delta_3$.

Con esto en (4), se tiene

$$|f(z)g(z) - AB| < P\frac{\epsilon}{2P} + (|B| + 1)\frac{\epsilon}{2(|B| + 1)} = \epsilon$$

para $0 < |z - z_0| < \delta$, donde δ es el mínimo entre δ_1, δ_2 y δ_3, y con esto se completa la prueba.

www.FreeLibros.me

c) Hay que mostrar que para todo $\epsilon > 0$ puede hallarse un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(z) - B|}{|B||g(z)|} < \epsilon \quad \text{cuando } 0 < |z - z_0| < \delta \tag{5}$$

Por hipótesis, dado cualquier $\epsilon > 0$ es posible hallar un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(z) - B| < \tfrac{1}{2}|B|^2\epsilon \quad \text{cuando } 0 < |z - z_0| < \delta_1$$

De acuerdo con el problema 2.27, como $\lim_{z\to z_0} g(z) = B \neq 0$, puede hallarse un $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(z)| > \tfrac{1}{2}|B| \quad \text{cuando } 0 < |z - z_0| < \delta_2$$

Entonces, si δ es el mínimo entre δ_1 y δ_2, se escribe

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(z) - B|}{|B||g(z)|} < \frac{\frac{1}{2}|B|^2\epsilon}{|B| \cdot \frac{1}{2}|B|} = \epsilon \quad \text{siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta$$

con lo que se demuestra lo deseado.

d) De acuerdo con los incisos *b*) y *c*),

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\left\{f(z) \cdot \frac{1}{g(z)}\right\} = \lim_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

Esto se comprueba también directamente [vea el problema 2.145].

Nota. En la prueba del inciso *a*) se usaron los resultados $|f(z) - A| < \epsilon/2$ y $|g(z) - B| < \epsilon/2$ de modo que el resultado final fuera $|f(z) + g(z) - (A + B)| < \epsilon$. Desde luego, esta prueba sería *igualmente válida* si se hubiera usado 2ϵ [o cualquier otro múltiplo positivo de ϵ] en lugar de ϵ. Pueden hacerse observaciones similares para las pruebas de los incisos *b*), *c*) y *d*).

2.29. Evalúe las expresiones de los incisos siguientes con los teoremas sobre límites:

a) $\lim_{z\to 1+i}(z^2 - 5z + 10)$ *b*) $\displaystyle\lim_{z\to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2 - 2z + 4}$ *c*) $\displaystyle\lim_{z\to 2e^{\pi i/3}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$

Solución

a)
$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1+i}(z^2 - 5z + 10) &= \lim_{z\to 1+i} z^2 + \lim_{z\to 1+i}(-5z) + \lim_{z\to 1+i} 10\\ &= (\lim_{z\to 1+i} z)(\lim_{z\to 1+i} z) + (\lim_{z\to 1+i} -5)(\lim_{z\to 1+i} z) + \lim_{z\to 1+i} 10\\ &= (1+i)(1+i) - 5(1+i) + 10 = 5 - 3i\end{aligned}$$

En la práctica, se omite el paso intermedio.

b)
$$\lim_{z\to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2 - 2z + 4} = \frac{\lim_{z\to -2i}(2z+3)\lim_{z\to -2i}(z-1)}{\lim_{z\to -2i}(z^2 - 2z + 4)} = \frac{(3-4i)(-2i-1)}{4i} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{4}i$$

c) En este caso, el límite del numerador y el límite del denominador son ambos cero y no pueden aplicarse los teoremas sobre límites. Sin embargo, al factorizar los polinomios se ve que

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 2e^{\pi i/3}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16} &= \lim_{z\to 2e^{\pi i/3}} \frac{(z+2)(z - 2e^{\pi i/3})(z - 2e^{5\pi i/3})}{(z - 2e^{\pi i/3})(z - 2e^{2\pi i/3})(z - 2e^{4\pi i/3})(z - 2e^{5\pi i/3})}\\ &= \lim_{z\to 2e^{\pi i/3}} \frac{(z+2)}{(z - 2e^{2\pi i/3})(z - 2e^{4\pi i/3})} = \frac{e^{\pi i/3} + 1}{2(e^{\pi i/3} - e^{2\pi i/3})(e^{\pi i/3} - e^{4\pi i/3})}\\ &= \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i\end{aligned}$$

Otro método Como $z^6 - 64 = (z^2 - 4)(z^4 + 4z^2 + 16)$, este problema equivale a encontrar

$$\lim_{z\to 2e^{\pi i/3}} \frac{(z^2 - 4)(z^3 + 8)}{z^6 - 64} = \lim_{z\to 2e^{\pi i/3}} \frac{z^2 - 4}{z^3 - 8} = \frac{e^{2\pi i/3} - 1}{2(e^{\pi i} - 1)} = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$$

www.FreeLibros.me

2.30. Compruebe que $\lim_{z\to 0}(\bar{z}/z)$ no existe.

Solución

Si este límite existiera, debería ser independiente de la manera en que z se aproxime al punto 0.

Sea $z \to 0$ a lo largo del eje x. Entonces, $y = 0$ y $z = x + iy = x$ y $\bar{z} = x - iy = x$, de manera que el límite buscado es

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

Sea $z \to 0$ a lo largo del eje y. Entonces $x = 0$, y $z = x + iy = iy$ y $\bar{z} = x - iy = -iy$, de manera que el límite buscado es

$$\lim_{y\to 0}\frac{-iy}{iy} = -1$$

Como no se obtiene el mismo resultado, el límite no existe.

CONTINUIDAD

2.31. *a*) Demuestre que $f(z) = z^2$ es continua en $z = z_0$.

b) Compruebe que $f(z) = \begin{cases} z^2 & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$, donde $z_0 \neq 0$, es discontinua en $z = z_0$.

Solución

a) Según el problema 2.23 *a*), $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) = z_0^2$ y, por tanto, $f(z)$ es continua en $z = z_0$.

Otro método. Hay que mostrar que dado cualquier $\epsilon > 0$, puede hallarse un $\delta > 0$ (dependiente de ϵ) tal que $|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| < \epsilon$ cuando $|z^2 - z_0| < \delta$. El modelo de este tipo de prueba se dio en el problema 2.23 *a*).

b) Según el problema 2.23 *b*), $\lim_{z\to z_0} f(z) = z_0^2$, pero $f(z_0) = 0$. Por tanto, $\lim_{z\to z_0} f(z) \neq f(z_0)$, por lo que $f(z)$ es discontinua en $z = z_0$ si $z_0 \neq 0$.

Si $z_0 = 0$, entonces $f(z) = 0$; y como $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 = f(0)$, se ve que la función es continua.

2.32. ¿Es la función $f(z) = \dfrac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$ continua en $z = i$?

Solución

$f(i)$ no existe, es decir, $f(x)$ no está definida en $z = i$. Por tanto, $f(z)$ no es continua en $z = i$.

Al redefinir $f(z)$ de manera que $f(i) = \lim_{z\to i} f(z) = 4 + 4i$ (vea el problema 2.25), esta función se vuelve continua en $z = i$. En tal caso, se dice que $z = i$ es una *discontinuidad removible*.

2.33. Demuestre que si $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en $z = z_0$, también lo son

a) $f(z) + g(z)$, *b*) $f(z)g(z)$ y *c*) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ si $g(z_0) \neq 0$

Solución

Esto es consecuencia inmediata del problema 2.28 con $A = f(z_0)$, $B = g(z_0)$ y al reescribir $0 < |z - z_0| < \delta$ como $|z - z_0| < \delta$, es decir, *al incluir* $z = z_0$.

2.34. Compruebe que $f(z) = z^2$ es continua en la región $|z| \leq 1$.

Solución

Sea z_0 un punto cualquiera en la región $|z| \leq 1$. De acuerdo con el problema 2.23 *a*), $f(z)$ es continua en z_0. Por tanto, $f(z)$ es continua en esta región porque es continua en cualquier punto de la misma.

www.FreeLibros.me

2.35. ¿Para qué valores de z son continuas las funciones siguientes?

Solución

a) $f(z) = z/(z^2+1) = z/(z-i)(z+i)$. Como el denominador es cero cuando $z = \pm i$, la función es continua en todas partes excepto en $z = \pm i$.

b) $f(z) = \csc z = 1/\operatorname{sen} z$. De acuerdo con el problema 2.10 *a*), $\operatorname{sen} z = 0$ para $z = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi, \ldots$. Por tanto, $f(z)$ es continua en todas partes excepto en estos puntos.

CONTINUIDAD UNIFORME

2.36. Compruebe que $f(z) = z^2$ es uniformemente continua en la región $|z| < 1$.

Solución

Hay que demostrar que dado un $\epsilon > 0$ puede hallarse un $\delta > 0$ tal que $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$ cuando $|z - z_0| < \delta$, donde δ *sólo* depende de ϵ y no del punto z_0 de esta región de que se trate.

Si z y z_0 son dos puntos cualesquiera en $|z| < 1$, entonces

$$|z^2 - z_0^2| = |z + z_0||z - z_0| \le \{|z| + |z_0|\}|z - z_0| < 2|z - z_0|$$

Así, si $|z - z_0| < \delta$, se sigue que $|z^2 - z_0^2| < 2\delta$. Si se elige $\delta = \epsilon/2$, se ve que $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$ cuando $|z - z_0| < \delta$, donde δ depende únicamente de ϵ y no de z_0. Por tanto, $f(z) = z^2$ es uniformemente continua en esa región.

2.37. Demuestre que $f(z) = 1/z$ no es uniformemente continua en la región $|z| < 1$.

Solución

Método 1.

Suponga que $f(z)$ es uniformemente continua en esta región. Entonces, para toda $\epsilon > 0$ es posible hallar un δ, por ejemplo, entre 0 y 1, tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ cuando $|z - z_0| < \delta$ para todo z y z_0 de esta región.

Sea $z = \delta$ y $z_0 = \dfrac{\delta}{1+\epsilon}$. Entonces $|z - z_0| = \left|\delta - \dfrac{\delta}{1+\epsilon}\right| = \dfrac{\epsilon}{1+\epsilon}\delta < \delta$.

Sin embargo, $\left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z_0}\right| = \left|\dfrac{1}{\delta} - \dfrac{1+\epsilon}{\delta}\right| = \dfrac{\epsilon}{\delta} > \epsilon$ (pues $0 < \delta < 1$).

Así, se tiene una contradicción, y se sigue que $f(z) = 1/z$ no puede ser uniformemente continua en esta región.

Método 2.

Sean z_0 y $z_0 + \zeta$ dos puntos cualesquiera de esta región tales que $|z_0 + \zeta - z_0| = |\zeta| = \delta$. Entonces

$$|f(z_0) - f(z_0 + \zeta)| = \left|\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_0 + \zeta}\right| = \frac{|\zeta|}{|z_0||z_0 + \zeta|} = \frac{\delta}{|z_0||z_0 + \zeta|}$$

puede hacerse mayor que cualquier número positivo al elegir z_0 lo bastante cercano a 0. Por tanto, esta función no puede ser uniformemente continua en esa región.

SUCESIONES Y SERIES

2.38. Investigue la convergencia de las sucesiones

a) $u_n = \dfrac{i^n}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y *b*) $u_n = \dfrac{(1+i)^n}{n}$.

Solución

a) Los primeros términos de esta sucesión son $i,\ \dfrac{i^2}{2},\ \dfrac{i^3}{3},\ \dfrac{i^4}{4},\ \dfrac{i^5}{5}$, etc., o $i,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-i}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{i}{5}, \ldots$. Si se representan en forma gráfica estos puntos en el plano z puede sospecharse que el límite es cero. Para comprobar esto hay que mostrar que

$$|u_n - l| = |i^n/n - 0| < \epsilon \quad \text{cuando } n > N \tag{1}$$

www.FreeLibros.me

Ahora

$$|i^n/n - 0| = |i^n/n| = |i|^n/n = 1/n < \epsilon \quad \text{cuando } n > 1/\epsilon$$

Elijamos $N = 1/\epsilon$. Entonces se ve que (1) es verdad y que la sucesión converge a cero.

b) Considere

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(1+i)^{n+1}/(n+1)}{(1+i)^n/n}\right| = \frac{n}{n+1}|1+i| = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$$

Para toda $n \geq 10$ (por ejemplo), se tiene $n\sqrt{2}/(n+1) > 6/5 = 1.2$. Por tanto, $|u_{n+1}| > 1.2\,|u_n|$ para $n > 10$, es decir, $|u_{11}| > 1.2|u_{10}|$, $|u_{12}| > 1.2|u_{11}| > (1.2)^2|u_{10}|$, y en general $|u_n| > (1.2)^{n-10}|u_{10}|$. Se sigue que $|u_n|$ puede hacerse mayor que cualquier número positivo previamente dado (sin importar cuán grande sea), por lo que el límite de $|u_n|$ no puede existir y, en consecuencia, el límite de u_n tampoco puede existir. Así, esta sucesión diverge.

2.39. Dados $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Compruebe que $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.

Solución

Por definición, dado un ϵ es posible hallar un N tal que

$$|a_n - A| < \epsilon/2,\ |b_n - B| < \epsilon/2 \text{ para } n > N$$

Entonces, para $n > N$,

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B) \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \epsilon$$

lo que demuestra el resultado.

Se observa que esta demostración es paralela a la de los límites de funciones [problema 2.28].

2.40. Compruebe que si converge una serie $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, debe tenerse $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Solución

Si S_n es la suma de los n primeros términos de la serie, entonces $S_{n+1} = S_n + u_n$. Por tanto, si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe y es igual a S, se tiene $\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} u_n$ o $S = S + \lim_{n\to\infty} u_n$, es decir, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Sin embargo, si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, puede ser que la serie no converja. Vea el problema 2.150.

2.41. Demuestre que $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = 1/(1-z)$ si $|z| < 1$.

Solución

Sea $\quad S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$

Entonces $\quad zS_n = \quad z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + z^n$

Se resta, $\quad (1-z)S_n = 1 - z^n \quad \text{o} \quad S_n = \dfrac{1-z^n}{1-z}$

Si $|z| < 1$, entonces se sospecha que $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$. Para verificar esto, hay que mostrar que dado cualquier $\epsilon > 0$ puede hallarse N tal que $|z^n - 0| < \epsilon$ para todo $n > N$. Es claro que el resultado es correcto si $z = 0$; por tanto, se considera $z \neq 0$.

Ahora $|z^n| = |z|^n < \epsilon$ cuando $n \ln|z| < \ln\epsilon$ o $n > (\ln\epsilon)/(\ln|z|) = N$ [pues, si $|z| < 1$, $\ln|z|$ es negativo]. Por ende, se encontró la N buscada y $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$. Así,

$$1 + z + z^2 + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-0}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

www.FreeLibros.me

La serie

$$a + az + az^2 + \cdots = \frac{\alpha}{1 - z}$$

se conoce como *serie geométrica* con primer término igual a a y razón z, y su suma es $a/(1 - z)$ siempre que $|z| < 1$.

PROBLEMAS DIVERSOS

2.42. Sea $w = (z^2 + 1)^{1/2}$. *a*) Si $w = 1$ cuando $z = 0$ y z describe la curva C_1 que se muestra en la figura 2-27, encuentre el valor de w cuando $z = 1$. *b*) Si z describe la curva C_2 que se muestra en la figura 2-28, ¿el valor de w, cuando $z = 1$, es el mismo que el obtenido en el inciso *a*)?

Solución

a) De acuerdo con el problema 2.19, los puntos de ramificación de $w = f(z) = (z^2 + 1)^{1/2} = \{(z - i)(z + i)\}^{1/2}$ están en $z = \pm i$.

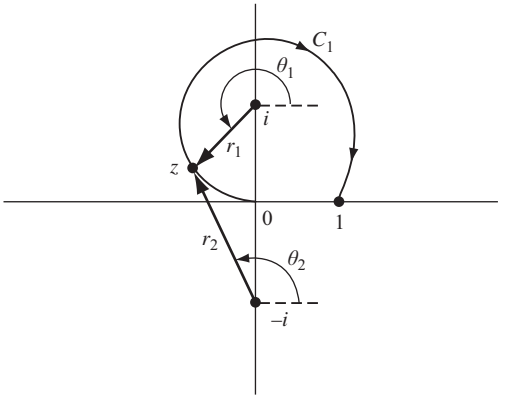


Figura 2-27

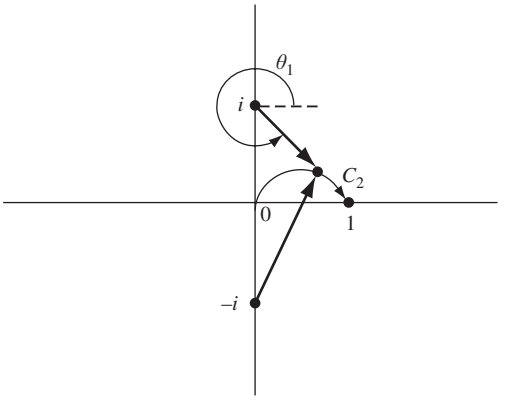


Figura 2-28

Sea (1) $z - i = r_1 e^{i\theta_1}$, 2) $z + i = r_2 e^{i\theta_2}$. Entonces, como θ_1 y θ_2 sólo están determinadas dentro de múltiples enteros de $2\pi i$, se escribe

$$w = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} e^{2k\pi i/2} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} e^{k\pi i} \tag{3}$$

En la figura 2-27 [o con las ecuaciones (1) y (2)] se ve que cuando z está en 0, $r_1 = 1$, $\theta_1 = 3\pi/2$ y $r_2 = 1$, $\theta_2 = \pi/2$. Como $w = 1$ en $z = 0$ se tiene, de acuerdo con (3), $1 = e^{(k+1)\pi i}$ y se elige $k = -1$ [o 1, −3, . . .]. Entonces

$$w = -\sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$$

A medida que z recorre C_1 de 0 a 1, r_1 cambia de 1 a $\sqrt{2}$, θ_1 cambia de $3\pi/2$ a $-\pi/4$, r_2 cambia de 1 a $\sqrt{2}$, θ_2 cambia de $\pi/2$ a $\pi/4$. Entonces

$$w = -\sqrt{(\sqrt{2})(\sqrt{2})}\; e^{i(-\pi/4+\pi/4)/2} = -\sqrt{2}$$

b) Como en el inciso *a*), $w = -\sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$. En la figura 2-28 se ve que, a medida que z recorre C_2, r_1 cambia de 1 a $\sqrt{2}$, θ_1 cambia de $3\pi/2$ a $7\pi/4$, r_2 cambia de 1 a $\sqrt{2}$ y θ_2 cambia de $\pi/2$ a $\pi/4$. Entonces

$$w = -\sqrt{(\sqrt{2})(\sqrt{2})}\; e^{i(7\pi/4+\pi/4)/2} = \sqrt{2}$$

que no es el mismo valor que el que se obtuvo en el inciso *a*).

www.FreeLibros.me

2.43. Sea $\sqrt{1-z^2} = 1$ para $z = 0$. Muestre que, a medida que z varía de 0 a $p > 1$ a lo largo del eje real, $\sqrt{1-z^2}$ varía de 1 a $-i\sqrt{p^2-1}$.

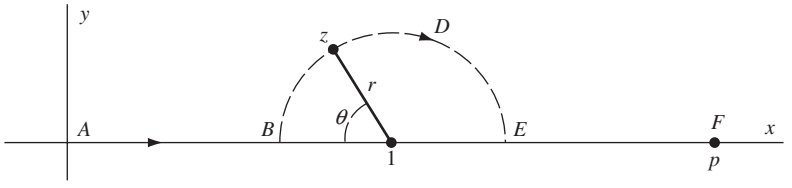


Figura 2-29

Solución

Considere el caso en el que z recorre la trayectoria $ABDEF$, donde BDE es una semicircunferencia como se muestra en la figura 2-29. En esta figura se ve que

$$1 - z = 1 - x - iy = r\cos\theta - ir\,\text{sen}\,\theta$$

de manera que $\sqrt{1-z^2} = \sqrt{(1-z)(1+z)} = \sqrt{r}(\cos\theta/2 - i\,\text{sen}\,\theta/2)\sqrt{2 - r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta}$

A lo largo de AB: $z = x$, $r = 1 - x$, $\theta = 0$ y $\sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x} = \sqrt{1-x^2}$.

A lo largo de EF: $z = x$, $r = x - 1$, $\theta = \pi$ y $\sqrt{1-z^2} = -i\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = -i\sqrt{x^2-1}$.

Por tanto, a medida que z varía de 0 [donde $x = 0$] a p [donde $x = p$], $\sqrt{1-z^2}$ varía de 1 a $-i\sqrt{p^2-1}$.

2.44. Encuentre una función que lleve los puntos $z = 0, \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \ldots$ del plano z al punto $w = 1$ del plano w [vea las figuras 2-30 y 2-31].

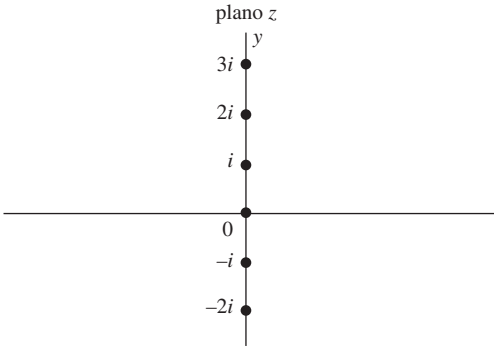


Figura 2-30

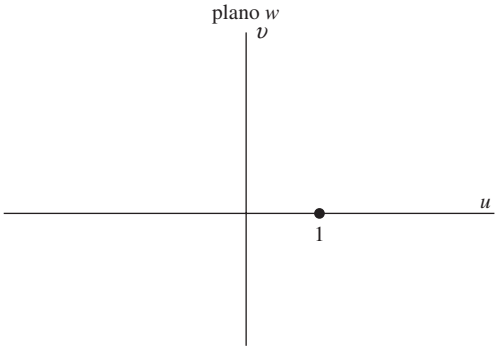


Figura 2-31

Solución

Como en el plano z estos puntos están igualmente espaciados, hay que considerar, debido al problema 2.15, una función logarítmica del tipo $z = \ln w$.

Ahora, si $w = 1 = e^{2k\pi i}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces $z = \ln w = 2k\pi i$, de manera que el punto $w = 1$ se lleva a los puntos $0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots$.

Sin embargo, si se considera $z = (\ln w)/2\pi$, el punto $w = 1$ se lleva a $z = 0, \pm i, \pm 2i, \ldots$ como se deseaba. Y a la inversa, por medio de esta función, los puntos $z = 0, \pm i, \pm 2i, \ldots$ se llevan al punto $w = 1$.

Así, una función adecuada es $z = (\ln w)/2\pi$ o $w = e^{2\pi z}$.

www.FreeLibros.me

2.45. Dado $\lim_{n\to\infty} z_n = l$, demuestre que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\{z_n\} = \mathrm{Re}\{l\}$ y $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\{z_n\} = \mathrm{Im}\{l\}$.

Solución

Sea $z_n = x_n + iy_n$ y $l = l_1 + il_2$, donde x_n, y_n, y l_1, l_2, son las partes reales e imaginarias de z_n y l, respectivamente.

Por hipótesis, dado un $\epsilon > 0$ puede hallarse un N tal que $|z_n - l| < \epsilon$ para $n > N$, es decir,

$$|x_n + iy_n - (l_1 + il_2)| < \epsilon \quad \text{para } n > N$$

o bien

$$\sqrt{(x_n - l_1)^2 + (y_n - l_2)^2} < \epsilon \quad \text{para } n > N$$

De esto, necesariamente se sigue que

$$|x_n - l_1| < \epsilon \quad \text{y} \quad |y_n - l_2| < \epsilon \quad \text{para } n > N$$

es decir, $\lim_{n\to\infty} x_n = l_1$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = l_2$, como se buscaba.

2.46. Compruebe que si $|a| < 1$,

a) $1 + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + a^3\cos 3\theta + \cdots = \dfrac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$

b) $a\,\mathrm{sen}\,\theta + a^2\,\mathrm{sen}\,2\theta + a^3\,\mathrm{sen}\,3\theta + \cdots = \dfrac{a\,\mathrm{sen}\,\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$

Solución

En el problema 2.41, sea $z = ae^{i\theta}$. Esto es posible porque $|z| = |a| < 1$. Entonces

$$1 + ae^{i\theta} + a^2e^{2i\theta} + a^3e^{3i\theta} + \cdots = \frac{1}{1 - ae^{i\theta}}$$

o bien

$$\begin{aligned}(1 + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + \cdots) + i(a\,\mathrm{sen}\,\theta + a^2\,\mathrm{sen}\,2\theta + \cdots) &= \frac{1}{1 - ae^{i\theta}} \cdot \frac{1 - ae^{-i\theta}}{1 - ae^{-i\theta}} \\ &= \frac{1 - a\cos\theta + ia\,\mathrm{sen}\,\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\end{aligned}$$

Los resultados buscados se obtienen al igualar las partes reales y las imaginarias.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

FUNCIONES Y TRANSFORMACIONES

2.47. Sea $w = f(z) = z(2 - z)$. Encuentre los valores de w correspondientes a *a*) $z = 1 + i$, *b*) $z = 2 - 2i$ y represente gráficamente, en los planos w y z, dichos valores.

2.48. Sea $w = f(z) = (1 + z)/(1 - z)$. Encuentre: *a*) $f(i)$ y *b*) $f(1 - i)$ y represéntelos en forma gráfica.

2.49. Suponga que $f(z) = (2z + 1)/(3z - 2)$, $z \neq 2/3$. Encuentre *a*) $f(1/z)$ y *b*) $f\{f(z)\}$.

2.50. *a*) Si $w = f(z) = (z + 2)/(2z - 1)$, encuentre $f(0)$, $f(i)$, $f(1 + i)$. *b*) Encuentre los valores de z tales que $f(z) = i$, $f(z) = 2 - 3i$. *c*) Muestre que z es una función unívoca de w. *d*) Encuentre los valores de z tales que $f(z) = z$ y explique, en forma geométrica, por qué a estos valores se les llama *puntos fijos* o *invariantes* de la transformación.

www.FreeLibros.me

2.51. Un cuadrado S en el plano z tiene sus vértices en (0, 0), (1, 0), (1, 1) y (0, 1). Determine la región del plano w a la que se lleva S mediante las transformaciones *a*) $w = z^2$ y *b*) $w = 1/(z + 1)$.

2.52. Analice el problema 2.51 si los vértices del cuadrado son (1, 1), (−1, 1), (−1, −1), (1, −1).

2.53. En los incisos siguientes separe la parte real de la imaginaria, es decir, encuentre $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tales que $f(z) = u + iv$:
a) $f(z) = 2z^2 - 3iz$, *b*) $f(z) = z + 1/z$, *c*) $f(z) = (1 - z)/(1 + z)$ y *d*) $f(z) = z^{1/2}$.

2.54. Suponga que $f(z) = 1/z = u + iv$. Trace varios miembros de las familias $u(x, y) = \alpha$ y $v(x, y) = \beta$, donde α y β son constantes, y muestre que son familias de circunferencias.

FUNCIONES MULTIVALUADAS

2.55. Sea $w^3 = z$ y suponga que $w = 1$ corresponde a $z = 1$. *a*) Si se parte de $z = 1$ en el plano z y se da una vuelta completa en torno al origen en sentido contrario al de las manecillas del reloj, encuentre el valor de w después de la primera vuelta, al volver a $z = 1$. *b*) ¿Cuáles son los valores de w al volver a $z = 1$ después de 2, 3, 4, . . . vueltas completas en torno al origen? Analice si las trayectorias de los incisos *a*) y *b*) no son trayectorias en torno al origen.

2.56. Sea $w = (1 - z^2)^{1/2}$ y suponga que, correspondiente a $z = 0$, se tiene $w = 1$. *a*) Si se parte de $z = 0$ en el plano z y se da una vuelta completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj de manera que se incluya a $z = 1$ pero no a $z = -1$, encuentre el valor de w después de la primera vuelta, al volver a $z = 0$. *b*) ¿Cuáles son los valores de w después de dar vueltas y vueltas? *c*) Repita los incisos *a*) y *b*) si en cada vuelta se incluye a $z = -1$ pero no a $z = 1$. *d*) Repita los incisos *a*) y *b*) si en cada vuelta se incluye tanto a $z = 1$ como a $z = -1$. *e*) Repita los incisos *a*) y *b*) si en ninguna vuelta se incluye a $z = 1$ ni a $z = -1$. *f*) Explique por qué $z = 1$ y $z = -1$ son puntos de ramificación. *g*) ¿Qué rectas pueden tomarse como líneas de ramificación?

2.57. Encuentre dos puntos de ramificación y trace las líneas de ramificación de las funciones dadas.
a) $f(z) = \{z/(1 - z)\}^{1/2}$, *b*) $f(z) = (z^2 - 4)^{1/3}$ y *c*) $f(z) = \ln(z - z^2)$.

FUNCIONES ELEMENTALES

2.58. Demuestre que *a*) $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1 - z_2}$ y *b*) $|e^{iz}| = e^{-y}$.

2.59. Compruebe que no puede haber ningún valor finito de z tal que $e^z = 0$.

2.60. Demuestre que 2π es un periodo de e^{iz}. ¿Hay otros periodos?

2.61. Encuentre todos los valores de z para los que *a*) $e^{3z} = 1$ y *b*) $e^{4z} = i$.

2.62. Compruebe que *a*) $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$, *b*) $\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$, *c*) $\operatorname{sen}^2(z/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$ y *d*) $\cos^2(z/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos z)$.

2.63. Demuestre que *a*) $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$ y *b*) $1 + \cot^2 z = \csc^2 z$.

2.64. Sea $\cos z = 2$. Encuentre *a*) $\cos 2z$ y *b*) $\cos 3z$.

2.65. Verifique que todas las raíces de *a*) $\operatorname{sen} z = a$ y *b*) $\cos z = a$, donde $-1 \leq a \leq 1$ son reales.

2.66. Compruebe que si $|\operatorname{sen} z| \leq 1$ para toda z, entonces $|\operatorname{Im}\{z\}| \leq \ln(\sqrt{2} + 1)$.

2.67. Muestre que *a*) $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$, *b*) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ y *c*) $\overline{\tan z} = \tan \bar{z}$.

2.68. Dadas las funciones siguientes, encuentre $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tales que $f(z) = u + iv$, es decir, separe la parte real de la imaginaria: *a*) $f(z) = e^{3iz}$, *b*) $f(z) = \cos z$, *c*) $f(z) = \operatorname{sen} 2z$ y *d*) $f(z) = z^2 e^{2z}$.

2.69. Demuestre que *a*) $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$, *b*) $\cosh(-z) = -\cosh z$ y *c*) $\tanh(-z) = -\tanh z$.

2.70. Compruebe que *a*) $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$, *b*) $\cosh 2z = \cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z$ y *c*) $1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$.

www.FreeLibros.me

2.71. Pruebe que *a*) $\operatorname{senh}^2(z/2) = \frac{1}{2}(\cosh z - 1)$ y *b*) $\cosh^2(z/2) = \frac{1}{2}(\cosh z + 1)$.

2.72. Encuentre $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tales que *a*) $\operatorname{senh} 2z = u + iv$ y *b*) $z \cosh z = u + iv$.

2.73. Encuentre los valores de *a*) $4 \operatorname{senh}(\pi i/3)$, *b*) $\cosh(2k+1)\pi i/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ y *c*) $\coth 3\pi i/4$.

2.74. *a*) Muestre que $\ln\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ y *b*) ¿Cuál es el valor principal?

2.75 Obtenga todos los valores de *a*) $\ln(-4)$, *b*) $\ln(3i)$, *c*) $\ln(\sqrt{3} - i)$ y en cada caso encuentre el valor principal.

2.76. Muestre que $\ln(z-1) = \frac{1}{2}\ln\{(x-1)^2 + y^2\} + i\tan^{-1} y/(x-1)$ y dé las restricciones que puedan existir.

2.77. Compruebe que *a*) $\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ y *b*) $\cot^{-1} z = \dfrac{1}{2i}\ln\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)$, e indique cualquier restricción que exista.

2.78. Demuestre que *a*) $\operatorname{senh}^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$ y *b*) $\coth^{-1} z = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$.

2.79. Encuentre todos los valores de *a*) $\operatorname{sen}^{-1} 2$ y *b*) $\cos^{-1} i$.

2.80. Encuentre todos los valores de *a*) $\cosh^{-1} i$ y *b*) $\operatorname{senh}^{-1}\{\ln(-1)\}$.

2.81. Determine todos los valores de *a*) $(1+i)^i$ y *b*) $1^{\sqrt{2}}$.

2.82. Encuentre *a*) $\operatorname{Re}\{(1-i)^{1+i}\}$ y *b*) $|(-i)^{-i}|$.

2.83. Encuentre las partes real e imaginaria de z^z, donde $z = x + iy$.

2.84. Muestre que *a*) $f(z) = (z^2 - 1)^{1/3}$ y *b*) $f(z) = z^{1/2} + z^{1/3}$ son funciones algebraicas de z.

PUNTOS DE RAMIFICACIÓN, LÍNEAS DE RAMIFICACIÓN Y SUPERFICIES DE RIEMANN

2.85. Compruebe que $z = \pm i$ son puntos de ramificación de $(z^2 + 1)^{1/3}$.

2.86. Construya una superficie de Riemann para las funciones *a*) $z^{1/3}$, *b*) $z^{1/2}(z-1)^{1/2}$ y *c*) $\left(\dfrac{z+2}{z-2}\right)^{1/3}$.

2.87. Muestre que la superficie de Riemann de la función $z^{1/2} + z^{1/3}$ tiene seis capas.

2.88. Construya las superficies de Riemann de las funciones *a*) $\ln(z+2)$, *b*) $\operatorname{sen}^{-1} z$ y *c*) $\tan^{-1} z$.

LÍMITES

2.89. *a*) Suponga que $f(z) = z^2 + 2z$. Demuestre que $\lim_{z\to i} f(z) = 2i - 1$.

b) Suponga que $f(z) = \begin{cases} z^2 + 2z & z \neq i \\ 3 + 2i & z = i \end{cases}$. Encuentre $\lim_{z\to i} f(z)$ y justifique su respuesta.

2.90. Verifique que $\displaystyle\lim_{z\to 1+i} \frac{z^2 - z + 1 - i}{z^2 - 2z + 2} = 1 - \frac{1}{2}i$.

2.91. Dé un valor que parezca adecuado para *a*) $\displaystyle\lim_{z\to 2+i} \frac{1-z}{1+z}$ y *b*) $\displaystyle\lim_{z\to 2+i} \frac{z^2 - 2iz}{z^2 + 4}$ e investigue si su respuesta es correcta.

2.92. Sean $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = B$. Compruebe que *a*) $\lim_{z\to z_0}\{2f(z) - 3ig(z)\} = 2A - 3iB$ y *b*) $\lim_{z\to z_0}\{pf(z) + qg(z)\} = pA + qB$, donde p y q son constantes.

2.93. Sea $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$. Demuestre que *a*) $\lim_{z\to z_0}\{f(z)\}^2 = A^2$, *b*) $\lim_{z\to z_0}\{f(z)\}^3 = A^3$. ¿Puede usted dar una expresión similar para $\lim_{z\to z_0}\{f(z)\}^n$? ¿Hay alguna restricción que se deba imponer?

www.FreeLibros.me

2.94. Evalúe las expresiones de los incisos siguientes con los teoremas sobre límites. En cada caso indique el teorema preciso que usa.

a) $\lim_{z\to 2i}(iz^4+3z^2-10i)$, *c*) $\lim\limits_{z\to i/2}\dfrac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2}$,

b) $\lim\limits_{z\to e^{\pi i/4}}\dfrac{z^2}{z^4+z+1}$, *d*) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{z^6+1}$ y *e*) $\lim\limits_{z\to 1+i}\left\{\dfrac{z-1-i}{z^2-2z+2}\right\}^2$

2.95. Encuentre $\lim\limits_{z\to e^{\pi i/3}}(z-e^{\pi i/3})\left(\dfrac{z}{z^3+1}\right)$.

2.96. Suponga que $f(z)=3z^2+2z$. Verifique que $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=6z_0+2$.

2.97. Sea $f(z)=\dfrac{2z-1}{3z+2}$. Compruebe que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\dfrac{7}{(3z_0+2)^2}$ siempre que $z_0\neq -2/3$.

2.98. Demuestre que, restringiéndose a la rama de $f(z)=\sqrt{z^2+3}$ para la que $f(0)=\sqrt{3}$,

$$\lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{z^2+3}-2}{z-1}=\frac{1}{2}$$

2.99. Explique lo que se quiere decir con las expresiones *a*) $\lim\limits_{z\to i}1/(z-i)^2=\infty$, *b*) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z^4+1}{z^4+1}=2$.

2.100. Muestre que *a*) $\lim_{z\to\pi/2}(\operatorname{sen} z)/z=2/\pi$ y *b*) $\lim_{z\to\pi i/2}z^2\cosh 4z/3=\pi^2/8$.

2.101. Muestre que, restringiéndose a la rama de $f(z)=\tanh^{-1}z$ en la que $f(0)=0$, $\lim_{z\to -i}f(z)=3\pi i/4$.

CONTINUIDAD

2.102. Sea $f(z)=\dfrac{z^2+4}{z-2i}$ si $z\neq 2i$, mientras que $f(2i)=3+4i$. *a*) Compruebe que existe $\lim_{z\to i}f(z)$ y determine su valor. *b*) ¿Es continua $f(z)$ en el punto $z=2i$? Explique. *c*) ¿Es continua $f(z)$ en los puntos $z\neq 2i$? Explique.

2.103. Resuelva el problema 2.102 si $f(2i)$ se redefine igual a $4i$ y explique por qué puede haber alguna diferencia.

2.104. Compruebe que $f(z)=z/(z^4+1)$ es continua en todos los puntos en el interior de la circunferencia $|z|=1$ y sobre la misma excepto en cuatro puntos, y determínelos.

2.105. Suponga que $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en $z=z_0$. Demuestre que $3f(z)-4ig(z)$ también es continua en $z=z_0$.

2.106. Suponga que $f(z)$ es continua en $z=z_0$. Verifique que *a*) $\{f(z)\}^2$ y *b*) $\{f(z)\}^3$ también son continuas en $z=z_0$. ¿Puede extenderse este resultado a $\{f(z)\}^n$, donde n es un entero positivo?

2.107. Encuentre todos los puntos de discontinuidad de las funciones siguientes.

a) $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2+2z+2}$, *b*) $f(z)=\dfrac{3z^2+4}{z^4-16}$, *c*) $f(z)=\cot z$, *d*) $f(z)=\dfrac{1}{z}-\sec z$ y *e*) $f(z)=\dfrac{\tanh z}{z^2+1}$.

2.108. Compruebe que $f(z)=z^2-2z+3$ es continua en todas las partes del plano finito.

2.109. Demuestre que $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^3+9}$ es *a*) continua y *b*) acotada en la región $|z|\leq 2$.

2.110. Verifique que si $f(z)$ es continua en una región cerrada, es acotada en esa región.

2.111. Compruebe que $f(z)=1/z$ es continua para toda z tal que $|z|>0$, pero que no es acotada.

2.112. Demuestre que un polinomio es continuo en todas las partes del plano finito.

2.113. Muestre que $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-3z+2}$ es continua para toda z en el exterior de $|z|=2$.

www.FreeLibros.me

CONTINUIDAD UNIFORME

2.114. Verifique que $f(z) = 3z - 2$ es uniformemente continua en la región $|z| \leq 10$.

2.115. Compruebe que $f(z) = 1/z^2$ *a*) no es uniformemente continua en la región $|z| \leq 1$, pero *b*) es uniformemente continua en la región $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$.

2.116. Demuestre que si $f(z)$ es continua en una región cerrada $\mathcal{R}$, es uniformemente continua en $\mathcal{R}$.

SUCESIONES Y SERIES

2.117. Verifique que *a*) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 i^n}{n^3+1} = 0$ y *b*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+3i} - \dfrac{in}{n+1}\right) = 1 - i$.

2.118. Compruebe que para todo número complejo z, $\lim_{n\to\infty} (1 + 3z/n^2) = 1$.

2.119. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n = 0$.

2.120. Verifique que $\lim_{n\to\infty} ni^n$ no existe.

2.121. Sea $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$. Compruebe que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. ¿Es verdadera la aseveración inversa? Justifique su conclusión.

2.122. Sean $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Demuestre que *a*) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$, *b*) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$, *c*) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$ y *d*) $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = A/B$ si $B \neq 0$.

2.123. Con los teoremas sobre límites, evalúe las expresiones de los incisos siguientes:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{in^2 - in + 1 - 3i}{(2n + 4i - 3)(n - i)}$ *c*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(n^2+3i)(n-i)}{in^3 - 3n + 4 - i}\right|$ *d*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\{\sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i}\}$

2.124. Sea $\lim_{n\to\infty} u_n = l$. Verifique que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = l$.

2.125. Compruebe que la serie $1 + i/3 + (i/3)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (i/3)^{n-1}$ converge y encuentre su suma.

2.126. Demuestre que la serie $i - 2i + 3i - di + \cdots$ diverge.

2.127. Suponga que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a A y que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge a B. Compruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$ converge a $A + iB$. ¿Es verdadera la aseveración inversa?

2.128. Investigue la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{5^{n/2}}$, donde $\omega = \sqrt{3} + i$.

PROBLEMAS MISCELÁNEOS

2.129. Sea $w = \{(4 - z)(z^2 + 4)\}^{1/2}$. Si $w = 4$ cuando $z = 0$, muestre que si z describe la curva C de la figura 2-32, entonces el valor de w en $z = 6$ es $-4i\sqrt{5}$.

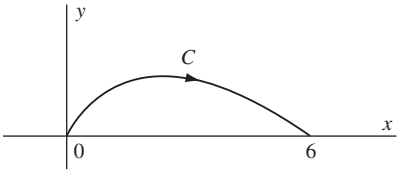


Figura 2-32

2.130. Verifique que una condición necesaria y suficiente para que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea continua en $z = z_0 = x_0 + iy_0$ es que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ sean continuas en (x_0, y_0).

2.131. Compruebe que la ecuación $\tan z = z$ únicamente tiene raíces reales.

2.132. Un estudiante observó que 1 elevado a cualquier potencia es igual a 1. ¿Es correcta la observación de este estudiante? Explique.

2.133. Muestre que $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{2^2} + \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{2^3} + \cdots = \dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{5 - 4\cos\theta}$.

2.134. Muestre que $f(z) = \operatorname{sen} z$ satisface la relación $|f(x + iy)| = |f(x) + f(iy)|$. ¿Puede encontrar otras funciones para las que esto sea cierto?

www.FreeLibros.me

2.135. Demuestre que $\lim_{z\to\infty} \dfrac{z^3 - 3z + 2}{z^4 + z^2 - 3z + 5} = 0$.

2.136. Compruebe que $|\csc z| \leq 2e/(e^2 - 1)$ si $|y| \geq 1$.

2.137. Muestre que $\operatorname{Re}\{\operatorname{sen}^{-1} z\} = \frac{1}{2}\{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}\}$.

2.138. Suponga que $f(z)$ es continua en una región cerrada y acotada $\mathcal{R}$. Verifique que

a) existe un número positivo M tal que para toda z en $\mathcal{R}$, $|f(z)| \leq M$ y

b) $|f(z)|$ tiene una *mínima cuota superior* μ en $\mathcal{R}$ y existe al menos un valor z_0 en $\mathcal{R}$ tal que $|f(z_0)| = \mu$.

2.139. Muestre que $|\tanh \pi(1 + i)/4| = 1$.

2.140. Compruebe que todos los valores de $(1 - i)^{\sqrt{2}i}$ se encuentran en una línea recta.

2.141. Evalúe *a*) $\cosh \pi i/2$ y *b*) $\tanh^{-1} \infty$.

2.142. Sea $z = u + iv$. Muestre que

$$u = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} \quad \text{y} \quad v = \frac{\operatorname{senh} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

2.143. Evalúe con una precisión de tres cifras decimales: *a*) e^{3-2i} y *b*) $\operatorname{sen}(5 - 4i)$.

2.144. Demuestre que $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{1 + i\tan(\theta/2)}{1 - i\tan(\theta/2)}\right\} = \cos\theta$, indique cualquier valor excepcional.

2.145. Sean $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = B \neq 0$. Verifique que $\lim_{z\to z_0} f(z)/g(z) = A/B$ sin demostrar primero que $\lim_{z\to z_0} 1/g(z) = 1/B$.

2.146. Sea $f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } |z| \text{ es irracional} \end{cases}$. Demuestre que para todos los valores de z, $f(z)$ es discontinua.

2.147. Suponga que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es continua en una región. Verifique que *a*) $\operatorname{Re}\{f(z)\} = u(x, y)$ y *b*) $\operatorname{Im}\{f(z)\} = v(x, y)$ son continuas en esa región.

2.148. Compruebe que todas las raíces de $z \tan z = k$, $k > 0$, son reales.

2.149. Demuestre que si existe el límite de una sucesión, éste es único.

2.150. *a*) Verifique que $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

b) Compruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ diverge, lo que demuestra que una serie cuyo n-ésimo término tiende a cero no necesariamente converge.

2.151. Sea $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + 1/z_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $-\pi/2 < \arg z_0 < \pi/2$. Verifique que $\lim_{z\to\infty} z_n = 1$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

2.47. *a*) $2, 4 + 4i$

2.48. *a*) i y *b*) $-1 - 2i$

2.49. *a*) $(2 + z)/(3 - 2z)$ y *b*) z

2.50. *a*) $-2, -i, 1 - i$ y *b*) $-i, (2 + i)/3$

2.53. *a*) $u = 2x^2 - 2y^2 + 3y$, $v = 4xy - 3x$

b) $u = x + x/(x^2 + y^2)$, $v = y - y/(x^2 + y^2)$

c) $u = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{(1 + x)^2 + y^2}$, $v = \dfrac{-2y}{(1 + x)^2 + y^2}$

d) $u = r^{1/2} \cos\theta/2$, $v = r^{1/2} \operatorname{sen}\theta/2$ donde $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$

www.FreeLibros.me

2.55. *a*) $e^{2\pi i/3}$ y *b*) $e^{4\pi i/3}$, 1, $e^{2\pi i/3}$

2.61. *a*) $2k\pi i/3$ y *b*) $(1/8)\pi i + (1/2)k\pi i$, donde $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

2.64. *a*) 7 y *b*) 26

2.68. *a*) $u = e^{-3y}\cos 3x$, $v = e^{-3y}\operatorname{sen} 3x$. *b*) $u = \cos x \cosh y$, $v = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$. *c*) $u = \operatorname{sen} 2x \cosh 2y$, $v = \cos 2x \operatorname{senh} 2y$ y *d*) $u = e^{2x}\{(x^2 - y^2)\cos 2y - 2xy \operatorname{sen} 2y\}$, $v = e^{2x}\{2xy \cos 2y + (x^2 - y^2)\operatorname{sen} 2y\}$.

2.72. *a*) $u = \operatorname{senh} 2x \cos 2y$, $v = \cosh 2x \operatorname{sen} 2y$
b) $u = x \cosh x \cos y - y \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$, $v = y \cosh x \cos y + x \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$

2.73. *a*) $2i\sqrt{3}$, *b*) 0 y *c*) i

2.74. *b*) $4\pi i/3$

2.75. *a*) $2\ln 2 + (\pi + 2k\pi)i$, $2\ln 2 + \pi i$. *b*) $\ln 3 + (\pi/2 + 2k\pi)i$, $\ln 3 + \pi i/2$. *c*) $\ln 2 + (11\pi/6 + 2k\pi)i$, $\ln 2 + 11\pi i/6$

2.79. *a*) $\pm\ln(2 + \sqrt{3}) + \pi/2 + 2k\pi$ y *b*) $-i\ln(\sqrt{2} + 1) + \pi/2 + 2k\pi$, $-i\ln(\sqrt{2} - 1) + 3\pi/2 + 2k\pi$

2.80. *a*) $\ln(\sqrt{2} + 1) + \pi i/2 + 2k\pi i$, $\ln(\sqrt{2} - 1) + 3\pi i/2 + 2k\pi i$

b) $\ln\left[(2k+1)\pi + \sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 1}\right] + \pi i/2 + 2m\pi i$,

$\ln\left[\sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 1} - (2k+1)\pi\right] + 3\pi i/2 + 2m\pi i$, $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2.81. *a*) $e^{-\pi/4 + 2k\pi}\left\{\cos\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\right\}$ y *b*) $\cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\operatorname{sen}(2\sqrt{2}k\pi)$

2.82. *a*) $e^{1/2\ln 2 - 7\pi/4 - 2k\pi}\cos\left(7\pi/4 + \frac{1}{2}\ln 2\right)$ y *b*) $e^{3\pi/2 + 2k\pi}$

2.94. *a*) $-12 + 6i$, *b*) $\sqrt{2}(1 + i)/2$, *c*) $-4/3 - 4i$, *d*) $1/3$ y *e*) $-1/4$

2.95. $1/6 - i\sqrt{3}/6$

2.104. $e^{(2k+1)\pi i/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$

2.107. *a*) $-1 \pm i$ *b*) $\pm 2, \pm 2i$ *c*) $k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *d*) $0, \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
e) $\pm i, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2.123. *a*) $\frac{1}{2}i$, *b*) 1, *c*) 0 y *d*) $\frac{1}{2}i$

2.125. $(9 + 3i)/10$

2.128. Converge

2.141. *a*) 0 y *b*) $(2k + 1)\pi i/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

www.FreeLibros.me

CAPÍTULO 3

Diferenciación compleja y ecuaciones de Cauchy-Riemann

3.1 DERIVADAS

Si $f(z)$ es unívoca en una región $\mathcal{R}$ del plano z, la *derivada* de $f(z)$ se define como

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{3.1}$$

siempre que este límite exista independientemente de la manera en que $\Delta z \to 0$. Si es así, se dice que $f(z)$ es *diferenciable* en z. En la definición dada en (3.1), también suele usarse h en lugar de Δz. Aunque diferenciabilidad implica continuidad, lo contrario no es verdad (vea el problema 3.4).

3.2 FUNCIONES ANALÍTICAS

Si la derivada $f'(z)$ existe en todos los puntos z de una región $\mathcal{R}$, se dice que $f(z)$ es *analítica en* $\mathcal{R}$ y se refiere a una *función analítica en* $\mathcal{R}$. Como sinónimos de analítica suelen usarse también los términos *regular* y *holomorfa.*

Se dice que una función $f(z)$ es *analítica en un punto* z_0 si existe una vecindad $|z - z_0| < \delta$ en la que para todos sus puntos exista $f'(z)$.

3.3 ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

Una condición necesaria para que $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en una región $\mathcal{R}$ es que, en $\mathcal{R}$, u y v satisfagan las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.2}$$

Si las derivadas parciales en (3.2) son continuas en $\mathcal{R}$, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones suficientes para que $f(z)$ sea analítica en $\mathcal{R}$. Vea el problema 3.5.

A las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ se les suele llamar *funciones conjugadas*. Dada una u que tenga primeras derivadas parciales continuas en una región simple conexa $\mathcal{R}$ (vea la sección 4.6), puede hallarse v (dentro de una constante aditiva arbitraria) tal que $u + iv = f(z)$ sea analítica (vea los problemas 3.7 y 3.8).

www.FreeLibros.me

3.4 FUNCIONES ARMÓNICAS

Si las segundas derivadas parciales de u y v respecto de x y y existen y son continuas en una región $\mathcal{R}$, entonces, de acuerdo con (3.2), se encuentra que (vea el problema 3.6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{3.3}$$

En estas condiciones se sigue que la parte real y la parte imaginaria de una función analítica satisfacen la *ecuación de Laplace*, que se denota

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y} = 0 \quad \text{o} \quad \nabla^2 \Psi = 0 \quad \text{donde } \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{3.4}$$

Al operador ∇^2 se le suele llamar *laplaciano.*

Funciones como $u(x, y)$ y $v(x, y)$ que satisfagan la ecuación de Laplace en una región $\mathcal{R}$ se denominan *funciones armónicas* y se dice que son *armónicas en* $\mathcal{R}$.

3.5 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Sea z_0 [figura 3-1] un punto P en el plano z y sea w_0 [figura 3-2] su imagen P' en el plano w mediante la transformación $w = f(z)$. Como se supone que $f(z)$ es unívoca, el punto z_0 se lleva a un solo punto w_0.

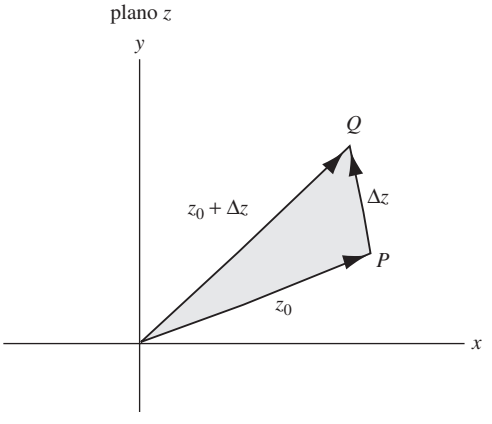


Figura 3-1

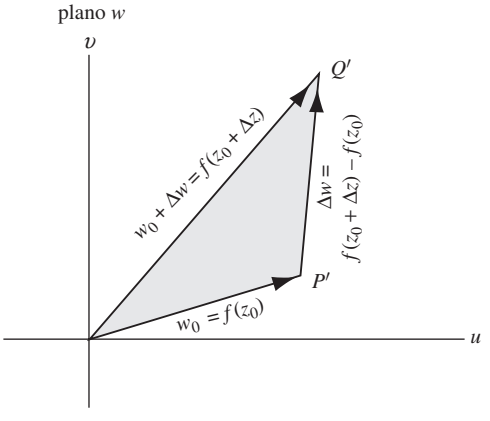


Figura 3-2

Si se incrementa z_0 en Δz se obtiene el punto Q de la figura 3-1. Este punto tiene como imagen Q' en el plano w. Por tanto, de acuerdo con la figura 3-2, se ve que $P'Q'$ representa el número complejo $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$. Se sigue que la derivada en z_0 (si existe) es

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{Q \to P} \frac{P'Q'}{PQ} \tag{3.5}$$

es decir, el límite del cociente de $P'Q'$ entre PQ cuando el punto Q tiende a P. Esta interpretación es sin duda válida si z_0 se sustituye por z.

www.FreeLibros.me

3.6 DIFERENCIALES

Sea $\Delta z = dz$ un incremento de z. Entonces

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) \tag{3.6}$$

es el incremento en $w = f(z)$. Si $f(z)$ es continua y tiene primera derivada continua en una región, entonces

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \epsilon\Delta z = f'(z)dz + \epsilon dz \tag{3.7}$$

donde $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta z \to 0$. A la expresión

$$dw = f'(z)dz \tag{3.8}$$

se le conoce como *diferencial de w o de* $f(z)$, o *parte principal* de Δw. Observe que, en general, $\Delta w \neq dw$. A dz se le conoce como *diferencial de z*.

A partir de las definiciones (3.1) y (3.8), suele escribirse

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{3.9}$$

Se debe resaltar que dz y dw no son los límites de Δz y Δw cuando $\Delta z \to 0$, pues estos límites son cero, mientras que dz y dw no son necesariamente cero. En cambio, dado dz, se determina dw de acuerdo con (3.8), es decir, dw es una variable dependiente determinada por la variable independiente dz para una z dada.

Es útil considerar a d/dz un *operador* que, cuando actúa sobre $w = f(z)$, produce $dw/dz = f'(z)$.

3.7 REGLAS DE DIFERENCIACIÓN

Suponga que $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$ son funciones analíticas de z. Entonces son válidas las siguientes reglas de diferenciación (idénticas a las del cálculo elemental).

1. $\dfrac{d}{dz}\{f(z) + g(z)\} = \dfrac{d}{dz}f(z) + \dfrac{d}{dz}g(z) = f'(z) + g'(z)$
2. $\dfrac{d}{dz}\{f(z) - g(z)\} = \dfrac{d}{dz}f(z) - \dfrac{d}{dz}g(z) = f'(z) - g'(z)$
3. $\dfrac{d}{dz}\{cf(z)\} = c\dfrac{d}{dz}f(z) = cf'(z)$ donde c es una constante
4. $\dfrac{d}{dz}\{f(z)g(z)\} = f(z)\dfrac{d}{dz}g(z) + g(z)\dfrac{d}{dz}f(z) = f(z)g'(z) + g(z)f'(z)$
5. $\dfrac{d}{dz}\left\{\dfrac{f(z)}{g(z)}\right\} = \dfrac{g(z)(d/dz)f(z) - f(z)(d/dz)g(z)}{[g(z)]^2} = \dfrac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$ si $g(z) \neq 0$
6. Si $w = f(\zeta)$ donde $\zeta = g(z)$, entonces

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = f'(\zeta)\frac{d\zeta}{dz} = f'\{g(z)\}g'(z) \tag{3.10}$$

De manera similar, si $w = f(\zeta)$ donde $\zeta = g(\eta)$ y $\eta = h(z)$, entonces

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dz} \tag{3.11}$$

Las expresiones en (3.10) y (3.11) se conocen como *regla de la cadena* para la diferenciación de funciones complejas.

7. Si $w = f(z)$ tiene una función inversa unívoca f^{-1}, entonces $z = f^{-1}(w)$, y dw/dz y dz/dw se relacionan mediante

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{dz/dw} \tag{3.12}$$

www.FreeLibros.me

8. Si $z = f(t)$ y $w = g(t)$, donde t es un parámetro, entonces

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw/dt}{dz/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \tag{3.13}$$

Pueden formularse reglas semejantes para los diferenciales. Por ejemplo,

$$d\{f(z) + g(z)\} = df(z) + dg(z) = f'(z)\,dz + g'(z)\,dz = \{f'(z) + g'(z)\}\,dz$$

$$d\{f(z)g(z)\} = f(z)dg(z) + g(z)df(z) = \{f(z)g'(z) + g(z)f'(z)\}\,dz$$

3.8 DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

En las fórmulas siguientes se supone que las funciones se definen como en el capítulo 2. En los casos de funciones con ramas, es decir, en los casos de funciones multivaluadas, la ramificación de la función a la derecha se elige de manera que coincida con la ramificación de la función a la izquierda. Observe que estas fórmulas son idénticas a las del cálculo elemental.

1. $\dfrac{d}{dz}(c) = 0$
2. $\dfrac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$
3. $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$
4. $\dfrac{d}{dz}a^z = a^z \ln a$
5. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \cos z$
6. $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\operatorname{sen} z$
7. $\dfrac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$
8. $\dfrac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z$
9. $\dfrac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z$
10. $\dfrac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z$
11. $\dfrac{d}{dz}\log_e z = \dfrac{d}{dz}\ln z = \dfrac{1}{z}$
12. $\dfrac{d}{dz}\log_a z = \dfrac{\log_a e}{z}$
13. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sen}^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
14. $\dfrac{d}{dz}\cos^{-1} z = \dfrac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$
15. $\dfrac{d}{dz}\tan^{-1} z = \dfrac{1}{1+z^2}$
16. $\dfrac{d}{dz}\cot^{-1} z = \dfrac{-1}{1+z^2}$
17. $\dfrac{d}{dz}\sec^{-1} z = \dfrac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$
18. $\dfrac{d}{dz}\csc^{-1} z = \dfrac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$
19. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{senh} z = \cosh z$
20. $\dfrac{d}{dz}\cosh z = \operatorname{senh} z$
21. $\dfrac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z$
22. $\dfrac{d}{dz}\coth z = -\operatorname{csch}^2 z$
23. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z$
24. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z$
25. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{senh}^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$
26. $\dfrac{d}{dz}\cosh^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$
27. $\dfrac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \dfrac{1}{1-z^2}$
28. $\dfrac{d}{dz}\coth^{-1} z = \dfrac{1}{1-z^2}$
29. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sech}^{-1} z = \dfrac{-1}{z\sqrt{1-z^2}}$
30. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1} z = \dfrac{-1}{z\sqrt{z^2+1}}$

www.FreeLibros.me

3.9 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si $w = f(z)$ es analítica en una región, su derivada está dada por $f'(z)$, w' o dw/dz. Si $f'(z)$ también es analítica en esa región, su derivada se denota $f''(z)$, w'' o $(d/dz)(dw/dz) = d^2w/dz^2$. De manera similar, la n-ésima derivada de $f(z)$, sí existe, se denota $f^{(n)}(z)$, $w^{(n)}$ o d^nw/dz^n, donde n se conoce como el *orden* de la derivada. Así, las derivadas de primero, segundo, tercer,... orden se denotan, respectivamente, $f'(z), f''(z), f'''(z), \ldots$. Estas derivadas de orden superior se calculan mediante aplicaciones sucesivas de las reglas de diferenciación dadas antes.

Uno de los teoremas más importantes, válido para funciones de una variable compleja y no necesariamente válido para funciones de una variable real, es el siguiente:

TEOREMA 3.1. Suponga que $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$. Entonces, también $f'(z), f''(z), \ldots$ son analíticas en $\mathcal{R}$, es decir, en $\mathcal{R}$ existen todas las derivadas de orden superior.

En el capítulo 5 se comprueba este importante teorema.

3.10 REGLA DE L'HOPITAL

Sean $f(z)$ y $g(z)$ analíticas en una región que contenga al punto z_0 y suponga que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ pero $g'(z_0) \neq 0$. Así, la *regla de L'Hopital* establece que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \tag{3.14}$$

En el caso de $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, la regla puede ampliarse. Vea los problemas 3.21 a 3.24.

Suele decirse que el lado izquierdo de la expresión en (3.14) tiene la "forma indeterminada" $0/0$, pero tal terminología suele generar confusión porque en general no hay nada indeterminado. Los límites representados por las llamadas formas indeterminadas ∞/∞, $0 \cdot \infty$, ∞°, 0°, 1^∞ y $\infty - \infty$ suelen evaluarse mediante modificaciones apropiadas de la regla de L'Hopital.

3.11 PUNTOS SINGULARES

Un punto en el que $f(z)$ no sea analítica se llama *punto singular* o *singularidad* de $f(z)$. Existen varios tipos de singularidades.

1. **Singularidades aisladas.** El punto $z = z_0$ es una *singularidad aislada* o un *punto singular aislado* de $f(z)$ si es posible hallar un $\delta > 0$ tal que el círculo $|z - z_0| = \delta$ no contenga ningún otro punto singular distinto de z_0 (es decir, si existe una vecindad agujerada δ de z_0 que no contenga ninguna singularidad). Si no es posible hallar un δ con estas características, se dice que z_0 es una *singularidad no aislada*.

   Si z_0 no es un punto singular y es posible hallar un $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| = \delta$ no contenga ningún punto singular, entonces z_0 es un *punto ordinario* de $f(z)$.

2. **Polos.** Si z_0 es una singularidad aislada y es posible hallar un entero positivo n tal que $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$, entonces $z = z_0$ es un *polo de orden n*. Si $n = 1$, z_0 es un *polo simple*.

   EJEMPLO 3.1

   a) $f(z) = 1/(z-2)^3$ tiene un polo de orden 3 en $z = 2$.
   b) $f(z) = (3z-2)/(z-1)^2(z+1)(z-4)$ tiene un polo de orden 2 en $z = 1$, y polos simples en $z = -1$ y $z = 4$.

   Si $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$, donde $f(z_0) \neq 0$ y n es un entero positivo, entonces a $z = z_0$ se le llama *cero de orden n* de $g(z)$. Si $n = 1$, z_0 se llama *cero simple*. En tal caso, z_0 es un polo de orden n de la función $1/g(z)$.

3. Los **puntos de ramificación** de funciones multivaluadas, ya vistos en el capítulo 2, son puntos singulares no aislados, pues una función multivaluada no es continua y, por tanto, no es analítica en una vecindad agujerada de un punto de ramificación.

www.FreeLibros.me

EJEMPLO 3.2

a) $f(z) = (z-3)^{1/2}$ tiene un punto de ramificación en $z = 3$.
b) $f(z) = \ln/(z^2 + z - 2)$ tiene puntos de ramificación donde $z^2 + z - 2 = 0$, es decir, en $z = 1$ y $z = -2$.

4. **Singularidades removibles.** Un punto singular aislado z_0 es una *singularidad removible* de $f(z)$ si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe. Al definir $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$ se muestra que $f(z)$ no sólo es continua en z_0, sino también analítica en z_0.

   EJEMPLO 3.3 El punto singular $z = 0$ es una singularidad removible de $f(z) = \operatorname{sen} z/z$, pues $\lim_{z\to 0} (\operatorname{sen} z/z) = 1$.

5. **Singularidades esenciales.** A una singularidad aislada que no es un polo o una singularidad removible se le llama *singularidad esencial*.

   EJEMPLO 3.4 $f(z) = e^{1/(z-2)}$ tiene una singularidad esencial en $z = 2$.

   Si una función tiene una singularidad aislada, esa singularidad es removible, es un polo o es una singularidad esencial. A esto se debe que a los polos se les suela llamar *singularidades no esenciales*. De manera equivalente, $z = z_0$ es una singularidad esencial si no es posible hallar un entero positivo n tal que $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$.

6. **Singularidades al infinito.** El tipo de singularidad de $f(z)$ en $z = \infty$ [el punto al infinito; vea las páginas 7 y 47] es el mismo que el de $f(1/w)$ en $w = 0$.

   EJEMPLO 3.5 La función $f(z) = z^3$ tiene un polo de orden 3 en $z = \infty$, pues $f(1/w) = 1/w^3$ tiene un polo de orden 3 en $w = 0$.

En el capítulo 6 se presentan métodos para clasificar singularidades con series infinitas.

3.12 FAMILIAS ORTOGONALES

Sea $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica, y $f'(z) \neq 0$. Entonces, las familias de curvas de un parámetro

$$u(x, y) = \alpha\,, \quad v(x, y) = \beta \tag{3.15}$$

donde α y β son constantes, son *ortogonales*, es decir, en el punto de intersección cada miembro de una familia [líneas continuas de la figura 3-3] es perpendicular a cada miembro de la otra familia [líneas punteadas de la figura 3-3]. Las correspondientes curvas imagen en el plano w, que son líneas paralelas a los ejes u y v, forman también familias ortogonales [vea la figura 3-4].

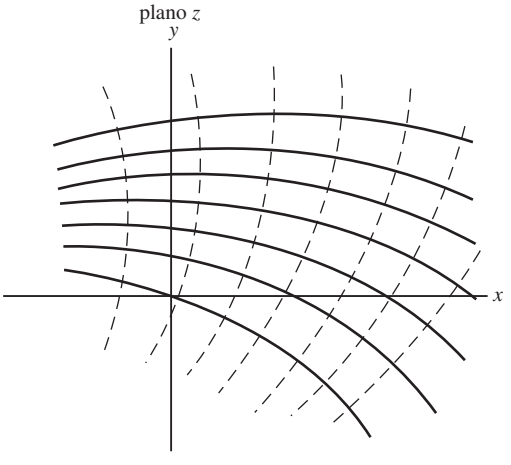


Figura 3-3

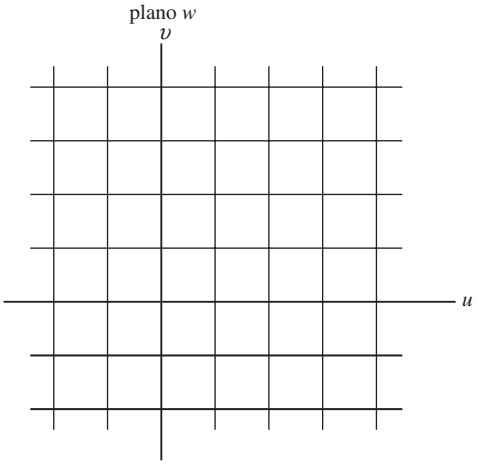


Figura 3-4

En vista de esto, puede pensarse que si la función de llevado $f(z)$ es analítica y $f'(z) \neq 0$, entonces el ángulo entre cualesquiera dos curvas C_1 y C_2 que se intersequen en el plano z será igual (en magnitud y en sentido) al ángulo entre las correspondientes curvas imagen C'_1 y C'_2 que se intersequen en el plano w. Esta conjetura es correcta y lleva

www.FreeLibros.me

al tema de las *transformaciones conformes*, tema de tanta importancia, desde el punto de vista teórico y de sus aplicaciones, que dos capítulos de este libro (8 y 9) abordan este tema.

3.13 CURVAS

Suponga que $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones reales de la variable real t, que se supone continua en $t_1 \leq t \leq t_2$. Así, las ecuaciones paramétricas

$$z = x + iy = \phi(t) + i\psi(t) = z(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 \tag{3.16}$$

definen una *curva continua* o *arco* en el plano z, que une los puntos $a = z(t_1)$ y $b = z(t_2)$ [vea la figura 3-5].

Si $t_1 \neq t_2$ pero $z(t_1) = z(t_2)$, es decir, $a = b$, los puntos terminales coinciden y se dice que la curva es *cerrada*. Una curva cerrada que en ninguna parte se interseque consigo misma se llama *curva cerrada simple*. Por ejemplo, la curva de la figura 3-6 es una curva cerrada simple, mientras que la de la figura 3-7 no lo es.

Si $\phi(t)$ y $\psi(t)$ [y por ende $z(t)$] tienen derivadas continuas en $t_1 \leq t \leq t_2$, se dice que la curva es una *curva suave* o un *arco suave*. A una curva compuesta de una cantidad infinita de arcos suaves se le llama *curva suave a trozos* o *contorno*. Por ejemplo, el borde de un cuadrado es una curva suave a trozos o contorno.

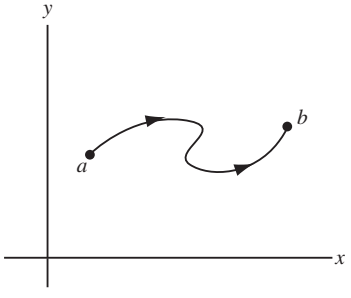


Figura 3-5

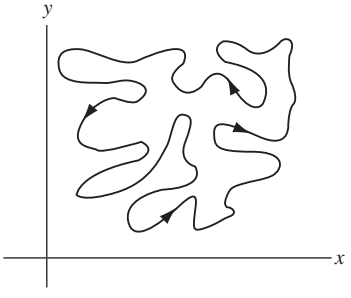


Figura 3-6

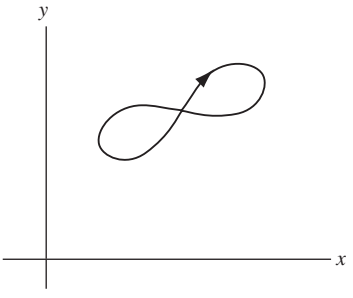


Figura 3-7

A menos que se especifique otra cosa, siempre que se hable de una curva simple cerrada se supondrá que es una curva suave a trozos.

3.14 APLICACIONES EN GEOMETRÍA Y MECÁNICA

A $z(t)$ se le puede considerar un vector posición cuyo punto terminal describe una curva C, en un determinado *sentido* o *dirección* a medida que t varía de t_1 a t_2. Si $z(t)$ y $z(t + \Delta t)$ representan los vectores posición de los puntos P y Q, respectivamente, entonces

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

es un vector en dirección de Δz [figura 3-8]. Si $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta z/\Delta t = dz/dt$ existe, este límite es un vector en dirección de la *tangente* a C en el punto P y está dado por

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$$

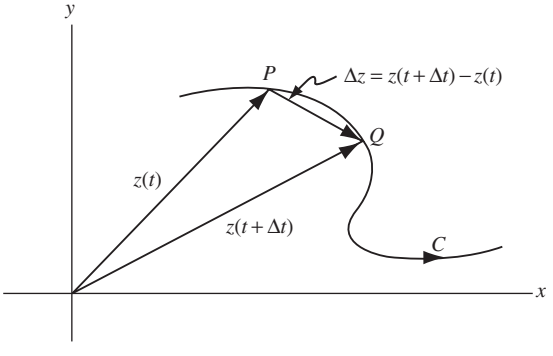


Figura 3-8

www.FreeLibros.me

Si t es tiempo, dz/dt representa la *velocidad* con que el extremo del vector posición describe la curva. De manera similar, d^2z/dt^2 representa su *aceleración* a lo largo de la curva.

3.15 OPERADORES DIFERENCIALES COMPLEJOS

Los operadores ∇ (*nabla*) y $\overline{\nabla}$ (*nabla barra*) se definen con

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \overline{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.17}$$

donde la equivalencia en términos de las coordenadas conjugadas z y $\bar{z}$ (página 7) se deriva del problema 3.32.

3.16 GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTOR Y LAPLACIANO

El operador ∇ permite definir las operaciones siguientes. En todos los casos, $F(x, y)$ se considera como una función real continua y diferenciable de x y y (un escalar), mientras que $A(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$ es una función compleja continua y diferenciable de x y y (un vector).

En términos de coordenadas conjugadas,

$$F(x, y) = F\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = G(z, \bar{z}) \quad \text{y} \quad A(x, y) = B(z, \bar{z})$$

1. **Gradiente.** El *gradiente* de una función real F (un escalar) se define como

$$\text{grad } F = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \tag{3.18}$$

Geométricamente, si $\nabla F \neq 0$, entonces ∇F representa un vector normal a la curva $F(x, y) = c$, en donde c es una constante (vea el problema 3.33).

De manera similar, el gradiente de una función compleja $A = P + iQ$ (un vector) se define como

$$\begin{aligned} \text{grad } A = \nabla A &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \tag{3.19}$$

En particular, si B es una función analítica de z, entonces $\partial B/\partial \bar{z} = 0$ y por tanto el gradiente es cero, es decir, $\partial P/\partial x = \partial Q/\partial y$, $\partial P/\partial y = -(\partial Q/\partial x)$, lo que muestra que, en este caso, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

2. **Divergencia.** Con la definición de producto punto de dos números complejos (página 7) extendida al caso de los operadores, la *divergencia* de una función compleja (un vector) se define como

$$\begin{aligned} \text{div } A = \nabla \cdot A = \text{Re}\{\overline{\nabla} A\} &= \text{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ)\right\} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2\ \text{Re}\left\{\frac{\partial B}{\partial z}\right\} \end{aligned} \tag{3.20}$$

De manera semejante se define la divergencia de una función real. Hay que observar que la divergencia de una función compleja o real (vector o escalar) es siempre una función real (escalar).

www.FreeLibros.me

3. **Rotor.** Con la definición de producto cruz de dos números complejos (página 7), el *rotor* de una función compleja se define como el vector

$$\nabla \times A = \left(0,\, 0,\, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

ortogonal al plano x-y y de magnitud

$$|\text{rot } A| = |\nabla \times A| = |\text{Im}\{\nabla \overline{A}\}| = \left|\text{Im}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ)\right\}\right|$$

$$= \left|\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right| = \left|2\ \text{Im}\left\{\frac{\partial B}{\partial z}\right\}\right| \tag{3.21}$$

4. **Laplaciano.** El *operador laplaciano* se define como el producto punto o producto escalar de ∇ consigo mismo, es decir,

$$\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \text{Re}\{\overline{\nabla}\nabla\} = \text{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \tag{3.22}$$

Observe que si A es analítica, $\nabla^2 A = 0$, de manera que $\nabla^2 P = 0$ y $\nabla^2 Q = 0$, es decir, P y Q son armónicas.

ALGUNAS IDENTIDADES RELACIONADAS CON EL GRADIENTE, LA DIVERGENCIA Y EL ROTOR

Suponga que A_1, A_2 y A son funciones diferenciables. Entonces se tienen las identidades siguientes:

1. $\text{grad}(A_1 + A_2) = \text{grad } A_1 + \text{grad } A_2$
2. $\text{div}(A_1 + A_2) = \text{div } A_1 + \text{div } A_2$
3. $\text{rot}\,(A_1 + A_2) = \text{rot } A_1 + \text{rot } A_2$
4. $\text{grad}(A_1 A_2) = (A_1)(\text{grad } A_2) + (\text{grad } A_1)(A_2)$
5. $|\text{rot grad } A| = 0$ si A es real o, de manera más general, si $\text{Im}\{A\}$ es armónica.
6. $\text{div grad } A = 0$ si A es imaginaria o, de manera más general, si $\text{Re}\{A\}$ es armónica.

PROBLEMAS RESUELTOS

DERIVADAS

3.1. Con la definición, encuentre la derivada de $w = f(z) = z^3 - 2z$ en el punto en el que *a*) $z = z_0$, *b*) $z = -1$.

Solución

a) De acuerdo con la definición, la derivada en $z = z_0$ es

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta_z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^3 - 2(z_0 + \Delta z) - \{z_0^3 - 2z_0\}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^3 + 3z_0^2\Delta z + 3z_0(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - 2z_0 - 2\Delta z - z_0^3 + 2z_0}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} 3z_0^2 + 3z_0\Delta z + (\Delta z)^2 - 2 = 3z_0^2 - 2$$

En general, $f'(z) = 3z^2 - 2$ para toda z.

b) De acuerdo con el inciso *a*), o directamente, se encuentra que si $z_0 = -1$, entonces $f'(-1) = 3(-1)^2 - 2 = 1$.

www.FreeLibros.me

3.2. Muestre que $(d/dz)\bar{z}$ no existe en ninguna parte, es decir, $f(z) = \bar{z}$ no es analítica en ninguna parte.

Solución

Por definición,

$$\frac{d}{dz}f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

si este límite existe independientemente de la manera como $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tienda a cero.

Entonces

$$\frac{d}{dz}\bar{z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\overline{x + iy + \Delta x + i\Delta y} - \overline{x + iy}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{x - iy + \Delta x - i\Delta y - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

Si $\Delta y = 0$, el límite buscado es

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Si $\Delta x = 0$, el límite buscado es

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$$

Entonces, como el límite depende de la manera como $\Delta z \to 0$, la derivada no existe, es decir, $f(z) = \bar{z}$ *no* es *analítica* en ninguna parte.

3.3. Dada $w = f(z) = (1 + z)/(1 - z)$, encuentre *a*) dw/dz y *b*) determine dónde no es analítica $f(z)$.

Solución

a) ***Método 1.*** Con la definición

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{1 + (z + \Delta z)}{1 - (z + \Delta z)} - \dfrac{1 + z}{1 - z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2}{(1 - z - \Delta z)(1 - z)} = \frac{2}{(1 - z)^2}$$

independientemente de la manera como $\Delta z \to 0$, siempre que $z \neq 1$.

Método 2. Con las reglas de diferenciación. De acuerdo con la regla del cociente [vea el problema 3.10 *c*)], si $z \neq 1$,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) = \frac{(1 - z)\dfrac{d}{dz}(1 + z) - (1 + z)\dfrac{d}{dz}(1 - z)}{(1 - z)^2} = \frac{(1 - z)(1) - (1 + z)(-1)}{(1 - z)^2} = \frac{2}{(1 - z)^2}$$

b) La función $f(z)$ es analítica para todos los valores finitos de z, excepto para $z = 1$, punto en el que la derivada no existe y la función no es analítica. El punto $z = 1$ es un *punto singular* de $f(z)$.

3.4. *a*) Si $f(z)$ es analítica en z_0, compruebe que entonces es continua en z_0.

b) Dé un ejemplo que muestre que lo contrario de lo que se dice en el inciso *a*) no necesariamente es verdad.

www.FreeLibros.me

Solución

a) Como

$$f(z_0+h)-f(z_0)=\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\cdot h$$

donde $h=\Delta z\neq 0$, se tiene

$$\lim_{h\to 0} f(z_0+h)-f(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h=f'(z_0)\cdot 0=0$$

porque, por hipótesis, $f'(z_0)$ existe. Por tanto,

$$\lim_{h\to 0} f(z_0+h)-f(z_0)=0 \qquad \text{o} \qquad \lim_{h\to 0} f(z_0+h)=f(z_0)$$

lo que muestra que $f(z)$ es continua en z_0.

b) La función $f(z)=\bar{z}$ es continua en z_0. Sin embargo, de acuerdo con el problema 3.2, $f(z)$ no es continua en ninguna parte. Esto muestra que una función que sea continua no necesariamente tiene derivada, es decir, no necesariamente es analítica.

ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

3.5. Demuestre que una condición *a*) necesaria y *b*) suficiente para que $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ sea analítica en una región $\mathcal{R}$ es que en esa región $\mathcal{R}$ se satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\partial u/\partial x=\partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y=-(\partial v/\partial x)$, donde se supone que estas derivadas parciales son continuas en $\mathcal{R}$.

Solución

a) *Necesidad*. Para que $f(z)$ sea analítica, el límite

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}&=f'(z)\\ &=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)\}-\{u(x,y)+iv(x,y)\}}{\Delta x+i\Delta y}\end{aligned}\tag{1}$$

debe existir independientemente de la manera en la que Δz (o Δx y Δy) tiendan a cero. Se considerarán dos aproximaciones posibles.

Caso 1. $\Delta y=0$, $\Delta x\to 0$. En este caso, (1) se convierte en

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\left[\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right]\right\}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

siempre que existan las derivadas parciales.

Caso 2. $\Delta x=0$, $\Delta y\to 0$. En este caso, (1) se convierte en

$$\lim_{\Delta y\to 0}\left\{\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}\right\}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

Pero $f(z)$ no puede ser analítica a menos que estos dos límites sean idénticos. Por tanto, una condición necesaria para que $f(z)$ sea analítica es que

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

b) *Suficiencia.* Como se supone que $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ son continuas, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta u&=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)\\ &=\{u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y+\Delta y)\}+\{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)\}\\ &=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\epsilon_1\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\eta_1\right)\Delta y=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\epsilon_1\Delta x+\eta_1\Delta y\end{aligned}$$

www.FreeLibros.me

donde $\epsilon_1 \to 0$ y $\eta_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

De igual manera, como se supone que $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ son continuas, se tiene

$$\Delta v = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \epsilon_2\right)\Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \eta_2\right)\Delta y = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \epsilon_2 \Delta x + \eta_2 \Delta y$$

donde $\epsilon_2 \to 0$ y $\eta_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Entonces,

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + \epsilon \Delta x + \eta \Delta y \tag{2}$$

donde $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2 \to 0$ y $\eta = \eta_1 + i\eta_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

De acuerdo con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, (2) se expresa como

$$\begin{aligned}\Delta w &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y + \epsilon \Delta x + \eta \Delta y \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \epsilon \Delta x + \eta \Delta y\end{aligned}$$

Al dividir entre $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ y tomar el límite cuando $\Delta z \to 0$, se ve que

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

de manera que la derivada existe y es única, es decir, $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

3.6. Sea $f(z) = u + iv$ una función analítica en una región $\mathcal{R}$. Compruebe que u y v son armónicas en $\mathcal{R}$ si tienen segundas derivadas parciales continuas en $\mathcal{R}$.

Solución

Si $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

se satisfacen en $\mathcal{R}$. Si se supone que u y v tienen segundas derivadas parciales continuas, ambos lados de (1) se diferencian respecto a y y ambos lados de (2) respecto a x para obtener

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \tag{3}$$

y

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4}$$

de donde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

es decir, u es armónica.

www.FreeLibros.me

De manera semejante, al diferenciar ambos lados de (1) respecto a y, y ambos lados de (2) respecto a x, se encuentra que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

por lo que v es armónica.

Más adelante (capítulo 5) se mostrará que si $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$, todas sus derivadas existen y son continuas en $\mathcal{R}$. Por tanto, no serán necesarios los supuestos anteriores.

3.7. *a*) Demuestre que $u = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y)$ es armónica.

b) Encuentre v tal que $f(z) = u + iv$ sea analítica.

Solución

a)
$$\frac{\partial u}{\partial x} = (e^{-x})(\operatorname{sen} y) + (-e^{-x})(x \operatorname{sen} y - y \cos y) = e^{-x} \operatorname{sen} y - xe^{-x} \operatorname{sen} y + ye^{-x} \cos y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{-x} \operatorname{sen} y - xe^{-x} \operatorname{sen} y + ye^{-x} \cos y) = -2e^{-x} \operatorname{sen} y + xe^{-x} \operatorname{sen} y - ye^{-x} \cos y \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(x \cos y + y \operatorname{sen} y - \cos y) = xe^{-x} \cos y + ye^{-x} \operatorname{sen} y - e^{-x} \cos y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{-x} \cos y + ye^{-x} \operatorname{sen} y - e^{-x} \cos y) = -xe^{-x} \operatorname{sen} y + 2e^{-x} \operatorname{sen} y + ye^{-x} \cos y \tag{2}$$

Se suman (1) y (2) para obtener $(\partial^2 u/\partial x^2) + (\partial^2 u/\partial y^2) = 0$, por lo que u es armónica.

b) De acuerdo con las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x} \operatorname{sen} y - xe^{-x} \operatorname{sen} y + ye^{-x} \cos y \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x} \cos y - xe^{-x} \cos y - ye^{-z} \operatorname{sen} y \tag{4}$$

Se integra (3) respecto a y, manteniendo x constante. Entonces,

$$\begin{aligned} v &= -e^{-x} \cos y + xe^{-x} \cos y + e^{-x}(y \operatorname{sen} y + \cos y) + F(x) \\ &= ye^{-x} \operatorname{sen} y + xe^{-x} \cos y + F(x) \end{aligned} \tag{5}$$

donde $F(x)$ es una función real arbitraria de x.

Se sustituye (5) en (4) y se obtiene

$$-ye^{-x} \operatorname{sen} y - xe^{-x} \cos y + e^{-x} \cos y + F'(x) = -ye^{-x} \operatorname{sen} y - xe^{-x} \cos y - ye^{-x} \operatorname{sen} y$$

o $F'(x) = 0$, y $F(x) = c$, una constante. Entonces, de acuerdo con (5),

$$v = e^{-x}(y \operatorname{sen} y + x \cos y) + c$$

En el problema 3.40 se presenta otro método.

3.8. En el problema 3.7, encuentre $f(z)$.

Solución

Método 1

Se tiene $$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

www.FreeLibros.me

Con $y = 0$ $\qquad f(x) = u(x, 0) + iv(x, 0).$

Se sustituye x por z, $\qquad f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0).$

Entonces, de acuerdo con el problema 3.7, $u(z, 0) = 0$, $v(z, 0) = ze^{-z}$ y por tanto $f(z) = u(z, 0), + iv(z,0) = ize^{-z}$ salvo una constante aditiva arbitraria.

Método 2

Salvo una constante aditiva arbitraria, de acuerdo con los resultados del problema 3.7,

$$\begin{aligned} f(z) = u + iv &= e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y) + ie^{-x}(y \operatorname{sen} y + x \cos y) \\ &= e^{-x}\left\{x\left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\right) - y\left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\right)\right\} + ie^{-x}\left\{y\left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\right) + x\left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\right)\right\} \\ &= i(x + iy)e^{-(x+iy)} = ize^{-z} \end{aligned}$$

Método 3

Se tiene $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$. Entonces, al sustituir en $u(x, y) + iv(x, y)$, se encuentra, después de un tedioso trabajo, que $\bar{z}$ desaparece y queda ize^{-z}.

En general, cuando se conocen u y v, se prefiere el método 1 a los métodos 2 y 3. Si sólo se conoce u (o v), se usa otro método que se presenta en el problema 3.101.

DIFERENCIALES

3.9. Dada $w = f(z) = z^3 - 2z^2$, encuentre: *a*) Δw, *b*) dw y *c*) $\Delta w - dw$.

Solución

a) $$\begin{aligned} \Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) &= \left\{(z + \Delta z)^3 - 2(z + \Delta z)^2\right\} - \left\{z^3 - 2z^2\right\} \\ &= z^3 + 3z^2\Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - 2z^2 - 4z\Delta z - 2(\Delta z)^2 - z^3 + 2z^2 \\ &= (3z^2 - 4z)\Delta z + (3z - 2)(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 \end{aligned}$$

b) dw es la parte principal de $\Delta w = (3z^2 - 4z)\Delta z = (3z^2 - 4z)\, dz$, pues, por definición, $\Delta z = dz$. Observe que $f'(z) = 3z^2 - 4z$ y $dw = (3z^2 - 4z)\, dz$, es decir, $dw/dz = 3z^2 - 4z$.

c) De acuerdo con los incisos *a*) y *b*), $\Delta w - dw = (3z - 2)(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 = \epsilon\Delta z$, donde $\epsilon = (3z - 2)\Delta z + (\Delta z)^2$. Observe que $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta z \to 0$, es decir, $(\Delta w - dw)/\Delta z \to 0$. Se sigue que $\Delta w - dw$ es un infinitesimal de orden superior a Δz.

REGLAS DE DIFERENCIACIÓN. DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

3.10. Demuestre lo siguiente suponiendo que $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en una región $\mathcal{R}$.

a) $$\frac{d}{dz}\{f(z) + g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) + \frac{d}{dz}g(z)$$

b) $$\frac{d}{dz}\{f(z)g(z)\} = f(z)\frac{d}{dz}g(z) + g(z)\frac{d}{dz}f(z)$$

c) $$\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z)\dfrac{d}{dz}f(z) - f(z)\dfrac{d}{dz}g(z)}{[g(z)]^2} \qquad \text{si } g(z) \neq 0$$

www.FreeLibros.me

Solución

a) $$\frac{d}{dz}\{f(z)+g(z)\} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)+g(z+\Delta z)-\{f(z)+g(z)\}}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} + \lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}$$
$$= \frac{d}{dz}f(z)+\frac{d}{dz}g(z)$$

b) $$\frac{d}{dz}\{f(z)g(z)\} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z)-f(z)g(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)\{g(z+\Delta z)-g(z)\}+g(z)\{f(z+\Delta z)-f(z)\}}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}f(z+\Delta z)\left\{\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}\right\} + \lim_{\Delta z\to 0}g(z)\left\{\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\right\}$$
$$= f(z)\frac{d}{dz}g(z)+g(z)\frac{d}{dz}f(z)$$

Observe que se aprovechó que $\lim_{\Delta z\to 0} f(z+\Delta z) = f(z)$, que es consecuencia de que $f(z)$ sea analítica y por ende continua (vea el problema 3.4).

Otro método

Sean $U = f(z)$, $V = g(z)$. Entonces, $\Delta U = f(z+\Delta z) - f(z)$ y $\Delta V = g(z+\Delta z) - g(z)$, es decir, $f(z+\Delta z) = U + \Delta U$, $g(z+\Delta z) = V + \Delta V$. Por tanto,

$$\frac{d}{dz}UV = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(U+\Delta U)(V+\Delta V)-UV}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{U\Delta V + V\Delta U + \Delta U\Delta V}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}\left(U\frac{\Delta V}{\Delta z} + V\frac{\Delta U}{\Delta z} + \frac{\Delta U}{\Delta z}\Delta V\right) = U\frac{dV}{dz} + V\frac{dU}{dz}$$

donde se observa que $\Delta V \to 0$ cuando $\Delta z \to 0$, pues se supone que V es analítica y, por tanto, continua.

Para comprobar *a*) también sirve un procedimiento similar.

c) Se usa el segundo método del inciso *b*). Así,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{U}{V}\right) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left\{\frac{U+\Delta U}{V+\Delta V} - \frac{U}{V}\right\} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{V\Delta U - U\Delta V}{\Delta z(V+\Delta V)V}$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{(V+\Delta V)V}\left\{V\frac{\Delta U}{\Delta z} - U\frac{\Delta V}{\Delta z}\right\} = \frac{V(dU/dz) - U(dV/dz)}{V^2}$$

También puede usarse el primer método del inciso *b*).

3.11. Demuestre que *a*) $(d/dz)e^z = e^z$, *b*) $(d/dz)e^{az} = ae^{az}$, donde a es una constante cualquiera.

Solución

a) Por definición, $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = u + iv$ o $u = e^x \cos y$, $v = e^x \operatorname{sen} y$.

Como $\partial u/\partial x = e^x \cos y = \partial v/\partial y$ y $\partial v/\partial x = e^x \operatorname{sen} y = -(\partial u/\partial y)$, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Entonces, de acuerdo con el problema 3.5, la derivada buscada existe y es igual a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^z$$

www.FreeLibros.me

b) Sea $w = e^{\zeta}$, donde $\zeta = az$. Entonces, de acuerdo con el inciso *a*) y con el problema 3.39,

$$\frac{d}{dz}e^{az} = \frac{d}{dz}e^{\zeta} = \frac{d}{d\zeta}e^{\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = e^{\zeta}\cdot a = ae^{az}$$

Puede procederse, también, como en el inciso *a*).

3.12. Compruebe que: *a*) $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \cos z$, *b*) $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\operatorname{sen} z$ y *c*) $\dfrac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$.

Solución

a) Se tiene $w = \operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x\cosh y + i\cos x\operatorname{senh} y$. Entonces,

$$u = \operatorname{sen} x\cosh y, \quad v = \cos x\operatorname{senh} y$$

Ahora $\partial u/\partial x = \cos x\cosh y = \partial v/\partial y$ y $\partial v/\partial x = -\operatorname{sen} x\operatorname{senh} y = -(\partial u/\partial y)$, de manera que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por tanto, de acuerdo con el problema 3.5, la derivada buscada es igual a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x\cosh y - i\operatorname{sen} x\operatorname{senh} y = \cos(x+iy) = \cos z$$

Otro método

Como $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, con el problema 3.11*b*), se tiene

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\frac{d}{dz}e^{iz} - \frac{1}{2i}\frac{d}{dz}e^{-iz} = \frac{1}{2}e^{iz} + \frac{1}{2}e^{-iz} = \cos z$$

b)
$$\frac{d}{dz}\cos z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}e^{iz} + \frac{1}{2}\frac{d}{dz}e^{-iz}$$
$$= \frac{i}{2}e^{iz} - \frac{i}{2}e^{-iz} = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\operatorname{sen} z$$

También sirve el primer método del inciso *a*).

c) De acuerdo con la regla del cociente del problema 3.10*c*), se tiene

$$\frac{d}{dz}\tan z = \frac{d}{dz}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}\right) = \frac{\cos z\dfrac{d}{dz}\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} z\dfrac{d}{dz}\cos z}{\cos^2 z}$$
$$= \frac{(\cos z)(\cos z) - (\operatorname{sen} z)(-\operatorname{sen} z)}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$$

3.13. Demuestre que $\dfrac{d}{dz}z^{1/2} = \dfrac{1}{2z^{1/2}}$, observando que $z^{1/2}$ es una función multivaluada.

Solución

Para que una función tenga derivada, debe ser unívoca. Por tanto, como $z^{1/2}$ es una función multivaluada (en este caso con dos valores), es necesario restringirse primero a una rama y después a la otra.

Caso 1

Considere primero la rama $w = z^{1/2}$ en la que $w = 1$, donde $z = 1$. En este caso, $w^2 = z$, de manera que

$$\frac{dz}{dw} = 2w \quad \text{y entonces } \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2w} \quad \text{o} \quad \frac{d}{dz}z^{1/2} = \frac{1}{2z^{1/2}}$$

www.FreeLibros.me

Caso 2

Después se considera la rama $w = z^{1/2}$ en la que $w = -1$, donde $z = 1$. En este caso también $w^2 = z$, de manera que

$$\frac{dz}{dw} = 2w \quad \text{y entonces} \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2w} \quad \text{o} \quad \frac{d}{dz}z^{1/2} = \frac{1}{2z^{1/2}}$$

En ambos casos se tiene $(d/dz)z^{1/2} = 1/(2z^{1/2})$. Observe que en el punto de ramificación $z = 0$ no existe la derivada. En general, en un punto de ramificación una función no tiene derivada, es decir, no es analítica. Así, los puntos de ramificación son puntos singulares.

3.14. Compruebe que $\dfrac{d}{dz}\ln z = \dfrac{1}{z}$.

Solución

Sea $w = \ln z$. Entonces, $z = e^w$ y $dz/dw = e^w = z$. Por tanto,

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{dz/dw} = \frac{1}{z}$$

Observe que esto es válido sin importar la rama de $\ln z$ de que se trate. Observe también que la derivada no existe en el punto de ramificación $z = 0$, lo que ilustra la observación al final del problema 3.13.

3.15. Demuestre que $\dfrac{d}{dz}\ln f(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

Solución

Sea $w = \ln \zeta$, donde $\zeta = f(z)$. Entonces,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

3.16. Verifique que *a*) $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sen}^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, *b*) $\dfrac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \dfrac{1}{1-z^2}$.

Solución

a) Si se considera la rama principal de $\operatorname{sen}^{-1} z$, de acuerdo con el problema 2.22 y con el problema 3.15, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\operatorname{sen}^{-1} z &= \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\right\} = \frac{1}{i}\frac{d}{dz}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\Big/\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\\ &= \frac{1}{i}\left\{i+\frac{1}{2}(1-z^2)^{-1/2}(-2z)\right\}\Big/\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\\ &= \left(1+\frac{iz}{\sqrt{1-z^2}}\right)\Big/\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\end{aligned}$$

Esto también es verdadero si se consideran otras ramas.

b) Al considerar la rama principal, se tiene

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{2}\ln(1+z) - \frac{1}{2}\ln(1-z)$$

www.FreeLibros.me

Así,

$$\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\ln(1+z) - \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\ln(1-z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z^2}$$

Observe que en los incisos *a*) y *b*), en los puntos de ramificación $z = \pm 1$, no existe la derivada.

3.17. Con las reglas de diferenciación, encuentre la derivada de las expresiones en los incisos siguientes:

a) $\cos^2(2z+3i)$, *b*) $z\tan^{-1}(\ln z)$, *c*) $\{\tanh^{-1}(iz+2)\}^{-1}$ y *d*) $(z-3i)^{4z+2}$.

Solución

a) Sea $\eta = 2z+3i$, $\zeta = \cos\eta$, $w = \zeta^2$ de donde $w = \cos^2(2z+3i)$. Entonces, según la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{dz} = (2\zeta)(-\operatorname{sen}\eta)(2) = (2\cos\eta)(-\operatorname{sen}\eta)(2) = -4\cos(2z+3i)\operatorname{sen}(2z+3i)$$

Otro método

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\{\cos(2z+3i)\}^2 &= 2\{\cos(2z+3i)\}\left\{\frac{d}{dz}\cos(2z+3i)\right\}\\ &= 2\{\cos(2z+3i)\}\{-\operatorname{sen}(2z+3i)\}\left\{\frac{d}{dz}(2z+3i)\right\}\\ &= -4\cos(2z+3i)\operatorname{sen}(2z+3i)\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\{(z)[\tan^{-1}(\ln z)]\} &= z\frac{d}{dz}[\tan^{-1}(\ln z)] + [\tan^{-1}(\ln z)]\frac{d}{dz}(z)\\ &= z\left\{\frac{1}{1+(\ln z)^2}\right\}\frac{d}{dz}(\ln z) + \tan^{-1}(\ln z) = \frac{1}{1+(\ln z)^2} + \tan^{-1}(\ln z)\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\{\tanh^{-1}(iz+2)\}^{-1} &= -1\{\tanh^{-1}(iz+2)\}^{-2}\frac{d}{dz}\{\tanh^{-1}(iz+2)\}\\ &= -\{\tanh^{-1}(iz+2)\}^{-2}\left\{\frac{1}{1-(iz+2)^2}\right\}\frac{d}{dz}(iz+2)\\ &= \frac{-i\{\tanh^{-1}(iz+2)\}^{-2}}{1-(iz+2)^2}\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left\{(z-3i)^{4z+2}\right\} &= \frac{d}{dz}\left\{e^{(4z+2)\ln(z-3i)}\right\} = e^{(4z+2)\ln(z-3i)}\frac{d}{dz}\{(4z+2)\ln(z-3i)\}\\ &= e^{(4z+2)\ln(z-3i)}\left\{(4z+2)\frac{d}{dz}[\ln(z-3i)] + \ln(z-3i)\frac{d}{dz}(4z+2)\right\}\\ &= e^{(4z+2)\ln(z-3i)}\left\{\frac{4z+2}{z-3i} + 4\ln(z-3i)\right\}\\ &= (z-3i)^{4z+1}(4z+2) + 4(z-3i)^{4z+2}\ln(z-3i)\end{aligned}$$

3.18. Suponga que $w^3 - 3z^2w + 4\ln z = 0$. Encuentre dw/dz.

Solución

Se diferencia respecto de z y se considera a w función implícita de z, para tener

$$\frac{d}{dz}(w^3) - 3\frac{d}{dz}(z^2w) + 4\frac{d}{dz}(\ln z) = 0 \quad \text{o} \quad 3w^2\frac{dw}{dz} - 3z^2\frac{dw}{dz} - 6zw + \frac{4}{z} = 0$$

Después se despeja dw/dz y se obtiene $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{6zw - 4/z}{3w^2 - 3z^2}$.

www.FreeLibros.me

3.19. Dadas $w = \operatorname{sen}^{-1}(t-3)$ y $z = \cos(\ln t)$, encuentre dw/dz.

Solución

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw/dt}{dz/dt} = \frac{1/\sqrt{1-(t-3)^2}}{-\operatorname{sen}(\ln t)(1/t)} = -\frac{t}{\operatorname{sen}(\ln t)\sqrt{1-(t-3)^2}}$$

3.20. En el problema 3.18, encuentre d^2w/dz^2.

Solución

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{6zw-4/z}{3w^2-3z^2}\right)$$
$$= \frac{(3w^2-3z^2)(6z\,dw/dz+6w+4/z^2)-(6zw-4/z)(6w\,dw/dz-6z)}{(3w^2-3z^2)^2}$$

El resultado buscado se encuentra al sustituir el valor de dw/dz del problema 3.18 y simplificar.

REGLA DE L'HOPITAL

3.21. Suponga que $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ que contiene al punto z_0. Compruebe que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \eta(z-z_0)$$

donde $\eta \to 0$ cuando $z \to z_0$.

Solución

Sea $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) = \eta$, de manera que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \eta(z-z_0)$$

Así, como $f(z)$ es analítica en z_0, se obtiene, como se buscaba,

$$\lim_{z\to z_0} \eta = \lim_{z\to z_0}\left\{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right\} = f'(z_0) - f'(z_0) = 0$$

3.22. Suponga que $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en z_0 y $f(z_0) = g(z_0) = 0$, pero $g'(z_0) \neq 0$. Demuestre que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Solución

De acuerdo con el problema 3.21, y al aprovechar que $f(z_0) = g(z_0) = 0$,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \eta_1(z-z_0) = f'(z_0)(z-z_0) + \eta_1(z-z_0)$$
$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \eta_2(z-z_0) = g'(z_0)(z-z_0) + \eta_2(z-z_0)$$

donde $\lim_{z\to z_0}\eta_1 = \lim_{z\to z_0}\eta_2 = 0$. Entonces, como se buscaba,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{\{f'(z_0)+\eta_1\}(z-z_0)}{\{g'(z_0)+\eta_2\}(z-z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

www.FreeLibros.me

Otro método

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\Big/\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$
$$=\left(\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right)\Big/\left(\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\right)=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

3.23. Evalúe *a*) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^{10}+1}{z^6+1}$, *b*) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ y *c*) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{\operatorname{sen} z^2}$.

Solución

a) Sea $f(z)=z^{10}+1$ y $g(z)=z^6+1$. Entonces, $f(i)=g(i)=0$. Además, $f(z)=g(z)$ son analíticas en $z=i$. Por tanto, de acuerdo con la regla de L'Hopital,

$$\lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^6+1}=\lim_{z\to i}\frac{10z^9}{6z^5}=\lim_{z\to i}\frac{5}{3}z^4=\frac{5}{3}$$

b) Sean $f(z)=1-\cos z$ y $g(z)=z^2$. Entonces, $f(0)=g(0)=0$. Además, $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en $z=0$. Por tanto, según la regla de L'Hopital,

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{2z}$$

Como $f_1(z)=\operatorname{sen} z$ y $g_1(z)=2z$ son analíticas e iguales a cero cuando $z=0$, puede aplicarse de nuevo la regla de L'Hopital y obtener el límite buscado,

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{2z}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{2}=\frac{1}{2}$$

c) ***Método 1.*** Se aplica repetidas veces la regla de L'Hopital y se obtiene

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\operatorname{sen} z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{2z\cos z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{2\cos z^2-4z^2\operatorname{sen} z^2}=\frac{1}{2}$$

Método 2. Como $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}=1$, mediante una sola aplicación de la regla de L'Hopital,

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\operatorname{sen} z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{2z\cos z^2}=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)\left(\frac{1}{2\cos z^2}\right)$$
$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2\cos z^2}\right)=(1)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Método 3. Como $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} z^2}{z^2}=1$ o, lo que es equivalente, $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2}{\operatorname{sen} z^2}=1$, con el inciso *b*) se escribe

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\operatorname{sen} z^2}=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1-\cos z}{z^2}\right)\left(\frac{z^2}{\operatorname{sen} z^2}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2}$$

3.24. Evalúe $\lim_{z\to 0}(\cos z)^{1/z^2}$.

Solución

Sea $w=(\cos z)^{1/z^2}$. Entonces, $\ln w=(\ln\cos z)/z^2$, donde se considera la rama principal del logaritmo. Mediante la regla de L'Hopital,

$$\lim_{z\to 0}\ln w=\lim_{z\to 0}\frac{\ln\cos z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{(-\operatorname{sen} z)/\cos z}{2z}$$
$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)\left(-\frac{1}{2\cos z}\right)=(1)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

www.FreeLibros.me

Pero como la función logarítmica es una función continua, se tiene

$$\lim_{z\to 0} \ln w = \ln\left(\lim_{z\to 0} w\right) = -\frac{1}{2}$$

o $\lim_{z\to 0} w = e^{-1/2}$, que es el valor buscado.

Observe que, como $\lim_{z\to 0} \cos z = 1$ y $\lim_{z\to 0} 1/z^2 = \infty$, el límite buscado tiene la "forma indeterminada" 1^∞.

PUNTOS SINGULARES

3.25. En las funciones siguientes, localice e indique las singularidades en el plano finito z y determine si son singularidades aisladas o no.

$$a)\ f(z) = \frac{z}{(z^2+4)^2}, \quad b)\ f(z) = \sec(1/z), \quad c)\ f(z) = \frac{\ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^4}, \quad d)\ f(z) = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

Solución

a) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2} = \dfrac{z}{\{(z+2i)(z-2i)\}^2} = \dfrac{z}{(z+2i)^2(z-2i)^2}.$

Como

$$\lim_{z\to 2i} (z-2i)^2 f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{z}{(z+2i)^2} = \frac{1}{8i} \neq 0$$

$z = 2i$ es un polo de orden 2. De manera similar, $z = -2i$ es un polo de orden 2.

Como puede hallarse un δ tal que ninguna otra singularidad además de $z = 2i$ se encuentre en el interior del círculo $|z - 2i| = \delta$ (es decir, se elige $\delta = 1$), se concluye que $z = 2i$ es una singularidad aislada. De manera similar, $z = -2i$ es una singularidad aislada.

b) Como $\sec(1/z) = 1/\cos(1/z)$, las singularidades se presentan donde $\cos(1/z) = 0$, es decir, $1/z = (2n+1)\pi/2$ o $z = 2/(2n+1)\pi$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Además, como $f(z)$ no está definida en $z = 0$, se concluye que también $z = 0$ es una singularidad.

Ahora, mediante la regla de L'Hopital,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 2/(2n+1)\pi} \left\{z - \frac{2}{(2n+1)\pi}\right\} f(z) &= \lim_{z\to 2/(2n+1)\pi} \frac{z - 2/(2n+1)\pi}{\cos(1/z)} \\
&= \lim_{z\to 2/(2n+1)\pi} \frac{1}{-\operatorname{sen}(1/z)\{-1/z^2\}} \\
&= \frac{\{2/(2n+1)\pi\}^2}{\operatorname{sen}(2n+1)\pi/2} = \frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \neq 0
\end{aligned}$$

Por tanto, las singularidades $z = 2/(2n+1)/\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ son *polos de orden uno*, es decir, *polos simples.* Observe que estos polos se encuentran sobre el eje real en $z = \pm 2/\pi, \pm 2/3\pi, \pm 2/5\pi, \ldots$ y que existe una cantidad infinita en un intervalo finito que contiene al 0 (vea la figura 3-9).

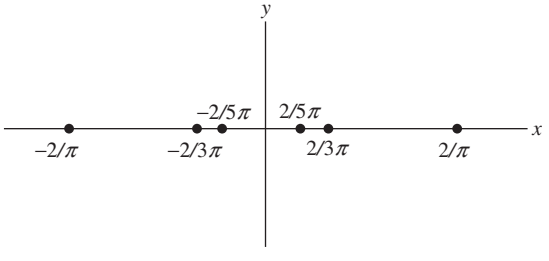


Figura 3-9

Como cada uno de estos polos puede encerrarse en un círculo de radio δ que no contenga ninguna otra singularidad, se concluye que son singularidades aisladas. Hay que observar que entre más cerca esté la singularidad del origen, la δ requerida será menor.

Como no es posible hallar ningún entero positivo n tal que $\lim_{z\to 0} (z-0)^n f(z) = A \neq 0$, se concluye que $z = 0$ es una *singularidad esencial*. Además, como todo círculo de radio δ con centro en $z = 0$ contiene puntos singulares distintos de $z = 0$, sin importar cuán pequeño se tome δ, se ve que $z = 0$ es una *singularidad no aislada.*

www.FreeLibros.me

c) El punto $z = 2$ es un *punto de ramificación* y es una *singularidad no aislada.* Además, como $z^2 + 2z + 2 = 0$, donde $z = -1 \pm i$, se concluye que $z^2 + 2z + 2 = (z + 1 + i)(z + 1 - i)$ y que $z = -1 \pm i$ son *polos de orden 4*, los cuales son *singularidades aisladas.*

d) A primera vista, parece que $z = 0$ es un punto de ramificación. Para probar esto, sea $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi)}$, donde $0 \leq \theta < 2\pi$.

Si $z = re^{i\theta}$, se tiene

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{r}e^{i\theta/2})}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}}$$

Si $z = re^{i(\theta+2\pi)}$, se tiene

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{\pi i})}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{\pi i}} = \frac{\operatorname{sen}(-\sqrt{r}e^{i\theta/2})}{-\sqrt{r}e^{i\theta/2}} = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{r}e^{i\theta/2})}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}}$$

Por tanto, la función tiene en realidad sólo una rama y $z = 0$ no puede ser punto de ramificación. Como $\lim_{z\to 0} \operatorname{sen}\sqrt{z}/\sqrt{z} = 1$, se concluye que $z = 0$ es una *singularidad removible.*

3.26. *a*) Localice e indique todas las singularidades de $f(z) = \dfrac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3(3z+2)^2}$.

b) Determine dónde es analítica $f(z)$.

Solución

a) En el plano finito z, las singularidades se encuentran en $z = 1$ y $z = -2/3$; $z = 1$ es un *polo de orden 3* y $z = -2/3$ es un *polo de orden 2.*

Para determinar si existe una singularidad en $z = 1/w$ (el punto al infinito), sea $z = \infty$. Así,

$$f(1/w) = \frac{(1/w)^8 + (1/w)^4 + 2}{(1/w - 1)^3(3/w + 2)^2} = \frac{1 + w^4 + 2w^8}{w^3(1-w)^3(3+2w)^2}$$

Por tanto, como $w = 0$ es un polo de orden 3 de la función $f(1/w)$, se concluye que $z = \infty$ es un polo de orden 3 de la función $f(z)$.

Por tanto, la función dada tiene tres singularidades: un polo de orden 3 en $z = 1$, un polo de orden 2 en $z = -2/3$ y un polo de orden 3 en $z = \infty$.

b) Según el inciso *a*), se concluye que $f(z)$ es analítica en todas partes del plano finito z, excepto en los puntos $z = 1$ y $z = -2/3$.

FAMILIAS ORTOGONALES

3.27. Sean $u(x, y) = \alpha$ y $v(x, y) = \beta$, que representan dos familias de curvas y donde u y v son las partes real e imaginaria de una función analítica $f(z)$, y α y β son constantes. Demuestre que si $f'(z) \neq 0$, estas familias son ortogonales (es decir, en su punto de intersección, cada miembro de una familia es perpendicular a cada miembro de la otra familia).

Solución

Considere dos miembros arbitrarios de las respectivas familias, por ejemplo, $u(x, y) = \alpha_1$ y $v(x, y) = \beta_1$, donde α_1 y β_1 son constantes particulares [figura 3-10].

Se diferencia $u(x, y) = \alpha_1$ respecto de x y se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Así, la pendiente de $u(x, y) = \alpha_1$ es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial x} \Big/ \frac{\partial u}{\partial y}$$

www.FreeLibros.me

De manera similar, la pendiente de $v(x, y) = \beta_1$ es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Big/ \frac{\partial v}{\partial y}$$

Ahora

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ya sea } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0 \text{ o } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$$

A partir de estas ecuaciones y desigualdades, se concluye que el producto de las pendientes es -1 (donde ninguna de las derivadas parciales es cero), o una pendiente es 0 y la otra es infinita, es decir, una recta tangente es horizontal y la otra es vertical cuando

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Por tanto, si $f'(z) \neq 0$, las curvas son ortogonales.

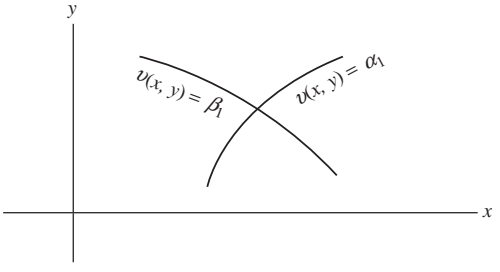


Figura 3-10

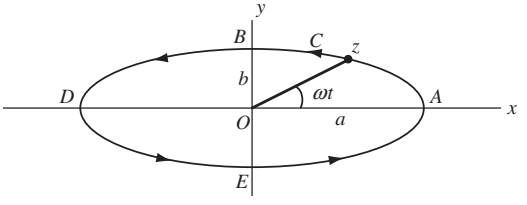


Figura 3-11

3.28. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas en el plano xy definidas como $e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y) = \alpha$, donde α es una constante real.

Solución

De acuerdo con los problemas 3.7 y 3.27 se sigue que $e^{-x}(y \operatorname{sen} y + x \cos y) = \beta$, donde β es una constante real, es la ecuación buscada de las trayectorias ortogonales.

APLICACIONES EN GEOMETRÍA Y MECÁNICA

3.29. Una elipse C tiene como ecuación $z = a \cos \omega t + bi \operatorname{sen} \omega t$, donde a, b, ω son constantes positivas, y $a > b$ y t es una variable real. *a*) Represente gráficamente la elipse y muestre que a medida que t aumenta a partir de $t = 0$, la elipse se recorre en dirección contraria a las manecillas del reloj. *b*) Encuentre un vector unitario tangente a C en cualquier punto.

Solución

a) A medida que t aumenta de 0 a $\pi/2\omega$, de $\pi/2\omega$ a π/ω, de π/ω a $3\pi/2\omega$ y de $3\pi/2\omega$ a $2\pi/\omega$, el punto z se mueve sobre C de A a B, de B a D, de D a E y de E a A, respectivamente (es decir, se mueve en dirección contraria a las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 3-11).

b) Un vector tangente a C en cualquier punto t es

$$\frac{dz}{dt} = -a\omega \operatorname{sen} \omega t + b\omega i \cos \omega t$$

Así, un vector unitario tangente a C en cualquier punto t es

$$\frac{dz/dt}{|dz/dt|} = \frac{-a\omega \operatorname{sen} \omega t + b\omega i \cos \omega t}{|-a\omega \operatorname{sen} \omega t + b\omega i \cos \omega t|} = \frac{-a \operatorname{sen} \omega t + bi \cos \omega t}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}}$$

www.FreeLibros.me

3.30. En el problema 3.29, suponga que z es el vector posición de una partícula que se mueve sobre C y que t es el tiempo.

a) Determine la velocidad y la rapidez de la partícula en cualquier momento.

b) Determine la aceleración, tanto en magnitud como en dirección, en cualquier momento.

c) Compruebe que $d^2z/dt^2 = -\omega^2 z$ y dé una interpretación física.

d) Determine dónde tienen la velocidad y la aceleración su mayor y menor magnitud.

Solución

a) Velocidad $= dz/dt = -a\omega \operatorname{sen} \omega t + b\omega i \cos \omega t$.

$$\text{Rapidez} = \text{magnitud de la velocidad} = |dz/dt| = \omega\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}$$

b) Aceleración $= d^2z/dt^2 = -a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 i \operatorname{sen} \omega t$.

$$\text{Magnitud de la aceleración} = |d^2z/dt^2| = \omega^2\sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}$$

c) De acuerdo con el inciso *b*), se ve que

$$d^2z/dt^2 = -a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 i \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 (a \cos \omega t + bi \operatorname{sen} \omega t) = -\omega^2 z$$

Físicamente, esto significa que en cualquier momento la aceleración se dirige al punto O y la magnitud es proporcional a la distancia instantánea a O. A medida que la partícula se mueve, su proyección sobre los ejes x y y describe lo que suele conocerse como un *movimiento armónico simple con periodo* $2\pi/\omega$. A la aceleración también se le conoce como *aceleración centrípeta.*

d) De acuerdo con los incisos *a*) y *b*), se tiene

$$\text{Magnitud de la velocidad} = \omega\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + b^2(1 - \operatorname{sen}^2 \omega t)} = \omega\sqrt{(a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 \omega t + b^2}$$

$$\text{Magnitud de la aceleración} = \omega^2\sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2(1 - \cos^2 \omega t)} = \omega^2\sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2 \omega t + b^2}$$

Entonces, la velocidad tiene su mayor magnitud [dada por ωa] donde $\operatorname{sen} \omega t = \pm 1$, es decir, en los puntos B y E [figura 3-11], y su menor magnitud [dada por ωb] donde $\operatorname{sen} \omega t = 0$, es decir, en los puntos A y D.

De manera semejante, la aceleración tiene su mayor magnitud [dada por $\omega^2 a$] donde $\cos \omega t = \pm 1$, es decir, en los puntos A y D, y su menor magnitud [dada por $\omega^2 b$] donde $\cos \omega t = 0$, es decir, en los puntos B y E.

En teoría, los planetas del sistema solar se mueven en trayectorias elípticas en las que el Sol se encuentra en uno de sus focos. En la práctica, estas trayectorias muestran una cierta desviación de una trayectoria elíptica exacta.

GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTOR Y LAPLACIANO

3.31. Demuestre la equivalencia de los operadores:

a) $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, *b*) $\dfrac{\partial}{\partial y} = i\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ donde $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Solución

Si F es una función continua diferenciable, entonces

a) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ lo que muestra la equivalencia $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

b) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial z}(i) + \dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}(-i) = i\left(\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}\right)$ lo que muestra la equivalencia $\dfrac{\partial}{\partial y} = i\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$.

www.FreeLibros.me

3.32. Muestre que *a*) $\nabla \equiv \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y} = 2\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, *b*) $\overline{\nabla} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y} = 2\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Solución

De acuerdo con las equivalencias del problema 3.31, se tiene

a) $\nabla \equiv \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} + i^2\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 2\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$

b) $\overline{\nabla} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} - i^2\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 2\dfrac{\partial}{\partial z}$

3.33. Suponga que $F(x, y) = c$ [donde c es una constante y F es continuamente diferenciable] es una curva en el plano xy. Muestre que grad $F = \nabla F = (\partial F/\partial x) + i(\partial F/\partial y)$ es un vector normal a la curva.

Solución

Se tiene $dF = (\partial F/\partial x)dx + (\partial F/\partial y)dy = 0$. En términos del producto punto [vea la página 7], esto se expresa como

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right) \cdot (dx + i\,dy) = 0$$

Pero $dx + i\,dy$ es un vector tangente a C. Por tanto, $\nabla F = (\partial F/\partial x) + i(\partial F/\partial y)$ debe ser perpendicular a C.

3.34. Muestre que $\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) = 2\dfrac{\partial B}{\partial \bar{z}}$, donde $B(z, \bar{z}) = P(x, y) + iQ(x, y)$.

Solución

De acuerdo con el problema 3.32, $\nabla B = 2(\partial B/\partial \bar{z})$. Por tanto,

$$\nabla B = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ) = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}$$

3.35. Sea C la curva en el plano xy definida por $3x^2y - 2y^3 = 5x^4y^2 - 6x^2$. Encuentre un vector unitario normal a C en $(1, -1)$.

Solución

Sea $F(x, y) = 3x^2y - 2y^3 - 5x^4y^2 + 6x^2 = 0$. De acuerdo con el problema 3.33, un vector normal a C en $(1, -1)$ es

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = (6xy - 20x^3y^2 + 12x) + i(3x^2 - 6y^2 - 10x^4y) = -14 + 7i$$

Así, un vector unitario normal a C en $(1, -1)$ es $\dfrac{-14 + 7i}{|-14 + 7i|} = \dfrac{-2 + i}{\sqrt{5}}$. Otro vector unitario es $\dfrac{2 - i}{\sqrt{5}}$.

3.36. Suponga que $A(x, y) = 2xy - ix^2y^3$. Encuentre *a*) grad A, *b*) div A, *c*) $|\text{rot } A|$ y *d*) laplaciano A.

Solución

a) $\text{grad } A = \nabla A = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(2xy - ix^2y^3\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2xy - ix^2y^3\right) + i\dfrac{\partial}{\partial y}\left(2xy - ix^2y^3\right)$

$$= 2y - 2ixy^3 + i\left(2x - 3ix^2y^3\right) = 2y + 3x^2y^2 + i\left(2x - 2xy^3\right)$$

www.FreeLibros.me

$$b)\quad \operatorname{div} A = \nabla\cdot A = \operatorname{Re}\{\overline{\nabla}A\} = \operatorname{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(2xy - ix^2y^3\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3) = 2y - 3x^2y^2$$

$$c)\quad |\operatorname{rot} A| = |\nabla\times A| = |\operatorname{Im}\{\overline{\nabla}A\}| = \left|\operatorname{Im}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(2xy - ix^2y^3\right)\right\}\right|$$

$$= \left|\frac{\partial}{\partial x}(-x^2y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy)\right| = \left|-2xy^3 - 2x\right|$$

$$d)\quad \text{laplaciano } A = \nabla^2 A = \operatorname{Re}\{\overline{\nabla}\nabla A\} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2xy - ix^2y^3) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2xy - ix^2y^3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2y - 2ixy^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2x - 3ix^2y^2) = -2iy^3 - 6ix^2y$$

PROBLEMAS DIVERSOS

3.37. Demuestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se expresan en forma polar como

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Solución

Se tiene $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ o $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$. Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta \tag{2}$$

De igual manera,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos\theta \tag{4}$$

De acuerdo con la ecuación de Cauchy-Riemann $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, con (1) y (4),

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\cos\theta - \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{5}$$

De acuerdo con la ecuación de Cauchy-Riemann $\partial u/\partial y = -(\partial v/\partial x)$, con (2) y (3) se tiene

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\cos\theta = 0 \tag{6}$$

Se multiplica (5) por $\cos\theta$, (6) por $\operatorname{sen}\theta$ y se suman, para obtener

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

Se multiplica (5) por $-\operatorname{sen}\theta$, (6) por $\cos\theta$ y se suma, para obtener

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

www.FreeLibros.me

3.38. Verifique que, expresadas en forma polar, las partes real e imaginaria de una función analítica de una variable compleja satisfacen la ecuación [ecuación de Laplace en forma polar]

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}=0$$

Solución

Del problema 3.37,

$$\frac{\partial v}{\partial\theta}=r\frac{\partial u}{\partial r} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} \tag{2}$$

Para eliminar v se diferencia (1) parcialmente respecto de r y (2) respecto de θ. Así,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{\partial r} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\,\partial r}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \tag{4}$$

Pero

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial\theta}=\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\,\partial r}$$

suponiendo que las segundas derivadas parciales son continuas. Por tanto, de (3) y (4),

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\quad\text{o}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

De manera similar, mediante la eliminación de u se encuentra

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}=0$$

con lo que se llega al resultado buscado.

3.39. Suponga que $w=f(\zeta)$, donde $\zeta=g(z)$. Suponga que f y g son analíticas en una región $\mathcal{R}$ y demuestre que

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}$$

Solución

Suponga que z se incrementa $\Delta z\neq 0$, de manera que $z+\Delta z$ está en $\mathcal{R}$. Entonces, en consecuencia, ζ y w se incrementarán $\Delta\zeta$ y Δw, respectivamente, donde

$$\Delta w=f(\zeta+\Delta\zeta)-f(\zeta),\quad \Delta\zeta=g(z+\Delta z)-g(z) \tag{1}$$

Observe que cuando $\Delta z\to 0$, se tiene $\Delta w\to 0$ y $\Delta\zeta\to 0$.

Si $\Delta\zeta\neq 0$, se escribe $\epsilon=(\Delta w/\Delta\zeta)-(dw/d\zeta)$ de manera que $\epsilon\to 0$ cuando $\Delta\zeta\to 0$ y

$$\Delta w=\frac{dw}{d\zeta}\Delta\zeta+\epsilon\Delta\zeta \tag{2}$$

www.FreeLibros.me

Si $\Delta\zeta = 0$ para valores de Δz, entonces (1) muestra que $\Delta w = 0$ para estos valores de Δz. Para estos casos, se define $\epsilon = 0$.

Se sigue que, en ambos casos, $\Delta\zeta \neq 0$ o $\Delta\zeta = 0$, se satisface la ecuación en (2). Al dividir (2) entre $\Delta z \neq 0$ y tomar el límite cuando $\Delta z \to 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{dw}{d\zeta}\frac{\Delta\zeta}{\Delta z} + \epsilon\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)\\ &= \frac{dw}{d\zeta}\cdot\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\zeta}{\Delta z} + \lim_{\Delta z\to 0}\epsilon\cdot\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\\ &= \frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} + 0\cdot\frac{d\zeta}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}\end{aligned}$$

3.40. *a*) Suponga que $u_1(x, y) = \partial u/\partial x$ y $u_2(x, y) = \partial u/\partial y$. Compruebe que $f'(z) = u_1(z, 0) - iu_2(z, 0)$.

b) Muestre que el resultado obtenido en *a*) sirve para resolver los problemas 3.7 y 3.8.

Solución

a) De acuerdo con el problema 3.5, se tiene $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = u_1(x, y) - iu_2(x, y)$.

Con $y = 0$, esto se convierte en $f'(x) = u_1(x, 0) - iu_2(x, 0)$.

Después, al sustituir x por z, se tiene, como se deseaba, $f'(z) = u_1(z, 0) - iu_2(z, 0)$.

b) Como se da $u = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y\cos y)$, se tiene

$$u_1(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x}\operatorname{sen} y - xe^{-x}\operatorname{sen} y + ye^{-x}\cos y$$

$$u_2(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{-z}\cos y + ye^{-z}\operatorname{sen} y - e^{-x}\cos y$$

de manera que, según el inciso *a*),

$$f'(z) = u_1(z, 0) - iu_2(z, 0) = 0 - i(ze^{-z} - e^{-z}) = -i(ze^{-z} - e^{-z})$$

Al integrando respecto de z se tiene, salvo una constante, $f(z) = ize^{-z}$. Se separa esto en parte real y parte imaginaria, y $v = e^{-x}(y \operatorname{sen} y + x\cos y)$ salvo una constante.

3.41. Suponga que A es real o, de manera más general, suponga que Im A es armónica. Verifique que $|\text{rot grad } A| = 0$.

Solución

Si $A = P + Qi$, se tiene

$$\text{grad } A = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ) = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}|\text{rot grad } A| &= \left|\operatorname{Im}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\}\right]\right|\\ &= \left|\operatorname{Im}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} + i\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right) - i\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial x}\right)\right]\right|\\ &= \left|\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right|\end{aligned}$$

Por tanto, si $Q = 0$, es decir, A es real, o si Q es armónica, $|\text{rot grad } A| = 0$.

www.FreeLibros.me

3.42. Resuelva la ecuación diferencial parcial $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = x^2 - y^2$.

Solución

Sean $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, de manera que $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$. Entonces, $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2)$ y

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \nabla^2 U = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial \bar{z}}$$

Por tanto, la ecuación diferencial parcial dada se convierte en $4(\partial^2 U/\partial z\,\partial \bar{z}) = \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2)$ o

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{1}{8}(z^2 + \bar{z}^2) \tag{1}$$

Se integra (1) respecto de z (tratando a $\bar{z}$ como constante),

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{z^3}{24} + \frac{z\bar{z}^2}{8} + F_1(\bar{z}) \tag{2}$$

donde $F_1(\bar{z})$ es una función arbitraria de $\bar{z}$. Al integrar (2) respecto de $\bar{z}$,

$$U = \frac{z^3\bar{z}}{24} + \frac{z\bar{z}^3}{24} + F(\bar{z}) + G(z) \tag{3}$$

donde $F(\bar{z})$ es la función obtenida al integrar $F_1(\bar{z})$, y $G(z)$ es una función arbitraria de z. Se sustituye z y $\bar{z}$ por $x + iy$ y $x - iy$, respectivamente, y se obtiene

$$U = \frac{1}{12}\left(x^4 - y^4\right) + F(x - iy) + G(x + iy)$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

DERIVADAS

3.43. Con la definición, encuentre la derivada, en el punto indicado, de las funciones siguientes.

a) $f(z) = 3z^2 + 4iz - 5 + i$; $z = 2$, *b)* $f(z) = \dfrac{2z - i}{z + 2i}$; $z = -i$ y *c)* $f(z) = 3z^{-2}$; $z = 1 + i$.

3.44. Demuestre que $\dfrac{d}{dz}(z^2\bar{z})$ no existe en ninguna parte.

3.45. Determine si $|z|^2$ tiene derivada en alguna parte.

3.46. Dadas las funciones siguientes determine los puntos singulares, es decir, los puntos en los que la función no es analítica. Determine la derivada en todos los demás puntos. *a)* $\dfrac{z}{z + i}$ y *b)* $\dfrac{3z - 2}{z^2 + 2z + 5}$.

ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

3.47. Verifique que la parte real y la imaginaria de las funciones siguientes satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y concluya si estas funciones son analíticas.

a) $f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$, *b)* $f(z) = ze^{-z}$ y *c)* $f(z) = \operatorname{sen} 2z$.

3.48. Muestre que la función $x^2 + iy^3$ no es analítica en ninguna parte. Concilie esto con el hecho de que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en $x = 0$ y $y = 0$.

3.49. Demuestre que si $w = f(z) = u + iv$ es analítica en una región $\mathcal{R}$, entonces $dw/dz = \partial w/\partial x = -i(\partial w/\partial y)$.

www.FreeLibros.me

3.50. *a*) Compruebe que la función $u = 2x(1 - y)$ es armónica. *b*) Encuentre una función v tal que $f(z) = u + iv$ sea analítica [es decir, encuentre la función conjugada de u]. *c*) Exprese $f(z)$ en términos de z.

3.51. Responda el problema 3.50 con la función $u = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$.

3.52. Verifique que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen para las funciones *a*) e^{z^2}, *b*) $\cos 2z$ y *c*) $\operatorname{senh} 4z$.

3.53. Determine cuáles de las siguientes funciones u son armónicas. Para cada función armónica, encuentre la función armónica conjugada v y exprese $u + iv$ como función analítica de z.

a) $3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$, *b*) $2xy + 3xy^2 - 2y^3$, *c*) $xe^z \cos y - ye^z \operatorname{sen} y$ y *d*) $e^{-2xy} \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$.

3.54. *a*) Verifique que $\psi = \ln[(x - 1)^2 + (y - 2)^2]$ es armónica en toda región en la que no esté comprendido el punto $(1, 2)$. *b*) Encuentre una función ϕ tal que $\phi + i\psi$ sea analítica. *c*) Exprese $\phi + i\psi$ como función de z.

3.55. Suponga que $\operatorname{Im}\{f'(z)\} = 6x(2y - 1)$ y $f(0) = 3 - 2i, f(1) = 6 - 5i$. Encuentre $f(1 + i)$.

DIFERENCIALES

3.56. Sea $w = iz^2 - 4z + 3i$. Encuentre *a*) Δw, *b*) dw, *c*) $\Delta w - dw$ en el punto $z = 2i$.

3.57. Suponga que $w = (2z + 1)^3$, $z = -i$, $\Delta z = 1 + i$. Encuentre *a*) Δw y *b*) dw.

3.58. Sea $w = 3iz^2 + 2z + 1 - 3i$. Encuentre *a*) Δw, *b*) dw, *c*) $\Delta w/\Delta z$ y *d*) dw/dz donde $z = i$.

3.59. *a*) Suponga que $w = \operatorname{sen} z$. Muestre que $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \cos z\left(\dfrac{\operatorname{sen} \Delta z}{\Delta z}\right) - 2 \operatorname{sen} z\left\{\dfrac{\operatorname{sen}^2 (\Delta z/2)}{\Delta z}\right\}$.

b) Suponga que $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \Delta z}{\Delta z} = 1$ y compruebe que $\dfrac{dw}{dz} = \cos z$.

c) Muestre que $dw = (\cos z)\, dz$.

3.60. *a*) Sea $w = \ln z$. Muestre que si $\Delta z/z = \zeta$, entonces $\Delta w/\Delta z = (1/z) \ln \{(1 + \zeta)^{1/\zeta}\}$.

b) Suponga que $\lim_{\zeta \to 0} (1 + \zeta)^{1/\zeta} = e$ y verifique que $dw/dz = 1/z$.

c) Muestre que $d(\ln z) = dz/z$.

3.61. Dadas restricciones para $f(z)$ y $g(z)$, demuestre que

a) $d\{f(z)g(z)\} = \{f(z)g'(z) + g(z)f'(z)\}dz$

b) $d\{f(z)/g(z)\} = \{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)\}dz/\{g(z)\}^2$

REGLAS DE DIFERENCIACIÓN. DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

3.62. Suponga que $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en una región $\mathcal{R}$. Compruebe que

a) $d/dz\{2if(z) - (1 + i)g(z)\} = 2if'(z) - (1 + i)g'(z)$, *b*) $d/dz\{f(z)\}^2 = 2f(z)f'(z)$,

c) $d/dz\{f(z)\}^{-1} = -\{f(z)\}^{-2}f'(z)$.

3.63. Con las reglas de diferenciación, encuentre la derivada de cada función siguiente:

a) $(1 + 4i)z^2 - 3z - 2$, *b*) $(2z + 3i)(z - i)$, *c*) $(2z - i)/(z + 2i)$, *d*) $(2iz + 1)^2$ y *e*) $(iz - 1)^{-3}$.

3.64. Encuentre las derivadas de las funciones siguientes en el punto indicado:

a) $(z + 2i)(i - z)/(2z - 1)$, $z = i$ y *b*) $\{z + (z^2 + 1)^2\}^2$, $z = 1 + i$.

www.FreeLibros.me

3.65. Compruebe que *a*) $\dfrac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z$ y *b*) $\dfrac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z$.

3.66. Demuestre que *a*) $\dfrac{d}{dz}(z^2+1)^{1/2} = \dfrac{z}{(z^2+1)^{1/2}}$, *b*) $\dfrac{d}{dz}\ln(z^2+2z+2) = \dfrac{2z+2}{z^2+2z+2}$ e indique cualquier restricción que pueda haber.

3.67. Encuentre las derivadas de cada una de las funciones siguientes, e indique las restricciones que pueda haber.

a) $3\,\text{sen}^2(z/2)$, *b*) $\tan^3(z^2-3z+4i)$, *c*) $\ln(\sec z + \tan z)$, *d*) $\csc\{(z^2+1)^{1/2}\}$ y *e*) $(z^2-1)\cos(z+2i)$.

3.68. Verifique que *a*) $\dfrac{d}{dz}(1+z^2)^{3/2} = 3z(1+z^2)^{1/2}$ y *b*) $\dfrac{d}{dz}(z+2\sqrt{z})^{1/3} = \dfrac{1}{3}z^{-1/2}(z+2\sqrt{z})^{-2/3}(\sqrt{z}+1)$.

3.69. Compruebe que *a*) $\dfrac{d}{dz}(\tan^{-1} z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ y *b*) $\dfrac{d}{dz}(\sec^{-1} z) = \dfrac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$.

3.70. Demuestre que *a*) $\dfrac{d}{dz}\text{senh}^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ y *b*) $\dfrac{d}{dz}\text{csch}^{-1} z = \dfrac{-1}{z\sqrt{z^2+1}}$.

3.71. Encuentre las derivadas de las expresiones siguientes:

a) $\{\text{sen}^{-1}(2z-1)\}^2$ *c*) $\cos^{-1}(\text{sen}\, z - \cos z)$ *e*) $\coth^{-1}(z\csc 2z)$

b) $\ln\{\cot^{-1} z^2\}$ *d*) $\tan^{-1}(z+3i)^{-1/2}$ *f*) $\ln(z - \frac{3}{2} + \sqrt{z^2-3z+2i})$

3.72. Suponga que $w = \cos^{-1}(z-1)$, $z = \text{senh}(3\zeta + 2i)$ y $\zeta = \sqrt{t}$. Encuentre dw/dt.

3.73. Sean $w = t\sec(t-3i)$ y $z = \text{sen}^{-1}(2t-1)$. Encuentre dw/dz.

3.74. Suponga que $w^2 - 2w + \text{sen}\, 2z = 0$. Encuentre *a*) dw/dz y *b*) d^2w/dz^2.

3.75. Dada $w = \cos\zeta$, $z = \tan(\zeta + \pi i)$, encuentre d^2w/dz^2 en $\zeta = 0$.

3.76. Encuentre *a*) $d/dz\{z^{\ln z}\}$ y *b*) $d/dz\left\{[\text{sen}(iz-2)]^{\tan^{-1}(z+3i)}\right\}$.

3.77. Encuentre las segundas derivadas:

a) $3\,\text{sen}^2(2z-1+i)$, *b*) $\ln\tan z^2$, *c*) $\text{senh}(z+1)^2$, *d*) $\cos^{-1}(\ln z)$ y *e*) $\text{sech}^{-1}\sqrt{1+z}$.

REGLA DE L'HOPITAL

3.78. Evalúe *a*) $\displaystyle\lim_{z\to 2i}\frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$, *b*) $\displaystyle\lim_{z\to e^{\pi i/3}}(z-e^{\pi i/3})\left(\frac{z}{z^3+1}\right)$ y *c*) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}$.

3.79. Evalúe *a*) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z-\text{sen}\, z}{z^3}$ y *b*) $\displaystyle\lim_{z\to m\pi i}(z-m\pi i)\left(\frac{e^z}{\text{sen}\, z}\right)$.

3.80. Encuentre $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{\tan^{-1}(z^2+1)^2}{\text{sen}^2(z^2+1)}$, donde la rama de la inversa de la tangente se elige de manera que $\tan^{-1} 0 = 0$.

3.81. Evalúe $\displaystyle\lim_{z\to 0}\left(\frac{\text{sen}\, z}{z}\right)^{1/z^2}$.

PUNTOS SINGULARES

3.82. Localice e indique las singularidades en el plano finito z de las funciones siguientes.

a) $\dfrac{z^2-3z}{z^2+2z+2}$, *b*) $\dfrac{\ln(z+3i)}{z^2}$, *c*) $\text{sen}^{-1}(1/z)$, *d*) $\sqrt{z(z^2+1)}$ y *e*) $\dfrac{\cos z}{(z+i)^3}$

3.83. Muestre que $f(z) = (z+3i)^5/(z^2-2z+5)^2$ tiene polos dobles en $z = 1 \pm 2i$ y un polo simple al infinito.

3.84. Muestre que e^{x^2} tiene una singularidad esencial al infinito.

www.FreeLibros.me

3.85. Localice e indique todas las singularidades de las funciones siguientes.

a) $(z+3)/(z^2-1)$, *b*) $\csc(1/z^2)$ y *c*) $(z^2+1)/z^{3/2}$.

FAMILIAS ORTOGONALES

3.86. Encuentre las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas:

a) $x^3y - xy^3 = \alpha$ y *b*) $e^{-x}\cos y + xy = \alpha$.

3.87. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $r^2 \cos 2\theta = \alpha$.

3.88. Separe $f(z) = z + 1/z$ en parte real y parte imaginaria, y muestre que las familias $(r^2+1)\cos\theta = \alpha r$ y $(r^2-1)\operatorname{sen}\theta = \beta r$ son trayectorias ortogonales, y verifique por otro método.

3.89. Sea n una constante real arbitraria, y demuestre que $r^n = \alpha \sec n\theta$ y $r^n = \beta \csc n\theta$ son trayectorias ortogonales.

APLICACIONES EN GEOMETRÍA Y MECÁNICA

3.90. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $z = e^{-t}(2\operatorname{sen} t + i\cos t)$.

a) Encuentre un vector unitario tangente a la curva en el punto en el que $t = \pi/4$.

b) Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la partícula en $t = 0$ y $t = \pi/2$.

3.91. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $z = ae^{i\omega t}$. *a*) Muestre que su rapidez es siempre constante e igual a ωa.

b) Muestre que la magnitud de su aceleración es siempre constante e igual a $\omega^2 a$.

c) Muestre que la aceleración siempre se dirige a $z = 0$.

d) Explique la relación entre este problema y el de una piedra en el extremo de una cuerda que se hace girar en un plano horizontal.

3.92. La posición en el tiempo t de una partícula que se mueve en el plano z está dada por $z = 3te^{-4it}$. Encuentre la magnitud de *a*) la velocidad y *b*) la aceleración de la partícula en $t = 0$ y en $t = \pi$.

3.93. Una partícula P se mueve a lo largo de la recta $x + y = 2$ en el plano z con una rapidez uniforme $3\sqrt{2}$ pies/seg desde el punto $z = -5 + 7i$ hasta el punto $z = 10 - 8i$. Si $w = 2z^2 - 3$ y P' es la imagen, en el plano w, de P, encuentre la magnitud de *a*) la velocidad y *b*) de la aceleración de P' después de 3 segundos.

GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTOR Y LAPLACIANO

3.94. Sea $F = x^2y - xy^2$. Encuentre *a*) ∇F y *b*) $\nabla^2 F$.

3.95. Sea $B = 3z^2 + 4\bar{z}$. Encuentre *a*) grad B, *b*) div B, *c*) $|\text{rot } B|$ y *d*) laplaciano B.

3.96. Sea C la curva en el plano xy definida por $x^2 - xy + y^2 = 7$. Encuentre un vector unitario normal a C *a*) en el punto $(-1, 2)$ y *b*) en cualquier punto.

3.97. Encuentre la ecuación de la recta normal a la curva $x^2y = 2xy + 6$ en el punto $(3, 2)$.

3.98. Muestre que $\nabla^2|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$. Para ilustrar, elija $f(z) = z^2 + iz$.

3.99. Compruebe que $\nabla^2\{FG\} = F\nabla^2 G + G\nabla^2 F + 2\nabla F \cdot \nabla G$.

3.100. Demuestre que div grad $A = 0$ si A es imaginaria o, de manera más general, si $\operatorname{Re}\{A\}$ es armónica.

PROBLEMAS MISCELÁNEOS

3.101. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Verifique que:

a) $f(z) = 2u(z/2, -iz/2) + \text{constante}$ y *b*) $f(z) = 2iv(z/2, -iz/2) + \text{constante}$.

www.FreeLibros.me

3.102. Con el problema 3.101 halle $f(z)$ si *a*) $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ y *b*) $v(x, y) = \operatorname{senh} x \cos y$.

3.103. Suponga que V es la rapidez instantánea de una partícula que se mueve a lo largo de una curva plana C. Compruebe que el componente normal de la aceleración en cualquier punto de C está dado por V^2/R, donde R es el radio de curvatura en ese punto.

3.104. Encuentre una función analítica $f(z)$ tal que $\operatorname{Re}\{f'(z)\} = 3x^2 - 4y - 3y^2$ y $f(1 + i) = 0$.

3.105. Muestre que la familia de curvas

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$

en la que $-a^2 < \lambda < -b^2$ es ortogonal a la familia en la que $\lambda > -b^2 > -a^2$.

3.106. Demuestre que la ecuación $F(x, y) =$ constante puede expresarse como $u(x, y) =$ constante, en donde u es armónica si y sólo si la expresión siguiente es función de F:

$$\frac{\partial^2 F/\partial x^2 + \partial^2 F/\partial y^2}{(\partial F/\partial x)^2 + (\partial F/\partial y)^2}$$

3.107. Ilustre el resultado del problema 3.106 considerando $(y + 2)/(x - 1) =$ constante.

3.108. Sea $f'(z) = 0$ en una región $\mathcal{R}$. Compruebe que $f(z)$ debe ser una constante en $\mathcal{R}$.

3.109. Suponga que $w = f(z)$ es analítica y se expresa en coordenadas polares (r, θ). Demuestre que

$$\frac{dw}{dz} = e^{-i\theta}\frac{\partial w}{\partial r}$$

3.110. Suponga que u y v son funciones armónicas conjugadas. Verifique que

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx$$

3.111. Dadas u y v armónicas en una región $\mathcal{R}$, demuestre que la expresión siguiente es analítica en $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

3.112. Compruebe que $f(z) = |z|^4$ es diferenciable pero no analítica en $z = 0$.

3.113. Dada $f(z)$ analítica en una región $\mathcal{R}$ y $f(z)f'(z) \neq 0$ en $\mathcal{R}$, demuestre que $\psi = \ln |f(z)|$ es armónica en $\mathcal{R}$.

3.114. Exprese las ecuaciones de Cauchy-Riemann en términos de las coordenadas curvilíneas (ξ, η), donde $x = e^{\xi} \cosh \eta$, $y = e^{\xi} \operatorname{senh} \eta$.

3.115. Muestre que una solución de la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E_0 \cos \omega t$$

donde L, R, C, E_0 y ω son constantes, está dada por

$$Q = \operatorname{Re}\left\{\frac{E_0 e^{i\omega t}}{i\omega[R + i(\omega L - 1/\omega C)]}\right\}$$

Esta ecuación surge en la *teoría de la corriente alterna* de la electricidad.

[*Sugerencia.* Reescriba el lado derecho como $E_0 e^{i\omega t}$ y después suponga una solución de la forma $Ae^{i\omega t}$, donde hay que determinar A].

3.116. Muestre que $\nabla^2\{f(z)\}^n = n^2|f(z)|^{n-2}|f'(z)|^2$, con restricciones a $f(z)$.

3.117. Resuelva la ecuación diferencial parcial $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \dfrac{8}{x^2 + y^2}$.

www.FreeLibros.me

3.118. Demuestre que $\nabla^4 U = \nabla^2(\nabla^2 U) = \dfrac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 16\dfrac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}$.

3.119. Resuelva la ecuación diferencial parcial $\dfrac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 36(x^2 + y^2)$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

3.43. *a*) $12 + 4i$, *b*) $-5i$ y *c*) $3/2 + 3i/2$

3.46. *a*) $-i$, $i/(z+i)^2$; *b*) $-1 \pm 2i$, $(19 + 4z - 3z^2)/(z^2 + 2z + 5)^2$

3.50. *b*) $2y + x^2 - y^2$, *c*) $iz^2 + 2z$

3.51. *b*) $x^2 - y^2 + 2xy - 3x - 2y$

3.53. *a*) $v = 4xy - x^3 + 3xy^2 + c$, $f(z) = 2z^2 - iz^3 + ic$, *b*) no es armónica
c) $ye^x \cos y + xe^x \operatorname{sen} y + c$, $ze^z + ic$ y *d*) $-e^{2xy}\cos(x^2 - y^2) + c$, $-ie^{ix^2} + ic$

3.54. *b*) $-2\tan^{-1}\{(y-2)/(x-1)\}$ y *c*) $2i\ln(z - 1 - 2i)$

3.55. $6 + 3i$

3.56. *a*) $-8\Delta z + i(\Delta z)^2 = -8\,dz = i(dz)^2$, *b*) $-8\,dz$ y *c*) $i(dz)^2$

3.57. *a*) $38 - 2i$, *b*) $6 - 42i$

3.58. *a*) $-4\Delta z + 3i(\Delta z)^2$, *b*) $-4\,dz$, *c*) $-4 + 3i\Delta z$ y *d*) -4

3.63. *a*) $(2 + 8i)z - 3$, *b*) $4z + i$, *c*) $5i/(z + 2i)^2$ y *d*) $4i - 8z$, *e*) $-3i(iz - 1)^{-4}$

3.64. *a*) $-6/5 + 3i/5$ y *b*) $-108 - 78i$

3.67. *a*) $3\operatorname{sen}(z/2)\cos(z/2)$, *b*) $3(2z - 3)\tan^2(z^2 - 3z + 4i)\sec^2(z^2 - 3z + 4i)$ *c*) $\sec z$
d) $\dfrac{-z\csc\{(z^2+1)^{1/2}\}\cot\{(z^2+1)^{1/2}\}}{(z^2+1)^{1/2}}$ y *e*) $(1 - z^2)\operatorname{sen}(z + 2i) + 2z\cos(z + 2i)$

3.71. *a*) $2\operatorname{sen}^{-1}(2z-1)/(z-z^2)^{1/2}$, *b*) $-2z/(1+z^4)\cot^{-1} z^2$, *c*) $-(\operatorname{sen} z + \cos z)/(\operatorname{sen} 2z)^{1/2}$,
d) $-1/2(z + 1 + 3i)(z + 3i)^{1/2}$, *e*) $(\csc 2z)(1 - 2z\cot 2z)/(1 - z^2\csc^2 2z)$ y *f*) $1/\sqrt{z^2 - 3z + 2i}$

3.72. $-3[\cosh(3\zeta + 2i)]/2(2z - z^2)^{1/2}t^{1/2}$

3.73. $\sec(t - 3i)\{1 + t\tan(t - 3i)\}(t - t^2)^{1/2}$

3.74. $(\cos 2z)/(1 - w)$, *b*) $\{\cos^2 2z - 2(1 - w)^2 \operatorname{sen} 2z\}/(1 - w)^3$,

3.75. $-\cosh^4 \pi$

3.76. *a*) $2z^{\ln z - 1}\ln z$ y *b*) $\{[\operatorname{sen}(iz - 2)]^{\tan^{-1}(z+3i)}\}\{i\tan^{-1}(z + 3i)\cot(iz - 2) + [\ln \operatorname{sen}(iz - 2)]/[z^2 + 6iz - 8]\}$

3.77. *a*) $24\cos(4z - 2 + 2i)$, *b*) $4\csc 2z^2 - 16z^2\csc 2z^2\cot 2z^2$
c) $2\cosh(z+1)^2 + 4(z+1)^2\operatorname{senh}(z+1)^2$, *d*) $(1 - \ln z - \ln^2 z)/z^2(1 - \ln^2 z)^{3/2}$ y
e) $-i(1 + 3z)/4(1 + z)^2 z^{3/2}$

3.78. *a*) $(16 + 12i)/25$, *b*) $\left(1 - i\sqrt{3}\right)/6$ y *c*) $-1/4$

3.79. *a*) $1/6$ y *b*) $e^{m\pi i}/\cosh m\pi$

3.80. 1

3.81. $e^{-1/6}$

3.82. *a*) $z = -1 \pm i$; polos simples
b) $z = -3i$; punto de ramificación, $z = 0$; polo de orden 2
c) $z = 0$; punto de ramificación logarítmica
d) $z = 0, \pm i$; puntos de ramificación
e) $z = -i$; polo de orden 3

3.85. *a*) $z = \pm i$; polo simple
b) $z = 1/\sqrt{m\pi}$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; polos simples, $z = 0$; singularidad esencial, $z = \infty$; polo de orden 2
c) $z = 0$; punto de ramificación, $z = \infty$; punto de ramificación

3.86. *a*) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \beta$ y *b*) $2e^{-x}\operatorname{sen} y + x^2 - y^2 = \beta$

3.87. $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = \beta$

3.90. *a*) $\pm i$ y *b*) Velocidad: $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}e^{-\pi/2}$. Aceleración: 4, $2e^{-\pi/2}$

3.92. *a*) 3, $3\sqrt{1 + 16\pi^2}$ y *b*) 24, $24\sqrt{1 + 4\pi^2}$

3.93. $24\sqrt{10}$, *b*) 72

3.94. *a*) $(2xy - y^2) + i(x^2 - 2xy)$ y *b*) $2y - 2x$

3.95. *a*) 8, *b*) $12x$, *c*) $|12y|$, *d*) 0

3.96. *a*) $(-4 + 5i)/\sqrt{41}$ y *b*) $\{2x - y + i(2y - x)\}/\sqrt{5x^2 - 8xy + 5y^2}$

3.97. $x = 8t + 3$, $y = 3t + 2$

3.104. $z^3 + 2iz^2 + 6 - 2i$,

3.117. $U = \frac{1}{2}\{\ln(x^2 + y^2)\}^2 + 2\{\tan^{-1}(y/x)\}^2 + F(x + iy) + G(x - iy)$

3.119. $U = \frac{1}{16}(x^2 + y^2)^3 + (x + iy)F_1(x - iy) + G_1(x - iy) + (x - iy)F_2(x + iy) + G_2(x + iy)$

www.FreeLibros.me

CAPÍTULO 4

Integración compleja y teorema de Cauchy

4.1 INTEGRALES COMPLEJAS DE LÍNEA

Sea $f(z)$ continua en todos los puntos de una curva C [figura 4-1], la que se supondrá que tiene una longitud finita, es decir, C es una *curva rectificable.*

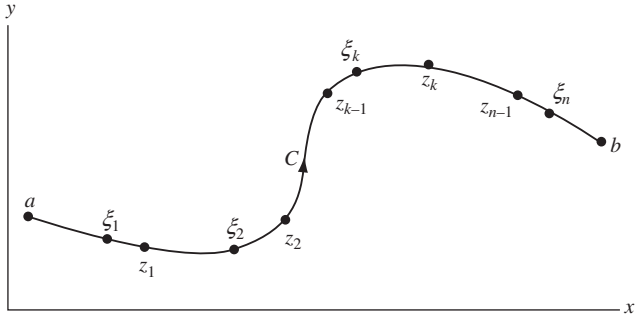


Figura 4-1

La curva C se subdivide en n partes por medio de los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, que se eligen arbitrariamente, y se establece que $a = z_0$, $b = z_n$. En cada arco que une z_{k-1} con z_k, [k de 1 a n] se elige un punto ξ_k y se forma la suma

$$S_n = f(\xi_1)(z_1 - a) + f(\xi_2)(z_2 - z_1) + \cdots + f(\xi_n)(b - z_{n-1}) \tag{4.1}$$

Al escribir $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$, la expresión anterior se convierte en

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \tag{4.2}$$

Sea un aumento de subdivisiones del número n de manera que la longitud $|\Delta z_k|$ de la mayor de las cuerdas tienda a cero. Así, como $f(z)$ es continua, la suma S_n tiende a un límite que no depende de la manera en que se haga la subdivisión; este límite se denota

$$\int_a^b f(z)\, dz \qquad \text{o} \qquad \int_C f(z)\, dz \tag{4.3}$$

www.FreeLibros.me

que se conoce como *integral compleja de línea* o tan sólo *integral de línea* de $f(z)$ a lo largo de la curva C, o *integral definida* de $f(z)$ de a a b a lo largo de la curva C. En este caso, se dice que $f(z)$ es *integrable* a lo largo de C. Si $f(z)$ es analítica en todos los puntos de una región $\mathcal{R}$ y si C es una curva que se encuentra en $\mathcal{R}$, entonces $f(z)$ es continua y por tanto integrable a lo largo de C.

4.2 INTEGRALES REALES DE LÍNEA

Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones reales de x y y, continuas en todos los puntos de la curva C. Así, la *integral real de línea* de $P\,dx + Q\,dy$ a lo largo de la curva C se define de manera similar a la integral compleja de línea y se denota

$$\int_C [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy] \quad \text{o} \quad \int_C P\,dx + Q\,dy \tag{4.4}$$

la segunda notación se usa por brevedad. Si C es suave y tiene ecuaciones paramétricas $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, donde $t_1 \leq t \leq t_2$, se observa que el valor de (4) está dado por

$$\int_{t_1}^{t_2} [P\{\phi(t), \psi(t)\}\phi'(t)\,dt + Q\{\phi(t), \psi(t)\}\psi'(t)\,dt]$$

En caso de que C sea suave a trozos (o por partes), se aplican modificaciones adecuadas (vea el problema 4.1).

4.3 RELACIÓN ENTRE INTEGRALES REALES DE LÍNEA E INTEGRALES COMPLEJAS DE LÍNEA

Suponga que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv$. Así, la integral de línea compleja dada en (4.3) se expresa en términos de integrales reales de línea de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u + iv)(dx + i\,dy)\\ &= \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy\end{aligned} \tag{4.5}$$

Debido a esto, la expresión en (4.5) suele considerarse una definición de la integral compleja de línea.

4.4 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES

Suponga que $f(z)$ y $g(z)$ son integrables a lo largo de C. Entonces se tiene:

a) $\displaystyle\int_C f(z) + g(z)\}\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$

b) $\displaystyle\int_C Af(z)\,dz = A\int_C f(z)\,dz$ donde $A =$ cualquier constante

c) $\displaystyle\int_a^b f(z)\,dz = -\int_b^a f(z)\,dz$

d) $\displaystyle\int_a^b f(z)\,dz = \int_a^m f(z)\,dz + \int_m^b f(z)\,dz$ donde los puntos a, b y m están en C

e) $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq ML$

donde $|f(z)| \leq M$, es decir, M es una *cota superior* de $|f(z)|$ en C, y L es la *longitud* de C.

www.FreeLibros.me

Las propiedades anteriores pueden describirse de varias maneras. Por ejemplo, si T, U y V son puntos sucesivos de una curva, la propiedad c) se expresa como $\int_{TUV} f(z)\,dz = -\int_{VUT} f(z)\,dz$.

De igual manera, si C, C_1 y C_2 representan curvas de a a b, de a a m y de m a b, respectivamente, resulta natural considerar $C = C_1 + C_2$ y expresar la propiedad d) como

$$\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

4.5 CAMBIO DE VARIABLES

Sea $z = g(\zeta)$ una función continua de una variable compleja $\zeta = u + iv$. Suponga que la curva C en el plano z corresponde a la curva C' en el plano ζ y que la derivada $g'(\zeta)$ es continua en C'. Entonces,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f\{g(\zeta)\}g'(\zeta)\,d\zeta \tag{4.6}$$

Esta condición sin duda se satisface si g es analítica en una región que contenga a C'.

4.6 REGIONES SIMPLEMENTE Y MÚLTIPLEMENTE CONEXAS

A una región $\mathcal{R}$ se le llama *simplemente conexa* si toda curva simple cerrada [sección 3.13], que esté en $\mathcal{R}$, puede reducirse a un punto sin salirse de $\mathcal{R}$. Se dice que una región $\mathcal{R}$ que no sea simplemente conexa es *múltiplemente conexa.*

Por ejemplo, suponga que $\mathcal{R}$ es la región definida por $|z| < 2$, región sombreada en la figura 4-2. Si Γ es una curva simplemente cerrada en $\mathcal{R}$ [es decir, cuyos puntos estén en $\mathcal{R}$], se ve que esta curva puede reducirse a un punto que se encuentre en $\mathcal{R}$, por lo que no se sale de $\mathcal{R}$, de manera que $\mathcal{R}$ es simplemente conexa. Por otro lado, si $\mathcal{R}$ es la región definida como $1 < |z| < 2$, región sombreada en la figura 4-3, entonces existe una curva simple cerrada Γ en $\mathcal{R}$ que no se puede deformar a un punto sin salirse de $\mathcal{R}$, por lo que $\mathcal{R}$ es múltiplemente conexa.

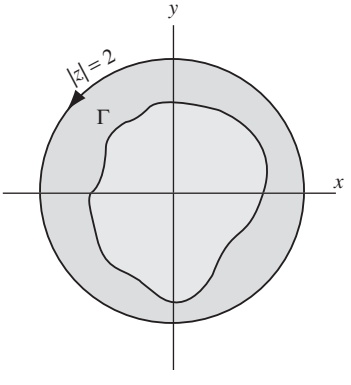


Figura 4-2

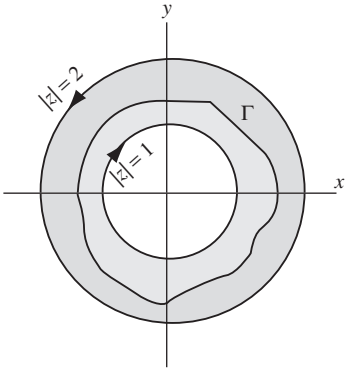


Figura 4-3

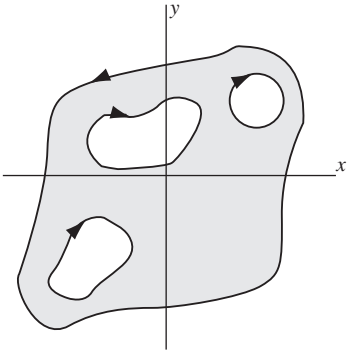


Figura 4-4

Por intuición, una región simplemente conexa es una región que no tiene "hoyos", mientras que una región múltiplemente conexa es una región con "hoyos". Las regiones múltiplemente conexas de las figuras 4-3 y 4-4, respectivamente, tienen uno y tres "hoyos".

www.FreeLibros.me

4.7 TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN

Toda curva continua cerrada que no se interseque a sí misma y que tenga o no longitud finita se llama *curva de Jordan* [vea el problema 4.30]. Un teorema importante, aunque muy difícil de demostrar, que parece intuitivamente obvio es el siguiente.

Teorema de la curva de Jordan. Una curva de Jordan divide el plano en dos regiones que tienen a la curva como frontera común. La región, que queda acotada [es decir, que todos sus puntos satisfacen $|z| < M$, donde M es una constante positiva], se llama *interior* de la curva, mientras que la otra región se llama *exterior* de la curva.

Con el teorema de la curva de Jordan se muestra que la región interior de una curva simple cerrada es una región simplemente conexa cuya frontera es la curva simple cerrada.

4.8 CONVENCIÓN RESPECTO DE LA ORIENTACIÓN DE UNA TRAYECTORIA CERRADA

Se dice que la frontera C de una región se recorre en *sentido* o en *dirección positiva* si un observador que la recorra en esa dirección [y perpendicular al plano] tiene esta región a su izquierda. Esta convención produce las direcciones que se indican mediante flechas en las figuras 4-2, 4-3 y 4-4. Con el símbolo especial

$$\oint_C f(z)\,dz$$

se denota la integración de $f(z)$ alrededor de la frontera C en sentido positivo. En el caso de una circunferencia [figura 4-2], la dirección positiva es la *dirección en contra de las manecillas del reloj.* A la integral alrededor de C se le suele llamar *integral de contorno*.

4.9 TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones continuas con derivadas parciales continuas en una región $\mathcal{R}$ y en su frontera C. El *teorema de Green* establece que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{4.7}$$

Este teorema es válido para regiones tanto simplemente conexas como múltiplemente conexas.

4.10 FORMA COMPLEJA DEL TEOREMA DE GREEN

Sea $F(z, \bar{z})$ una función continua con derivadas parciales continuas en una región $\mathcal{R}$ y en su frontera C, donde $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ son coordenadas conjugadas complejas [vea la página 7]. El teorema de Green se expresa en forma compleja

$$\oint_C F(z, \bar{z})\,dz = 2i \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\,dA \tag{4.8}$$

donde dA representa el elemento de área $dx\,dy$.

En el problema 4.56 se presenta una generalización de la expresión (4.8).

www.FreeLibros.me

4.11 TEOREMA DE CAUCHY. EL TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

Sea $f(z)$ analítica en una región $\mathcal{R}$ y en su frontera C. Entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{4.9}$$

Este teorema fundamental, que se llama *teorema de la integral de Cauchy* o simplemente *teorema de Cauchy,* es válido tanto para regiones simplemente conexas como para regiones múltiplemente conexas. Primero se demostró con el teorema de Green y la restricción de que $f'(z)$ fuera continua en $\mathcal{R}$ [vea el problema 4.11]. Pero *Goursat* dio una prueba en la que eliminaba esta restricción. Debido a esto, a este teorema también se le llama *teorema de Cauchy-Goursat* [vea los problemas 4.13 a 4.16] cuando se desea destacar la eliminación de la restricción.

4.12 TEOREMA DE MORERA

Sea $f(z)$ continua en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$ y suponga que

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{4.10}$$

alrededor *de toda* curva simple cerrada C en $\mathcal{R}$. Entonces, $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

A este teorema, debido a *Morera*, se le conoce cómo el *recíproco del teorema de Cauchy*. Este teorema se extiende a regiones múltiplemente conexas. En el problema 4.27 se da una prueba en la que se supone que $f'(z)$ es continua en $\mathcal{R}$. En el problema 5.7 del capítulo 5 se da una prueba en la que se elimina esta restricción.

4.13 INTEGRALES INDEFINIDAS

Suponga que $f(z)$ y $F(z)$ son analíticas en una región $\mathcal{R}$ y que $F'(z) = f(z)$. Entonces se dice que $F(z)$ es una *integral indefinida* o una *antiderivada* de $f(z)$, y se escribe

$$F(z) = \int f(z)\,dz \tag{4.11}$$

Como en el caso de las variables reales, dos integrales indefinidas difieren en una constante. A esto se debe que se agregue una constante arbitraria c en el lado derecho de la expresión (4.11).

EJEMPLO 4.1: Como $\dfrac{d}{dz}\left(3z^2 - 4\operatorname{sen} z\right) = 6z - 4\cos z$, se escribe

$$\int (6z - 4\cos z)\,dz = 3z^2 - 4\operatorname{sen} z + c$$

4.14 INTEGRALES DE FUNCIONES ESPECIALES

Con los resultados de la página 80 [o por diferenciación directa] se obtienen los que se presentan en la figura 4-5 (sin la constante de integración).

www.FreeLibros.me

1. $\displaystyle\int z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{dz}{z} = \ln z$

3. $\displaystyle\int e^z\,dz = e^z$

4. $\displaystyle\int a^z\,dz = \frac{a^z}{\ln a}$

5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} z\,dz = -\cos z$

6. $\displaystyle\int \cos z\,dz = \operatorname{sen} z$

7. $\displaystyle\int \tan z\,dz = \ln \sec z = -\ln \cos z$

8. $\displaystyle\int \cot z\,dz = \ln \operatorname{sen} z$

9. $\displaystyle\int \sec z\,dz = \ln(\sec z + \tan z) = \ln \tan(z/2 + \pi/4)$

10. $\displaystyle\int \csc z\,dz = \ln(\csc z - \cot z) = \ln \tan(z/2)$

11. $\displaystyle\int \sec^2 z\,dz = \tan z$

12. $\displaystyle\int \csc^2 z\,dz = -\cot z$

13. $\displaystyle\int \sec z \tan z\,dz = \sec z$

14. $\displaystyle\int \csc z \cot z\,dz = -\csc z$

15. $\displaystyle\int \operatorname{senh} z\,dz = \cosh z$

16. $\displaystyle\int \cosh z\,dz = \operatorname{senh} z$

17. $\displaystyle\int \tanh z\,dz = \ln \cosh z$

18. $\displaystyle\int \coth z\,dz = \ln \operatorname{senh} z$

19. $\displaystyle\int \operatorname{sech} z\,dz = \tan^{-1}(\operatorname{senh} z)$

20. $\displaystyle\int \operatorname{csch} z\,dz = -\coth^{-1}(\cosh z)$

21. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 z\,dz = \tanh z$

22. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 z\,dz = -\coth z$

23. $\displaystyle\int \operatorname{sech} z \tanh z\,dz = -\operatorname{sech} z$

24. $\displaystyle\int \operatorname{csch} z \coth z\,dz = -\operatorname{csch} z$

25. $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right)$

26. $\displaystyle\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a} \quad \text{o} \quad -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{z}{a}$

27. $\displaystyle\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$

28. $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{z}{a} \quad \text{o} \quad -\cos^{-1}\frac{z}{a}$

29. $\displaystyle\int \frac{dz}{z\sqrt{a^2 \pm z^2}} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{z}{a + \sqrt{a^2 \pm z^2}}\right)$

30. $\displaystyle\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{z} \quad \text{o} \quad \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{z}{a}$

31. $\displaystyle\int \sqrt{z^2 \pm a^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{z^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right)$

32. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - z^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{a^2 - z^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{z}{a}$

33. $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen} bz\,dz = \frac{e^{az}(a \operatorname{sen} bz - b\cos bz)}{a^2 + b^2}$

34. $\displaystyle\int e^{ax} \cos bz\,dz = \frac{e^{ax}(a\cos bz + b \operatorname{sen} bz)}{a^2 + b^2}$

Figura 4-5

www.FreeLibros.me

4.15 ALGUNAS CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE CAUCHY

Sea $f(z)$ analítica en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$. Entonces, son válidos los teoremas siguientes.

TEOREMA 4.1. Suponga que a y z son dos puntos cualesquiera en $\mathcal{R}$. Entonces,

$$\int_a^z f(z)\,dz$$

es *independiente de la trayectoria* en $\mathcal{R}$ que une a y z.

TEOREMA 4.2. Suponga que a y z son dos puntos cualesquiera en $\mathcal{R}$ y

$$G(z) = \int_a^z f(z)\,dz \tag{4.12}$$

Entonces, $G(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$ y $G'(z) = f(z)$.

Algunas veces puede haber confusión debido a que la variable de integración z en la expresión (4.12) es la misma que el límite superior de integración. Como una integral definida sólo depende de la curva y de los límites de integración, puede emplearse cualquier símbolo para la variable de integración y, por esto, a la variable se le llama *variable ficticia* o *símbolo ficticio*. Por tanto, la expresión en (4.12) se escribe de manera equivalente como

$$G(z) = \int_a^z f(\zeta)\,d\zeta \tag{4.13}$$

TEOREMA 4.3. Suponga que a y b son dos puntos cualesquiera en $\mathcal{R}$ y que $F'(z) = f(z)$. Entonces,

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a) \tag{4.14}$$

Lo que también se escribe de la manera siguiente, ya conocida del cálculo elemental.

$$\int_a^b F'(z)\,dz = F(z)\Big|_a^b \quad \text{o} \quad [F(z)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{4.15}$$

EJEMPLO 4.2: $\displaystyle\int_{3i}^{1-i} 4z\,dz = 2z^2\Big|_{3i}^{1-i} = 2(1-i)^2 - 2(3i)^2 = 18 - 4i$

TEOREMA 4.4. Sea $f(z)$ una función analítica en una región limitada por dos curvas simples cerradas C y C_1 [donde C_1 se encuentra en el interior de C, como se muestra en la figura 4-6a)] y sobre estas curvas. Así,

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz \tag{4.16}$$

donde C y C_1 se recorren en sentido positivo en relación con sus interiores [en sentido contrario a las manecillas del reloj en la figura 4-6a)].

Esto muestra que si se desea integrar $f(z)$ a lo largo de la curva C, la curva C puede sustituirse por cualquier curva C_1 siempre que $f(z)$ sea analítica en la región entre C y C_1, como en la figura 4-6a).

www.FreeLibros.me

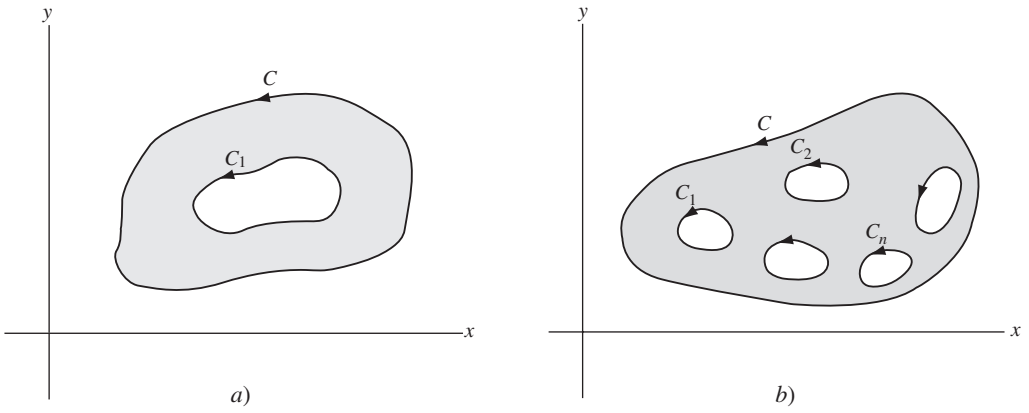


Figura 4-6

TEOREMA **4.5.** Sea $f(z)$ una función analítica en una región limitada por las curvas simples cerradas que no se superponen $C, C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$, donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se encuentran en el interior de C [como en la figura 4-6*b*)], y sobre estas curvas. Entonces,

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,dz \tag{4.17}$$

Esto es una generalización del teorema 4.4.

PROBLEMAS RESUELTOS

INTEGRALES DE LÍNEA

4.1. Evalúe $\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2)\,dx + (3x - y)\,dy$ a lo largo de *a*) la parábola $x = 2t$, $y = t^2 + 3$; *b*) las rectas de (0, 3) a (2, 3) y de (2, 3) a (2, 4) y *c*) una recta de (0, 3) a (2, 4).

Solución

a) Los puntos (0, 3) y (2, 4), que se encuentran en la parábola, corresponden a $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente. Así, la integral dada es igual a

$$\int_{t=0}^{1} [2(t^2 + 3) + (2t)^2]2\,dt + [3(2t) - (t^2 + 3)]2t\,dt = \int_0^1 (24t^2 + 12 - 2t^3 - 6t)\,dt = \frac{33}{2}$$

b) A lo largo de la recta de (0, 3) a (2, 3), $y = 3$, $dy = 0$ y la integral de línea es igual a

$$\int_{x=0}^{2} (6 + x^2)\,dx + (3x - 3)0 = \int_{x=0}^{2} (6 + x^2)\,dx = \frac{44}{3}$$

A lo largo de la recta de (2, 3) a (2, 4), $x = 2$, $dx = 0$ y la integral de línea es igual a

$$\int_{y=3}^{4} (2y + 4)0 + (6 - y)\,dy = \int_{y=3}^{4} (6 - y)\,dy = \frac{5}{2}$$

Por tanto, el valor buscado $= 44/3 + 5/2 = 103/6$.

www.FreeLibros.me

c) Una ecuación de la recta que une (0, 3) y (2, 4) es $2y - x = 6$. Se despeja x y se tiene $x = 2y - 6$. Entonces, la integral de línea es

$$\int_{y=3}^{4} \left[2y + (2y-6)^2\right] 2\,dy + [3(2y-6) - y]\,dy = \int_{3}^{4} (8y^2 - 39y + 54)\,dy = \frac{97}{6}$$

También se obtiene este resultado con $y = \frac{1}{2}(x+6)$.

4.2. Evalúe $\int_C \bar{z}\,dz$, desde $z = 0$ hasta $z = 4 + 2i$, a lo largo de la curva C dada por *a*) $z = t^2 + it$ y *b*) la recta de $z = 0$ a $z = 2i$ y después la recta de $z = 2i$ a $z = 4 + 2i$.

Solución

a) Los puntos $z = 0$ y $z = 4 + 2i$ en C corresponden a $t = 0$ y $t = 2$, respectivamente. Entonces, la integral de línea es igual a

$$\int_{t=0}^{2} (\overline{t^2 + it})\,d(t^2 + it) = \int_{0}^{2} (t^2 - it)(2t + i)\,dt = \int_{0}^{2} (2t^3 - it^2 + t)\,dt = 10 - \frac{8i}{3}$$

Otro método. La integral dada es igual a

$$\int_C (x - iy)(dx + i\,dy) = \int_C x\,dx + y\,dy + i\int_C x\,dy - y\,dx$$

Las ecuaciones paramétricas de C son $x = t^2$, $y = t$ de $t = 0$ a $t = 2$. Entonces, la integral de línea es igual a

$$\int_{t=0}^{2} (t^2)(2t\,dt) + (t)(dt) + i\int_{t=0}^{2} (t^2)(dt) - (t)(2t\,dt)$$

$$= \int_{0}^{2} (2t^3 + t)\,dt + i\int_{0}^{2} (-t^2)\,dt = 10 - \frac{8i}{3}$$

b) La integral de línea dada es igual a

$$\int_C (x - iy)(dx + i\,dy) = \int_C x\,dx + y\,dy + i\int_C x\,dy - y\,dx$$

La recta de $z = 0$ a $z = 2i$ es la misma que la recta de (0, 0) a (0, 2), para la cual $x = 0$, $dx = 0$ y la integral de línea es igual a

$$\int_{y=0}^{2} (0)(0) + y\,dy + i\int_{y=0}^{2} (0)(dy) - y(0) = \int_{y=0}^{2} y\,dy = 2$$

La recta de $z = 2i$ a $z = 4 + 2i$ es la misma que la recta de (0,2) a (4, 2), para la cual $y = 2$, $dy = 0$ y la integral de línea es igual a

$$\int_{x=0}^{4} x\,dx + 2\cdot 0 + i\int_{x=0}^{4} x\cdot 0 - 2\,dx = \int_{0}^{4} x\,dx + i\int_{0}^{4} -2\,dx = 8 - 8i$$

Por tanto, el valor buscado $= 2 + (8 - 8i) = 10 - 8i$.

www.FreeLibros.me

4.3. Suponga que $f(z)$ es integrable a lo largo de una curva C de longitud finita L, y que existe un número positivo M tal que $|f(z)| \leq M$ en C. Demuestre que

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML$$

Solución

Por definición, con la notación de la página 111, se tiene

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \tag{1}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{n} |\, f(\xi_k)\,|\ |\Delta z_k| \\ &\leq M \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \\ &\leq ML \end{aligned} \tag{2}$$

donde se aprovechó que $|f(z)| \leq M$ para todos los puntos z en C y que $\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$ representa las suma de todas las longitudes de cuerda que unen los puntos z_{k-1} y z_k, donde $k = 1, 2, \ldots, n$, y que esta suma no es mayor a la longitud de C.

Se toman límites a ambos lados de (2), con (1), y se obtiene el resultado buscado. De manera más general, es posible mostrar que

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \int_C |\, f(z)|\ |dz|$$

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

4.4. Demuestre el teorema de Green en el plano si C es una curva simple cerrada que tiene la propiedad de que cualquier recta paralela a los ejes coordenados corta a C a lo más en dos puntos.

Solución

Sean las ecuaciones de las curvas EGF y EHF (vea la figura 4-7) $y = Y_1(x)$ y $y = Y_2(x)$, respectivamente. Si $\mathcal{R}$ es la región limitada por C, se tiene

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy &= \int_{x=e}^{f} \left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy \right] dx \\ &= \int_{x=e}^{f} P(x, y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)}\, dx = \int_{e}^{f} [P(x, Y_2) - P(x, Y_1)]\, dx \\ &= -\int_{e}^{f} P(x, Y_1)\, dx - \int_{f}^{e} P(x, Y_2)\, dx = -\oint_C P\, dx \end{aligned}$$

Entonces,

$$\oint_C P\, dx = -\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy \tag{1}$$

www.FreeLibros.me

De manera semejante, sean las ecuaciones de las curvas GEH y GFH, $x = X_1(y)$ y $x = X_2(y)$, respectivamente. Entonces,

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=g}^{h}\left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right]dy = \int_{g}^{h}[Q(X_2, y) - Q(X_1, y)]\,dy$$

$$= \int_{h}^{g} Q(X_1, y)\,dy + \int_{g}^{h} Q(X_2, y)\,dy = \oint_C Q\,dy$$

Así,

$$\oint_C Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \tag{2}$$

Se suman (1) y (2),

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

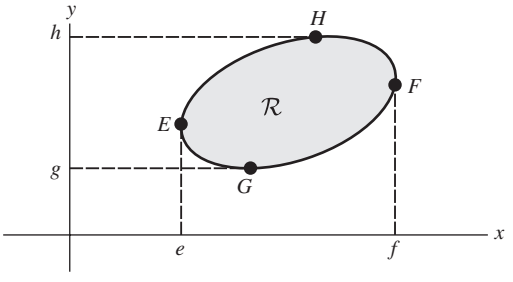


Figura 4-7

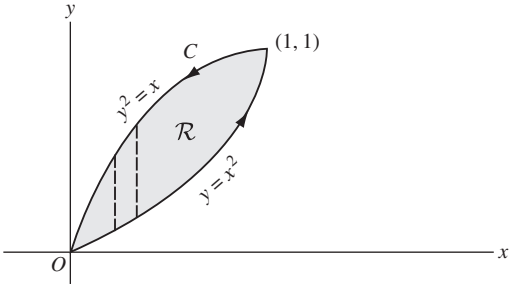


Figura 4-8

4.5. Verifique el teorema de Green en el plano para

$$\oint_C (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$$

donde C es la curva cerrada de la región limitada por $y = x^2$ y $y^2 = x$.

Solución

Las curvas planas $y = x^2$ y $y^2 = x$ se intersecan en (0, 0) y (1, 1). Al recorrer C, la dirección positiva es la que se muestra en la figura 4-8.

A lo largo de $y = x^2$, la integral de línea es igual a

$$\int_{x=0}^{1} \left\{(2x)(x^2) - x^2\right\} dx + \left\{x + (x^2)^2\right\} d(x^2) = \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5)\,dx = \frac{7}{6}$$

A lo largo de $y^2 = x$, la integral de línea es igual a

$$\int_{y=1}^{0} \{2(y^2)(y) - (y^2)^2\}\,d(y^2) + \{y^2 + y^2\}\,dy = \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2)\,dy = -\frac{17}{15}$$

www.FreeLibros.me

Por tanto, la integral buscada $= 7/6 - 17/15 = 1/30$. Por otro lado,

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left\{\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2)\right\} dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} (1 - 2x)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} (y - 2xy)\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_{0}^{1} (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3)\,dx = \frac{1}{30}$$

Con lo que se verifica el teorema de Green.

4.6. Amplíe la prueba para el teorema de Green en el plano del problema 4.4 a las curvas C a las que rectas paralelas a los ejes coordenados pueden cortar en más de dos puntos.

Solución

Considere una curva simple cerrada C, como la que se muestra en la figura 4-9, a la que rectas paralelas a los ejes pueden cortar en más de dos puntos. Mediante el trazo de la recta ST, esta región se divide en dos regiones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, que son del tipo de regiones consideradas en el problema 4.4 y a las cuales puede aplicarse el teorema de Green, es decir,

$$\int_{STUS} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{1}$$

$$\int_{SVTS} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{2}$$

Se suman los lados izquierdos de (1) y (2), sin el integrando $P\,dx + Q\,dy$, y se tiene

$$\int_{STUS} + \int_{SVTS} = \int_{ST} + \int_{TUS} + \int_{SVT} + \int_{TS} = \int_{TUS} + \int_{SVT} = \int_{TUSVT}$$

y se aprovecha que $\int_{ST} = -\int_{TS}$.

Se suman los lados derechos de (1) y (2), sin el integrando,

$$\iint_{\mathcal{R}_1} + \iint_{\mathcal{R}_2} = \iint_{\mathcal{R}}$$

Por tanto,

$$\int_{TUSVT} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

y se demuestra el teorema. Se comprobó el teorema de Green para la región simplemente conexa de la figura 4-9 limitada por la curva simple cerrada C. En el caso de regiones más complicadas puede ser necesario trazar más rectas, como la recta ST, para establecer el teorema.

Como se muestra en el problema 4.7, el teorema de Green también es válido para regiones múltiplemente conexas.

www.FreeLibros.me

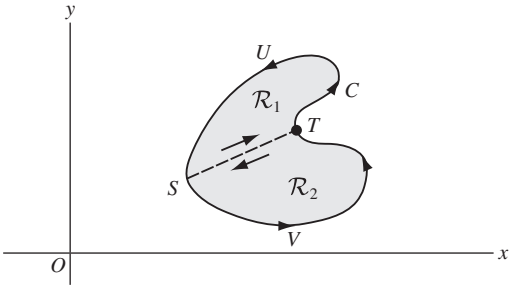


Figura 4-9

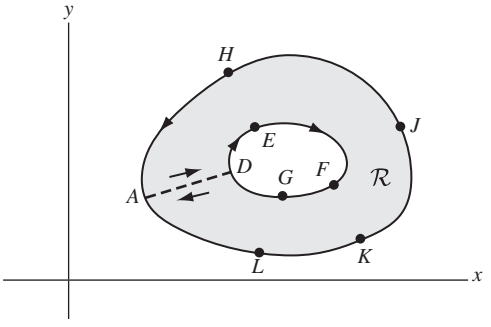


Figura 4-10

4.7. Demuestre que el teorema de Green en el plano también es válido para una región múltiplemente conexa $\mathcal{R}$ como la que se muestra en la figura 4-10.

Solución

La frontera de $\mathcal{R}$, que consta de la frontera exterior *AHJKLA* y de la frontera interior *DEFGD*, se va a recorrer en dirección positiva de manera que esta región esté siempre a la izquierda de la persona que la recorre. Como se ve, las direcciones positivas son las que se indican en la figura.

Con objeto de mostrar que el teorema es válido para estas regiones, se traza una recta, tal como *AD*, llamada *corte transversal*, que conecte las fronteras exterior e interior. La región limitada por *ADEFGDALKJHA* es simplemente conexa, y por tanto el teorema de Green es válido. Entonces,

$$\oint_{ADEFGDALKJHA} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Pero la integral de la izquierda, sin el integrando, es igual a

$$\int_{AD} + \int_{DEFGD} + \int_{DA} + \int_{ALKJHA} = \int_{DEFGD} + \int_{ALKJHA}$$

porque $\int_{AD} = -\int_{DA}$. Así, si C_1 es la curva *ALKJHA*, C_2 es la curva *DEFGD* y C la frontera de $\mathcal{R}$ que consta de C_1 y C_2 (recorridas en direcciones positivas respecto de $\mathcal{R}$), por lo que $\int_{C_1} + \int_{C_2} = \oint_C$ y por tanto,

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

4.8. Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas en todos los puntos de una región simplemente conexa $\mathcal{R}$. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$ alrededor de toda trayectoria cerrada C en $\mathcal{R}$ es que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ idénticamente en $\mathcal{R}$.

Solución

Suficiencia. Suponga que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Entonces, de acuerdo con el teorema de Green,

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por C.

www.FreeLibros.me

Necesidad. Suponga que $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$ alrededor de toda trayectoria cerrada C en $\mathcal{R}$ y que $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ en algún punto de $\mathcal{R}$. En particular, suponga que $\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x > 0$ en el punto (x_0, y_0).

Por hipótesis, $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ son continuas en $\mathcal{R}$, de manera que debe haber una región τ que contenga a (x_0, y_0) como punto interior para el cual $\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x > 0$. Si Γ es la frontera de τ, entonces, de acuerdo con el teorema de Green,

$$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\tau} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy > 0$$

lo que contradice la hipótesis de que $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$ para *todas* las curvas cerradas en $\mathcal{R}$. Por tanto, $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ no puede ser positivo.

De manera similar, puede mostrarse que $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ no puede ser negativo, con lo que se concluye que debe ser idénticamente cero, es decir, $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ idénticamente en $\mathcal{R}$.

Estos resultados pueden extenderse a regiones múltiplemente conexas.

4.9. P y Q se definen como en el problema 4.8. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que $\int_A^B P\,dx + Q\,dy$ sea independiente de la trayectoria en $\mathcal{R}$ que une los puntos A y B es que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ idénticamente en $\mathcal{R}$.

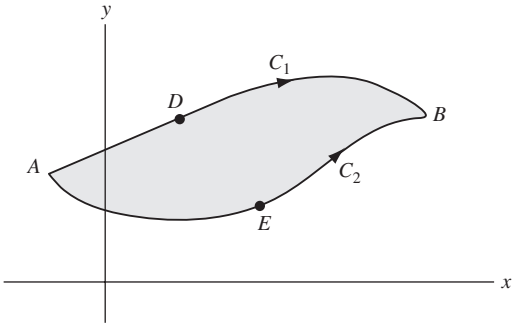


Figura 4-11

Solución

Suficiencia. Si $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, entonces, según el problema 4.8,

$$\int_{ADBEA} P\,dx + Q\,dy = 0$$

[vea la figura 4-11]. De acuerdo con esto, omitiendo por brevedad el integrando $P\,dx + Q\,dy$, se tiene

$$\int_{ADB} + \int_{BEA} = 0, \quad \int_{ADB} = -\int_{BEA} = \int_{AEB} \quad \text{así} \quad \int_{C_1} = \int_{C_2}$$

es decir, la integral es independiente de la trayectoria.

Necesidad. Si esta integral es independiente de la trayectoria, entonces, para todas las trayectorias C_1 y C_2 en $\mathcal{R}$, se tiene

$$\int_{C_1} = \int_{C_2}, \quad \int_{ADB} = \int_{AEB} \quad \text{y} \quad \int_{ADBEA} = 0$$

De donde se concluye que la integral de línea alrededor de cualquier trayectoria cerrada en $\mathcal{R}$ es cero, y por ende, conforme al problema 4.8, $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

Estos resultados pueden extenderse a regiones múltiplemente conexas.

FORMA COMPLEJA DEL TEOREMA DE GREEN

4.10. Suponga que $B(z, \bar{z})$ es continua y tiene derivadas parciales continuas en una región $\mathcal{R}$ y en su frontera C, donde $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$. Demuestre que el teorema de Green se expresa en forma compleja como

$$\oint_C B(z, \bar{z})\,dz = 2i \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial B}{\partial \bar{z}}\,dx\,dy$$

www.FreeLibros.me

Solución

Sea $B(z, \bar{z}) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Entonces, según el teorema de Green, se tiene

$$\begin{aligned}
\oint_C B(z, \bar{z})\, dz &= \oint_C (P + iQ)(dx + i\, dy) = \oint_C P\, dx - Q\, dy + i \oint_C Q\, dx + P\, dy \\
&= -\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy + i \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy \\
&= i \iint_{\mathcal{R}} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right] dx\, dy \\
&= 2i \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial B}{\partial \bar{z}}\, dx\, dy
\end{aligned}$$

de acuerdo con el problema 3.34 de la página 101. Esto se expresa también en términos del rotacional B [vea la página 85].

TEOREMA DE CAUCHY Y TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

4.11. Demuestre el teorema de Cauchy $\oint_C f(z)\, dz = 0$ si $f(z)$ es analítica y su derivada $f'(z)$ es continua en todos los puntos interiores de una curva simple cerrada C y sobre C.

Solución

Como $f(z) = u + iv$ es analítica y tiene una derivada continua

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

se sigue que las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

son continuas en el interior de C y sobre C. Por tanto, el teorema de Green es aplicable y se tiene

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z)\, dz &= \oint_C (u + iv)(dx + i\, dy) = \oint_C u\, dx - v\, dy + i \oint_C v\, dx + u\, dy \\
&= \iint_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy + i \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy = 0
\end{aligned}$$

con las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1) y (2).

Al aprovechar que el teorema de Green es aplicable a regiones múltiplemente conexas, este resultado se extiende a regiones múltiplemente conexas en las condiciones dadas para $f(z)$.

El *teorema de Cauchy-Goursat* [vea los problemas 4.13 a 4.16] elimina la restricción de que $f'(z)$ sea continua.

Otro método

Este resultado se obtiene también a partir de la forma compleja del teorema de Green [problema 4.10] al observar que si $B(z, \bar{z}) = f(z)$ es independendiente de $\bar{z}$, entonces $\partial B/\partial \bar{z} = 0$ y por tanto $\oint_C f(z)\, dz = 0$.

www.FreeLibros.me

4.12. Demuestre *a*) $\oint_C dz = 0$, *b*) $\oint_C z\,dz = 0$ y *c*) $\oint_C (z - z_0)\,dz = 0$, donde C es una curva simple cerrada y z_0 es una constante.

Solución

Esto es consecuencia inmediata del teorema de Cauchy, pues en el interior de C las funciones 1, z y $z - z_0$ son analíticas y tienen derivadas continuas.

A este resultado también se llega directamente a partir de la definición de integral (vea el problema 4.90).

4.13. Demuestre el teorema de *Cauchy-Goursat* en el caso de un triángulo.

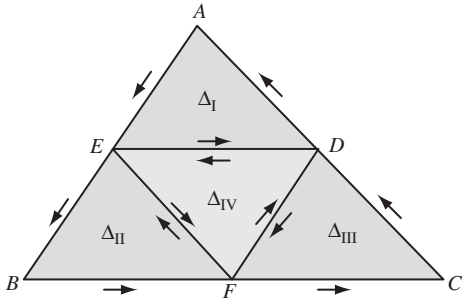


Figura 4-12

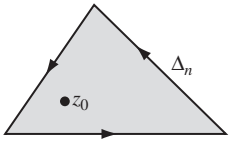


Figura 4-13

Solución

Considere un triángulo en el plano z, como ABC en la figura 4-12, el que por brevedad se denota Δ. Se unen los puntos medios D, E y F de los lados AB, AC y BC, respectivamente, para formar cuatro triángulos (Δ_{I}, Δ_{II}, Δ_{III} y Δ_{IV}).

Si $f(z)$ es analítica en el interior del triángulo ABC, se tiene, al omitir en el lado derecho el integrando,

$$\begin{aligned}
\oint_{ABCA} f(z)\,dz &= \int_{DAE} + \int_{EBF} + \int_{FCD} \\
&= \left\{\int_{DAE} + \int_{ED}\right\} + \left\{\int_{EBF} + \int_{FE}\right\} + \left\{\int_{FCD} + \int_{DF}\right\} + \left\{\int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FD}\right\} \\
&= \int_{DAED} + \int_{EBFE} + \int_{FCDF} + \int_{DEFD} \\
&= \oint_{\Delta_{\mathrm{I}}} f(z)\,dz + \oint_{\Delta_{\mathrm{II}}} f(z)\,dz + \oint_{\Delta_{\mathrm{III}}} f(z)\,dz + \oint_{\Delta_{\mathrm{IV}}} f(z)\,dz
\end{aligned}$$

donde, en el segundo renglón, se aprovecha que

$$\int_{ED} = -\int_{DE}, \qquad \int_{FE} = -\int_{EF}, \qquad \int_{DF} = -\int_{FD}$$

Entonces,

$$\left|\oint_{\Delta} f(z)\,dz\right| \le \left|\oint_{\Delta_{\mathrm{I}}} f(z)\,dz\right| + \left|\oint_{\Delta_{\mathrm{II}}} f(z)\,dz\right| + \left|\oint_{\Delta_{\mathrm{III}}} f(z)\,dz\right| + \left|\oint_{\Delta_{\mathrm{IV}}} f(z)\,dz\right| \tag{1}$$

Sea Δ_{I} el triángulo que corresponde al término de la derecha de (1) que tiene el valor mayor (si hay dos o más de estos términos, Δ_1 es cualquiera de ellos). Así,

$$\left|\oint_{\Delta} f(z)\,dz\right| \le 4\left|\oint_{\Delta_1} f(z)\,dz\right| \tag{2}$$

www.FreeLibros.me

Si se unen los puntos medios de los lados del triángulo Δ_1 se obtiene, de manera similar, un triángulo Δ_2 tal que

$$\left| \oint_{\Delta_1} f(z)\,dz \right| \leq 4 \left| \oint_{\Delta_2} f(z)\,dz \right| \tag{3}$$

de manera que

$$\left| \oint_{\Delta} f(z)\,dz \right| \leq 4^2 \left| \oint_{\Delta_2} f(z)\,dz \right| \tag{4}$$

Después de n pasos, se obtiene un triángulo Δ_n tal que

$$\left| \oint_{\Delta} f(z)\,dz \right| \leq 4^n \left| \oint_{\Delta_n} f(z)\,dz \right| \tag{5}$$

Ahora, $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ es una sucesión de triángulos, cada uno de los cuales está contenido en el anterior (es decir, una sucesión de *triángulos anidados*), y existe un punto z_0 que está en todos los triángulos de esta sucesión.

Como z_0 está en el interior o en la frontera de Δ, se colige que $f(z)$ es analítica en z_0. Por tanto, de acuerdo con el problema 3.21 de la página 95,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0) \tag{6}$$

donde, para toda $\epsilon > 0$, puede hallarse un δ tal que $|\eta| < \epsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$.

Por tanto, al integrar ambos lados de (6) y con el problema 4.12,

$$\oint_{\Delta_n} f(z)\,dz = \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0)\,dz \tag{7}$$

Ahora, si P es el perímetro de Δ, el perímetro de Δ_n es $P_n = P/2^n$. Si z es un punto cualquiera en Δ_n, entonces, como se ve en la figura 4-13, debe tenerse que $|z - z_0| < P/2^n < \delta$. Así, de acuerdo con (7) y con la propiedad *e*) de la página 112, se tiene

$$\left| \oint_{\Delta_n} f(z)\,dz \right| = \left| \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0)\,dz \right| \leq \epsilon \cdot \frac{P}{2^n} \cdot \frac{P}{2^n} = \frac{\epsilon P^2}{4^n}$$

De este modo, la expresión en (5) se convierte en

$$\left| \oint_{\Delta} f(z)\,dz \right| \leq 4^n \cdot \frac{\epsilon P^2}{4^n} = \epsilon P^2$$

Como ϵ puede hacerse arbitrariamente pequeña, se concluye que, como se buscaba,

$$\oint_{\Delta} f(z)\,dz = 0$$

4.14. Demuestre el teorema de Cauchy-Goursat para todo polígono cerrado.

Solución

Considere, por ejemplo, un polígono cerrado *ABCDEFA* como el de la figura 4-14. Mediante el trazo de las rectas *BF, CF* y *DF*, este polígono se subdivide en triángulos. Entonces, de acuerdo con el teorema de Cauchy para triángulos [problema 4.13] y con el hecho de que las integrales a lo largo de *BF* y *FB*, *CF* y *FC*, *DF* y *FD* se cancelan,

www.FreeLibros.me

se encuentra, como se deseaba

$$\int_{ABCDEFA} f(z)\,dz = \int_{ABFA} f(z)\,dz + \int_{BCFB} f(z)\,dz + \int_{CDFC} f(z)\,dz + \int_{DEFD} f(z)\,dz = 0$$

donde se supone que $f(z)$ es analítica sobre el polígono y en su interior.

Hay que observar que este resultado se comprobó para polígonos simples, cuyos lados no se cruzan. También puede demostrarse con cualquier polígono que se interseque a sí mismo (vea el problema 4.66).

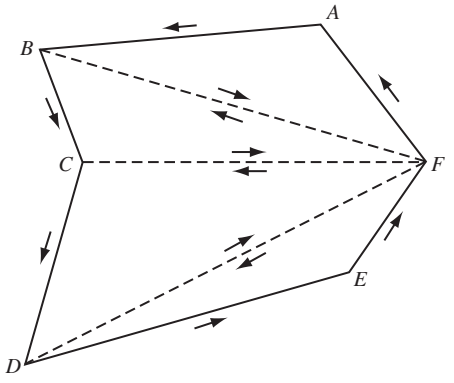


Figura 4-14

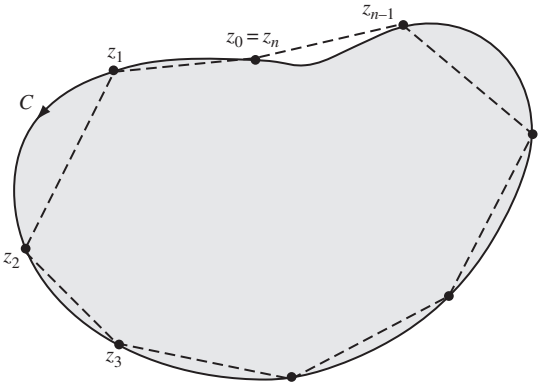


Figura 4-15

4.15. Demuestre el teorema de Cauchy-Goursat para toda curva simple cerrada.

Solución

Suponga que C está contenida en una región $\mathcal{R}$ en la que $f(z)$ es analítica.

Sobre la curva C se eligen n puntos de subdivisión $z_1, z_2, \ldots, z_n$ [figura 4-15], donde, para simplificar la anotación, se considera $z_0 = z_n$. Al unir estos puntos, se traza el polígono P.

Se define la suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k$$

donde $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Como

$$\lim S_n = \oint_C f(z)\,dz$$

donde el límite de la izquierda significa que $n \to \infty$ de manera que el mayor de las $|\Delta z_k| \to 0$. Se sigue que, dado un $\epsilon > 0$, puede elegirse un N tal que para toda $n > N$

$$\left| \oint_C f(z)\,dz - S_n \right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1}$$

Considere ahora la integral a lo largo del polígono P. Como, según el problema 4.14, ésta es cero, se tiene

$$\begin{aligned}
\oint_P f(z)\,dz = 0 &= \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} f(z)\,dz \\
&= \int_{z_0}^{z_1} \{f(z) - f(z_1) + f(z_1)\}\,dz + \cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} \{f(z) - f(z_n) + f(z_n)\}\,dz \\
&= \int_{z_0}^{z_1} \{f(z) - f(z_1)\}\,dz + \cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} \{f(z) - f(z_n)\}\,dz + S_n
\end{aligned}$$

www.FreeLibros.me

de manera que

$$S_n = \int_{z_0}^{z_1} \{f(z_1) - f(z)\}\, dz + \cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} \{f(z_n) - f(z)\}\, dz \tag{2}$$

Elija ahora N tan grande que para las rectas que unen z_0 y z_1, z_1 y z_2,..., z_{n-1} y z_n,

$$|f(z_1) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2L}, \quad |f(z_2) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2L}, \quad \ldots, \quad |f(z_n) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2L} \tag{3}$$

donde L es la longitud de C. Así, de acuerdo con las expresiones en (2) y (3), se tiene

$$|S_n| \le \left| \int_{z_0}^{z_1} \{f(z_1) - f(z)\}\, dz \right| + \left| \int_{z_1}^{z_2} \{f(z_2) - f(z)\}\, dz \right| + \cdots + \left| \int_{z_{n-1}}^{z_n} \{f(z_n) - f(z)\}\, dz \right|$$

o

$$|S_n| \le \frac{\epsilon}{2L} \{|z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \cdots + |z_n - z_{n-1}|\} = \frac{\epsilon}{2} \tag{4}$$

De

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_C f(z)\, dz - S_n + S_n$$

con (1) y (4), se tiene,

$$\left| \oint_C f(z)\, dz \right| \le \left| \oint_C f(z)\, dz - S_n \right| + |S_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Por tanto, como ϵ es arbitraria, se concluye que $\oint_C f(z)\, dz = 0$, como se buscaba.

4.16. Demuestre el teorema de Cauchy-Goursat para regiones múltiplemente conexas.

Solución

Se presenta una prueba para la región $\mathcal{R}$ múltiplemente conexa limitada por las curvas simples cerradas C_1 y C_2, como se indica en la figura 4-16. Es fácil efectuar extensiones a otras regiones múltiplemente conexas (vea el problema 4.67).

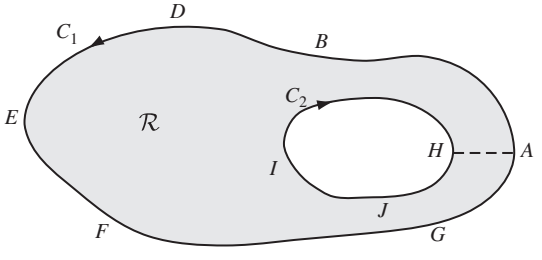


Figura 4-16

Se traza un corte transversal AH. Entonces, la región limitada por $ABDEFGAHJIHA$ es simplemente conexa de manera que, de acuerdo con el problema 4.15,

$$\oint_{ABDEFGAHJIHA} f(z)\, dz = 0$$

Por tanto,

$$\int_{ABDEFGA} f(z)\, dz + \int_{AH} f(z)\, dz + \int_{HJIH} f(z)\, dz + \int_{HA} f(z)\, dz = 0$$

www.FreeLibros.me

Debido a que $\int_{AH} f(z)\,dz = -\int_{HA} f(z)\,dz$, esto se convierte en

$$\int_{ABDEFGA} f(z)\,dz + \int_{HJIH} f(z)\,dz = 0$$

Sin embargo, esto equivale a afirmar que

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

donde C es la frontera completa de $\mathcal{R}$ (que consta de $ABDEFGA$ y $HJIH$) recorrida en el sentido en el que un observador que camine sobre ella siempre tenga la región $\mathcal{R}$ a su izquierda.

CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE CAUCHY

4.17. Suponga que $f(z)$ es analítica en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$. Demuestre que $\int_a^b f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria en $\mathcal{R}$ que une dos puntos cualesquiera a y b en $\mathcal{R}$ [como en la figura 4-17].

Solución

De acuerdo con el teorema de Cauchy,

$$\int_{ADBEA} f(z)\,dz = 0$$

o

$$\int_{ADB} f(z)\,dz + \int_{BEA} f(z)\,dz = 0$$

De manera que

$$\int_{ADB} f(z)\,dz = -\int_{BEA} f(z)\,dz = \int_{AEB} f(z)\,dz$$

Por tanto,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz$$

lo cual da el resultado buscado.

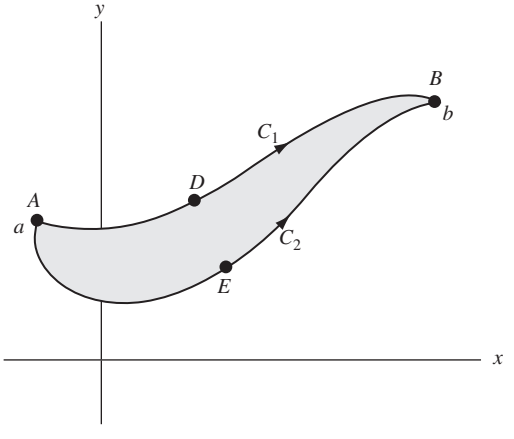


Figura 4-17

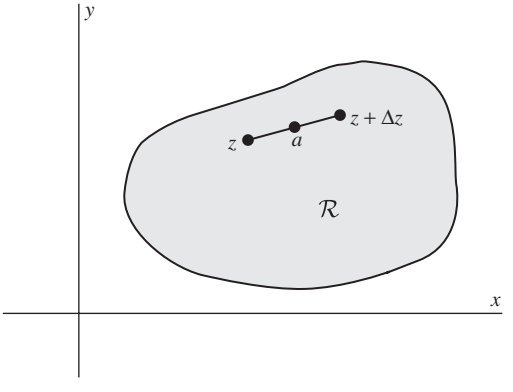


Figura 4-18

www.FreeLibros.me

4.18. Sea $f(z)$ analítica en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$ y sean a y z puntos en $\mathcal{R}$. Demuestre que *a*) $F(z) = \int_a^z f(u)$ es analítica en $\mathcal{R}$ y que *b*) $F'(z) = f(z)$.

Solución

Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) &= \frac{1}{\Delta z}\left\{\int_a^{z+\Delta z} f(u)\,du - \int_a^{z} f(u)\,du\right\} - f(z)\\ &= \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}\{f(u)-f(z)\}\,du\end{aligned} \tag{1}$$

De acuerdo con el teorema de Cauchy, la última integral es independiente de la trayectoria que une z y $z+\Delta z$, siempre que la trayectoria esté en $\mathcal{R}$. En particular, como trayectoria puede elegirse al segmento de recta que une z y $z+\Delta z$ (vea la figura 4-18) siempre que $|\Delta z|$ se elija lo suficientemente pequeño para que esta trayectoria esté en $\mathcal{R}$.

Ahora, debido a la continuidad de $f(z)$, para todos los puntos u sobre esta trayectoria recta se tiene $|f(u)-f(z)| < \epsilon$ siempre que $|u-z| < \delta$, lo que sin duda será así si $|\Delta z| < \delta$.

Además, se tiene

$$\left|\int_z^{z+\Delta z}\big\{f(u)-f(z)\big\}\,du\right| < \epsilon|\Delta z| \tag{2}$$

de manera que, por (1),

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}[f(u)-f(z)]\,du\right| < \epsilon$$

para $|\Delta z| < \delta$. Pero esto equivale a decir que

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

es decir, $F(z)$ es analítica y $F'(z) = f(z)$.

4.19. Una función $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$ se conoce como *integral indefinida* de $f(z)$ y se denota $\int f(z)\,dz$. Muestre que *a*) $\int \operatorname{sen} z\,dz = -\cos z + c$ y *b*) $\int dz/z = \ln z + c$, donde c es una constante arbitraria.

Solución

a) Como $d/dz(-\cos z + c) = \operatorname{sen} z$, se tiene $\int \operatorname{sen} z\,dz = -\cos z + c$.

b) Como $d/dz(\ln z + c) = 1/z$, se tiene $\int dz/z = \ln z + c$.

4.20. Sea $f(z)$ analítica en una región $\mathcal{R}$ limitada por dos curvas simples cerradas C_1 y C_2 [regiones sombreadas en la figura 4-19] y también sobre C_1 y C_2. Demuestre que $\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$, donde C_1 y C_2 se recorren en sentido positivo en relación con sus interiores [dirección contraria a las manecillas del reloj en la figura 4-19].

Solución

Se traza el corte transversal DE. Así, como $f(z)$ es analítica en la región $\mathcal{R}$, de acuerdo con el teorema de Cauchy se tiene

$$\int_{DEFGEDHJKLD} f(z)\,dz = 0$$

o bien

$$\int_{DE} f(z)\,dz + \int_{EFGE} f(z)\,dz + \int_{ED} f(z)\,dz + \int_{DHJKLD} f(z)\,dz = 0$$

www.FreeLibros.me

Por tanto, como $\int_{DE} f(z)\,dz = -\int_{ED} f(z)\,dz$,

$$\int_{DHJKLD} f(z)\,dz = -\int_{EFGE} f(z)\,dz = \int_{EGFE} f(z)\,dz \quad \text{o} \quad \oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

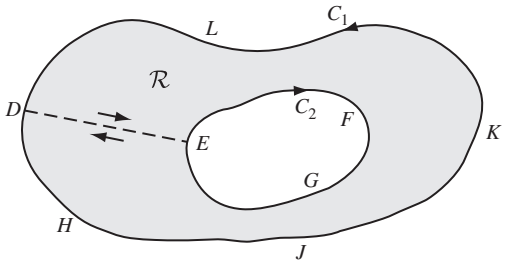


Figura 4-19

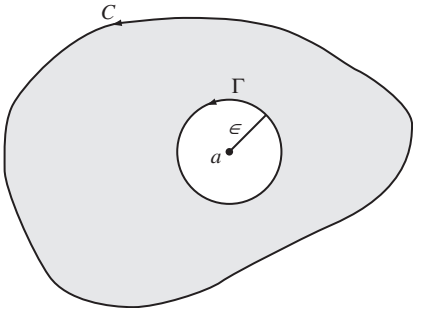


Figura 4-20

4.21. Evalúe $\oint_C dz/z-a$, donde C es una curva simple cerrada C y $z=a$ está *a*) en el exterior de C y *b*) en el interior de C.

Solución

a) Si a está en el exterior de C, entonces $f(z) = 1/(z-a)$ es analítica en todas partes del interior de C y sobre C. Por tanto, según el teorema de Cauchy, $\oint_C dx/z-a = 0$.

b) Suponga que a está en el interior de C y sea Γ un círculo de radio ϵ con centro en $z=a$, de manera que Γ esté en el interior de C (esto es posible porque $z=a$ es un punto interior).

De acuerdo con el problema 4.20,

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \oint_\Gamma \frac{dz}{z-a} \tag{1}$$

Ahora sobre Γ, $|z-a| = \epsilon$ o $z-a = \epsilon e^{i\theta}$, es decir, $z = a + \epsilon e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$. Por tanto, como $dz = i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta$, el lado derecho de (1) se convierte en

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

que es el valor buscado.

4.22. Evalúe $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ donde $z=a$ está en el interior de la curva simple cerrada C.

Solución

Igual que en el problema 4.21,

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} &= \oint_\Gamma \frac{dz}{(z-a)^n} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta}{\epsilon^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\epsilon^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta}\,d\theta \\
&= \frac{i}{\epsilon^{n-1}}\frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{(1-n)\epsilon^{n-1}}[e^{2(1-n)\pi i} - 1] = 0
\end{aligned}$$

donde $n \neq 1$.

www.FreeLibros.me

4.23. Sea C la curva $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ que une los puntos (1, 1) y (2, 3). Encuentre el valor de $\int_C (12z^2 - 4iz)\, dz$.

Solución

Método 1. De acuerdo con el problema 4.17, esta integral es independiente de la trayectoria que une (1, 1) y (2, 3). Así, puede elegirse cualquier trayectoria. En particular, elija como trayectoria las rectas de (1, 1) a (2, 1) y de (2, 1) a (2, 3).

Caso 1. A lo largo de la trayectoria de (1, 1) a (2, 1), $y = 1$ y $dy = 0$, de manera que $z = x + iy = x + i$, $dz = dx$. De este modo, la integral es igual a

$$\int_{x=1}^{2} \left\{12(x+i)^2 - 4i(x+i)\right\} dx = \left\{4(x+i)^3 - 2i(x+i)^2\right\}\Big|_1^2 = 20 + 30i$$

Caso 2. A lo largo de la trayectoria de (2, 1) a (2, 3), $x = 2$ y $dx = 0$, de manera que $z = x + iy = 2 + iy$, $dz = i\, dy$. Así, la integral es igual a

$$\int_{y=1}^{3} \left\{12(2+iy)^2 - 4i(2+iy)\right\} i\, dy = \left\{4(2+iy)^3 - 2i(2+iy)^2\right\}\Big|_1^3 = -176 + 8i$$

Por tanto, al sumar los valores requeridos $= (20 + 30i) + (-176 + 8i) = -156 + 38i$.
Método 2. La integral dada es igual a

$$\int_{1+i}^{2+3i} (12z^2 - 4iz)\, dz = (4z^3 - 2iz^2)\Big|_{1+i}^{2+3i} = -156 + 38i$$

Es claro que el método 2 es más sencillo.

INTEGRALES DE FUNCIONES ESPECIALES

4.24. Determine *a*) $\int \operatorname{sen} 3z \cos 3z\, dz$ y *b*) $\int \cot(2z + 5)\, dz$.

Solución

a) ***Método 1.*** Sea $\operatorname{sen} 3z = u$. Así, $du = 3 \cos 3z\, dz$ o $\cos 3z\, dz = du/3$. Entonces,

$$\int \operatorname{sen} 3z \cos 3z\, dz = \int u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u\, du = \frac{1}{3}\frac{u^2}{2} + c$$
$$= \frac{1}{6}u^2 + c = \frac{1}{6}\operatorname{sen}^2 3z + c$$

Método 2.

$$\int \operatorname{sen} 3z \cos 3z\, dz = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} 3z\, d(\operatorname{sen} 3z) = \frac{1}{6}\operatorname{sen}^2 3z + c$$

Método 3. Sea $\cos 3z = u$. De este modo, $du = -3 \operatorname{sen} 3z\, dz$ o $\operatorname{sen} 3z\, dz = -du/3$. Entonces,

$$\int \operatorname{sen} 3z \cos 3z\, dz = -\frac{1}{3}\int u\, du = -\frac{1}{6}u^2 + c_1 = -\frac{1}{6}\cos^2 3z + c_1$$

Observe que los resultados de los métodos 1 y 3 difieren en una constante.

b) ***Método 1.***

$$\int \cot(2x + 5)\, dz = \int \frac{\cos(2z+5)}{\operatorname{sen}(2z+5)} dz$$

www.FreeLibros.me

Sea $u = \text{sen}\,(2z+5)$. Así, $du = 2\cos(2z+5)dz$ y $\cos(2z+5)dz = du/2$. Por tanto,

$$\int \frac{\cos(2z+5)\,dz}{\text{sen}(2z+5)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u + c = \frac{1}{2}\ln \text{sen}(2z+5) + c$$

Método 2.

$$\int \cot(2z+5)\,dz = \int \frac{\cos(2z+5)}{\text{sen}(2z+5)}dz = \frac{1}{2}\int \frac{d\{\text{sen}(2z+5)\}}{\text{sen}(2z+5)} = \frac{1}{2}\ln \text{sen}(2z+5) + c$$

4.25. *a*) Demuestre que $\int F(z)G'(z)\,dz = F(z)G(z) - \int F'(z)G(z)\,dz$.

b) Encuentre $\int ze^{2z}\,dz$ y $\int_0^1 ze^{2z}\,dz$.

c) Encuentre $\int z^2 \,\text{sen}\,4z\,dz$ y $\int_0^{2\pi} z^2 \,\text{sen}\,4z\,dz$.

d) Evalúe $\int_C (z+2)e^{iz}\,dz$ a lo largo de la parábola C definida por $\pi^2 y = x^2$ de (0,0) a (π, 1).

Solución

a) Se tiene

$$d\{F(z)G(z)\} = F(z)G'(z)\,dz + F'(z)G(z)\,dz$$

Se integran ambos lados para obtener

$$\int d\{F(z)G(z)\} = F(z)G(z) = \int F(z)G'(z)\,dz + \int F'(z)G(z)\,dz$$

Así,

$$\int F(z)G'(z)\,dz = F(z)G(z) - \int F'(z)G(z)\,dz$$

Este método se conoce como *integración por partes.*

b) Sean $F(z) = z$, $G'(z) = e^{2z}$. Entonces, $F'(z) = 1$ y $G(z) = \frac{1}{2}e^{2z}$, al omitir la constante de integración. Por tanto, según el inciso *a*),

$$\begin{aligned}\int ze^{2z}\,dz &= \int F(z)G'(z)\,dz = F(z)G(z) - \int F'(z)G(z)\,dz \\ &= (z)\left(\frac{1}{2}e^{2z}\right) - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2z}\,dz = \frac{1}{2}ze^{2z} - \frac{1}{4}e^{2z} + c\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^1 ze^{2z}\,dz = \left(\frac{1}{2}ze^{2z} - \frac{1}{4}e^{2z} + c\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

c) Al integrar por partes y elegir $F(z) = z^2$, $G'(z) = \text{sen}\,4z$, se tiene

$$\begin{aligned}\int z^2 \,\text{sen}\,4z\,dz &= (z^2)\left(-\frac{1}{4}\cos 4z\right) - \int (2z)\left(-\frac{1}{4}\cos 4z\right)dz \\ &= -\frac{1}{4}z^2\cos 4z + \frac{1}{2}\int z\cos 4z\,dz\end{aligned}$$

Se integra por partes esta última integral y se eligen esta vez $F(z) = z$ y $G'(z) = \cos 4z$, para obtener

$$\int z\cos 4z\,dz = (z)\left(\frac{1}{4}\text{sen}\,4z\right) - \int (1)\left(\frac{1}{4}\text{sen}\,4z\right)dz = \frac{1}{4}z\,\text{sen}\,4z + \frac{1}{16}\cos 4z$$

www.FreeLibros.me

Por tanto,

$$\int z^2 \operatorname{sen} 4z\, dz = -\frac{1}{4}z^2 \cos 4z + \frac{1}{8} z \operatorname{sen} 4z + \frac{1}{32}\cos 4z + c$$

y

$$\int_0^{2\pi} z^2 \operatorname{sen} 4z\, dz = -\pi^2 + \frac{1}{32} - \frac{1}{32} = -\pi^3$$

La doble integración por partes se indica de manera sugerente al escribir

$$\begin{aligned}\int z^2 \operatorname{sen} 4z\, dz &= (z^2)\left(-\frac{1}{4}\cos 4z\right) - (2z)\left(-\frac{1}{16}\operatorname{sen} 4z\right) + (2)\left(\frac{1}{64}\cos 4z\right) + c \\ &= -\frac{1}{4}z^2 \cos 4z + \frac{1}{8} z \operatorname{sen} 4z + \frac{1}{32}\cos 4z\end{aligned}$$

donde el primer paréntesis de cada término (después del primero) se obtiene al diferenciar z^2 sucesivamente, el segundo paréntesis se obtiene al integrar sucesivamente sen $4z$, y los términos alternan de signo.

d) Los puntos (0, 0) y (π, 1) corresponden a $z = 0$ y $z = \pi + i$. Como $(z + 2)e^{iz}$ es analítica, se ve, de acuerdo con el problema 4.17, que la integral es independiente de la trayectoria y que es igual a

$$\begin{aligned}\int_0^{1+i} (z+2)e^{iz} dz &= \left\{(z+2)\left(\frac{e^{iz}}{i}\right) - (1)(-e^{iz})\right\}\Bigg|_0^{\pi+i} \\ &= (\pi + i + 2)\left(\frac{e^{i(\pi+i)}}{i}\right) + e^{i(\pi+i)} - \frac{2}{i} - 1 \\ &= -2e^{-1} - 1 + i(2 + \pi e^{-1} + 2e^{-1})\end{aligned}$$

4.26. Muestre que $\displaystyle\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a} + c_1 = \frac{1}{2ai}\ln\left(\frac{z - ai}{z + ai}\right) + c_2$.

Solución

Sea $z = a \tan u$. Entonces,

$$\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \int \frac{a \sec^2 u\, du}{a^2(\tan^2 u + 1)} = \frac{1}{a}\int du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a} + c_1$$

Además,

$$\frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{(z - ai)(z + ai)} = \frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{z - ai} - \frac{1}{z + ai}\right)$$

y así

$$\begin{aligned}\int \frac{dz}{z^2 + a^2} &= \frac{1}{2ai}\int \frac{dz}{z - ai} - \frac{1}{2ai}\int \frac{dz}{z + ai} \\ &= \frac{1}{2ai}\ln(z - ai) - \frac{1}{2ai}\ln(z + ai) + c_2 = \frac{1}{2ai}\ln\left(\frac{z - ai}{z + ai}\right) + c_2\end{aligned}$$

www.FreeLibros.me

PROBLEMAS DIVERSOS

4.27. Demuestre el teorema de Morera [página 115] suponiendo que $f(z)$ tiene una derivada continua en $\mathcal{R}$.

Solución

Si $f(z)$ tiene una derivada continua en $\mathcal{R}$ puede aplicarse el teorema de Green para obtener

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy$$
$$= \iint_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Así, si $\oint_C f(z)\,dz = 0$ alrededor de toda trayectoria cerrada C en $\mathcal{R}$, se tendrá

$$\oint_C u\,dx - v\,dy = 0, \qquad \oint_C v\,dx + u\,dy = 0$$

alrededor de toda curva cerrada C en $\mathcal{R}$. Por tanto, de acuerdo con el problema 4.8, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

y (como estas derivadas parciales son continuas) se colige [problema 3.5] que $u + iv = f(z)$ es analítica.

4.28. Un campo de fuerza está dado por $F = 3z + 5$. Encuentre el trabajo realizado al mover un objeto en este campo de fuerza a lo largo de la parábola $z = t^2 + it$, desde $z = 0$ hasta $z = 4 + 2i$.

Solución

$$\text{Trabajo total realizado} = \int_C F \cdot dz = \operatorname{Re}\int_C \overline{F} \cdot dz = \operatorname{Re}\left\{\int_C (3\bar{z} + 5)\,dz\right\}$$
$$= \operatorname{Re}\left\{3\int_C \bar{z}\,dz + 5\int_C dz\right\} = \operatorname{Re}\left\{3\left(10 - \frac{1}{2}i\right) + 5(4 + 2i)\right\} = 50$$

con el resultado del problema 4.2.

4.29. Encuentre $a)\ \int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$ y $b)\ \int e^{ax}\cos bx\,dx$.

Solución

Se omite la constante de integración y se obtiene

$$\int e^{(a+ib)x}\,dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$$

que puede escribirse como

$$\int e^{ax}(\cos bx + i\operatorname{sen} bx)\,dx = \frac{e^{ax}(\cos bx + i\operatorname{sen} bx)}{a+ib} = \frac{e^{ax}(\cos bx + i\operatorname{sen} bx)(a - ib)}{a^2 + b^2}$$

www.FreeLibros.me

Y se igualan las partes reales y las imaginarias,

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\,\text{sen}\,bx)}{a^2+b^2}$$

$$\int e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\,\text{sen}\,bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

4.30. Dé un ejemplo de una curva continua, cerrada, que no se interseque y que se encuentre en una región acotada $\mathcal{R}$, pero que sea de longitud infinita.

Solución

Considere el triángulo equilátero *ABC* [figura 4-21] con lados de longitud unitaria. Al trisecar cada lado se trazan los triángulos equiláteros *DEF, GHJ* y *KLM*. Después se omiten los lados *DF, GJ* y *KM* y se obtiene la curva cerrada, que no se interseca, *ADEFBGHJCKLMA* de la figura 4-22.

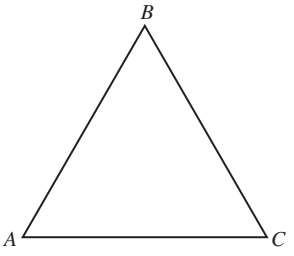


Figura 4-21

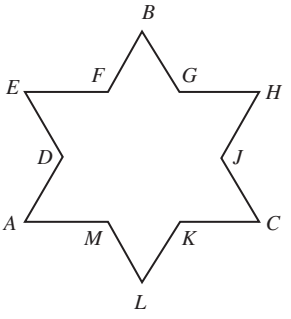


Figura 4-22

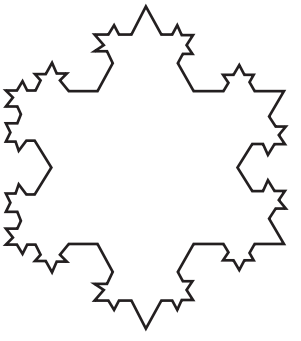


Figura 4-23

Se puede continuar con este proceso de trisecar los lados *DE, EF, FB, BG, GH,* etc., y trazar, como antes, triángulos equiláteros. Al repetir este proceso indefinidamente [vea la figura 4-23] se obtiene una curva continua cerrada que no se interseca y que es la frontera de una región cuya área finita es igual a

$$\frac{1}{4}\sqrt{3} + (3)\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + (9)\left(\frac{1}{9}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + (27)\left(\frac{1}{27}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \cdots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{1-1/3} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

o 1.5 veces el área del triángulo *ABC,* y la cual tiene una longitud infinita (vea el problema 4.91).

4.31. Sean $F(x, y)$ y $G(x, y)$ continuas, y con primeras y segundas derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$ limitada por una curva simple cerrada C. Demuestre que

$$\oint_C F\left(\frac{\partial G}{\partial y}dx - \frac{\partial G}{\partial x}dy\right) = -\iint_{\mathcal{R}}\left[F\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y}\right)\right]dx\,dy$$

Solución

Sean $P = F\dfrac{\partial G}{\partial y}$, $Q = -F\dfrac{\partial G}{\partial x}$ en el teorema de Green de modo que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

www.FreeLibros.me

Entonces, como se buscaba,

$$\oint_C F\left(\frac{\partial G}{\partial y}\,dx - \frac{\partial G}{\partial x}\,dy\right) = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{-F\frac{\partial G}{\partial x}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{F\frac{\partial G}{\partial y}\right\}\right) dx\,dy$$

$$= -\iint_{\mathcal{R}} \left[F\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y}\right)\right] dx\,dy$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

INTEGRALES DE LÍNEA

4.32. Evalúe $\int_{(0,1)}^{(2,5)} (3x + y)\,dx + (2y - x)\,dy$ a lo largo de *a*) la curva $y = x^2 + 1$, *b*) la recta que une (0, 1) y (2, 5), *c*) las rectas que van de (0, 1) a (0, 5) y de (0, 5) a (2, 5) y *d*) las rectas que van de (0, 1) a (2, 1) y de (2, 1) a (2, 5).

4.33. *a*) Evalúe $\oint_C (x + 2y)\,dx + (y - 2x)\,dy$ alrededor de la elipse C definida por $x = 4\cos\theta$, $y = 3\,\text{sen}\,\theta$, $0 \le \theta < 2\pi$ si C se describe en dirección contraria a las manecillas del reloj.

b) ¿Cuál es el resultado en el inciso *a*) si C se describe en el sentido de las manecillas del reloj?

4.34. Evalúe $\int_C (x^2 - iy^2)\,dz$ a lo largo de *a*) la parábola $y = 2x^2$ desde (1, 2) hasta (2, 8), *b*) las rectas de (1, 1) a (1, 8) y de (1, 8) a (2, 8) y *c*) la recta de (1, 1) a (2, 8).

4.35. Evalúe $\oint_C |z|^2\,dz$ alrededor del cuadrado con vértices en (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1).

4.36. Evalúe $\int_C (z^2 + 3z)\,dz$ a lo largo de *a*) la circunferencia $|z| = 2$ desde (2, 0) hasta (0, 2) en sentido contrario a las manecillas del reloj, *b*) la recta desde (2, 0) hasta (0, 2) y *c*) las rectas de (2, 0) a (2, 2) y de (2, 2) a (0, 2).

4.37. Suponga que $f(z)$ y $g(z)$ son integrables. Demuestre que

a) $\displaystyle\int_a^b f(z)\,dz = -\int_b^a f(z)\,dz$, *b*) $\displaystyle\int_C \{2f(z) - 3ig(z)\}\,dz = 2\int_C f(z)\,dz - 3i\int_C g(z)\,dz$.

4.38. Evalúe $\int_i^{2-i} (3xy + iy^2)\,dz$ *a*) a lo largo de la recta que une $z = i$ y $z = 2 - i$ y *b*) a lo largo de la curva $x = 2t - 2$. $y = 1 + t - t^2$.

4.39. Evalúe $\oint_C \bar{z}^2\,dz$ alrededor de las circunferencias *a*) $|z| = 1$, *b*) $|z - 1| = 1$.

4.40. Evalúe $\oint_C (5z^4 - z^3 + 2)\,dz$ alrededor *a*) de la circunferencia $|z| = 1$, *b*) del cuadrado con vértices en (0, 0), (1, 0), (1, 1) y (0, 1) y *c*) de la curva que consta de las parábolas $y = x^2$ desde (0, 0) hasta (1, 1) y $y^2 = x$ desde (1, 1) hasta (0, 0).

4.41. Evalúe $\int_C (z^2 + 1)^2\,dz$ a lo largo del arco de la cicloide $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ desde el punto en el que $\theta = 0$ hasta el punto en el que $\theta = 2\pi$.

4.42. Evalúe $\int_C \bar{z}^2\,dz + z^2\,d\bar{z}$ a lo largo de la curva C definida por $z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2 - 2i)z + (2 + 2i)\bar{z}$ desde el punto $z = 1$ hasta $z = 2 + 2i$.

4.43. Evalúe $\oint_C dz/z - 2$ alrededor de
a) la circunferencia $|z - 2| = 4$, *b*) la circunferencia $|z - 1| = 5$ y *c*) el cuadrado con vértices en $3 \pm 3i$, $-3 \pm 3i$.

4.44. Evalúe $\oint_C (x^2 + iy^2)\,ds$ alrededor de la circunferencia $|z| = 2$, donde s es la longitud de arco.

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

4.45. Verifique el teorema de Green en el plano para $\oint_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - x^3y)\,dy$, donde C es un cuadrado con vértices en (0, 0), (2, 0), (2, 2) y (0, 2).

www.FreeLibros.me

4.46. Evalúe $\oint_C (5x + 6y - 3)\,dx + (3x - 4y + 2)\,dy$ alrededor de un triángulo en el plano xy con vértices en (0, 0), (4, 0) y (4, 3).

4.47. Sea C una curva simple cerrada que limita una región cuya área es A. Demuestre que

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

4.48. Con el resultado del problema 4.47 halle el área limitada por la elipse $x = a\cos\theta$, $y = b\,\text{sen}\,\theta$, $0 \le \theta < 2\pi$.

4.49. Encuentre el área limitada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ que se muestra sombreada en la figura 4-24. [*Pista:* Las ecuaciones paramétricas son $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\,\theta$, $0 \le \theta < 2\pi$.]

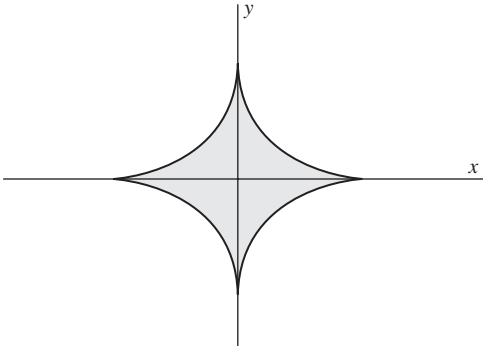


Figura 4-24

4.50. Verifique el teorema de Green en el plano para $\oint_C x^2y\,dx + (y^3 - xy^2)dy$, donde C es la frontera de la región que queda encerrada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$.

4.51. *a*) Demuestre que $\oint_C (y^2\cos x - 2e^y)\,dx + (2y\,\text{sen}\,x - 2xe^y)\,dy = 0$ alrededor de cualquier curva simple cerrada C.

b) Evalúe la integral del inciso *a*) a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde (0, 0) hasta (π, π^2).

4.52. *a*) Muestre que $\int_{(2,1)}^{(3,2)} (2xy^3 - 2y^2 - 6y)\,dx + (3x^2y^2 - 4xy - 6x)\,dy$ es independiente de la trayectoria que une los puntos (2, 1) y (3, 2). *b*) Evalúe la integral del inciso *a*).

FORMA COMPLEJA DEL TEOREMA DE GREEN

4.53. Si C es una curva simple cerrada que encierra una región de área A, compruebe que $A = \dfrac{1}{2i}\oint_C \bar{z}\,dz$.

4.54. Evalúe $\oint_C \bar{z}\,dz$ alrededor de *a*) la circunferencia $|z - 2| = 3$, *b*) el cuadrado con vértices en $z = 0, 2, 2i$ y $2 + 2i$ y *c*) la elipse $|z - 3| + |z + 3| = 10$.

4.55. Evalúe $\oint_C (8\bar{z} + 3z)\,dz$ alrededor de la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

4.56. Sean $P(z, \bar{z})$ y $Q(z, \bar{z})$ funciones continuas con derivadas parciales continuas en una región $\mathcal{R}$ y en su frontera C. Demuestre que

$$\oint_C P(z, \bar{z})\,dz + Q(z, \bar{z})\,d\bar{z} = 2i\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dA$$

4.57. Muestre que el área del problema 4.53 puede expresarse en la forma $A = \dfrac{1}{4i}\oint_C \bar{z}\,dz - z\,d\bar{z}$.

4.58. Muestre que, en coordenadas conjugadas, el centroide de la región del problema 4.53 está dado por $(\hat{z}, \hat{\bar{z}})$, donde

$$\hat{z} = -\frac{1}{4Ai}\oint_C z^2\,d\bar{z} \quad \text{y} \quad \hat{\bar{z}} = \frac{1}{4Ai}\oint_C \bar{z}^2\,dz$$

4.59. Encuentre el centroide de la región limitada arriba por $|z| = a > 0$ y abajo por $\text{Im}\,z = 0$.

TEOREMA DE CAUCHY Y TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

4.60. Verifique el teorema de Cauchy para las funciones *a*) $3z^2 + iz - 4$ y *b*) $5\,\text{sen}\,2z$, *c*) $3\cosh(z + 2)$, donde C es el cuadrado con vértices en $1 \pm i$, $-1 \pm i$.

www.FreeLibros.me

4.61. Verifique el teorema de Cauchy para la función $z^3 - iz^2 - 5z + 2i$ si C es
a) la circunferencia $|z| = 1$, *b*) la circunferencia $|z - 1| = 2$ y *c*) la elipse $|z - 3i| + |z + 3i| = 20$.

4.62. Sea C la circunferencia $|z - 2| = 5$. *a*) Determine si $\oint_C \frac{dz}{z-3} = 0$. *b*) ¿Contradice al teorema de Cauchy su respuesta al inciso *a*)?

4.63. Dada una curva simple cerrada C, explique claramente la relación entre las observaciones

$$\oint_C (x^2 - y^2 + 2y)\,dx + (2x - 2xy)\,dy = 0 \quad \text{y} \quad \oint_C (z^2 - 2iz)\,dz = 0$$

4.64. Mediante la evaluación de $\oint_C e^z\,dz$ alrededor de la circunferencia $|z| = 1$, muestre que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta + \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\operatorname{sen}(\theta + \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 0$$

4.65. Establezca y pruebe el teorema de Cauchy para regiones múltiplemente conexas.

4.66. Demuestre el teorema de Cauchy-Goursat para un polígono, como el polígono *ABCDEFGA* de la figura 4-25, que puede intersecarse a sí mismo.

4.67. Demuestre el teorema de Cauchy-Goursat para la región múltiplemente conexa $\mathcal{R}$ de la figura 4-26.

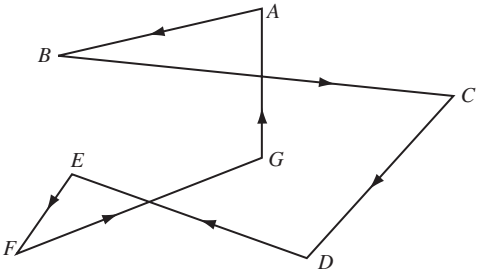


Figura 4-25

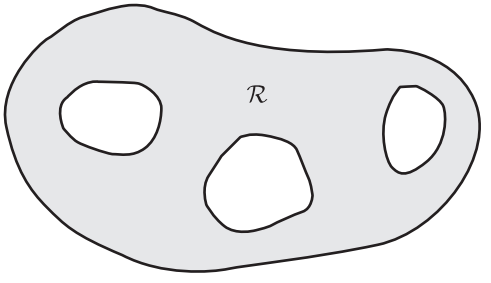


Figura 4-26

4.68. *a*) Verifique el teorema de de Cauchy-Goursat para un rectángulo y *b*) muestre cómo se emplea el resultado del inciso *a*) para demostrar este teorema para toda curva simple cerrada C.

4.69. Sean P y Q continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región $\mathcal{R}$. Sea C una curva simple cerrada en $\mathcal{R}$ y suponga que para toda curva de este tipo

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$$

a) Demuestre que existe una función analítica $f(z)$ tal que Ref $\{f(z)\,dz\} = P\,dx + Q\,dy$ sea una diferencial exacta.

b) Determine p y q en términos de P y Q de modo que Im $\{f(z)\,dz\} = p\,dx + q\,dy$ y verifique que $\oint_C p\,dx + q\,dy = 0$.

c) Analice la relación entre los incisos *a*) y *b*) y el teorema de Cauchy.

4.70. Ilustre los resultados del problema 4.69 si $P = 2x + y - 2xy$, $Q = x - 2y - x^2 + y^2$ hallando p, q y $f(z)$.

4.71. Sean P y Q continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región $\mathcal{R}$. Suponga que, para toda curva simple cerrada C en $\mathcal{R}$, se tiene $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$.

a) Demuestre que $\oint_C Q\,dx - P\,dy = 0$. *b*) Analice la relación del inciso *a*) con el teorema de Cauchy.

www.FreeLibros.me

CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE CAUCHY

4.72. Muestre directamente que $\int_{3+4i}^{4-3i} (6z^2 + 8iz)\,dz$ tiene el mismo valor a lo largo de las siguientes trayectorias C que unen los puntos $3 + 4i$ y $4 - 3i$: *a*) una línea recta, *b*) las líneas rectas de $3 + 4i$ a $4 + 4i$ y de $4 + 4i$ a $4 - 3i$ y *c*) la circunferencia $|z| = 5$. Determine este valor.

4.73. Muestre que $\int_C e^{-2z}\,dz$ es independiente de la trayectoria C que une los puntos $1 - \pi i$ y $2 + 3\pi i$, y determine su valor.

4.74. Dada $G(z) = \int_{\pi-\pi i}^{z} \cos 3\zeta\,d\zeta$, *a*) demuestre que $G(z)$ es independiente de la trayectoria que une $\pi - \pi i$ y el punto arbitrario z, *b*) determine $G(\pi i)$ y *c*) demuestre que $G'(z) = \cos 3z$.

4.75. Dada $G(z) = \int_{1+i}^{z} \operatorname{sen} \zeta^2\,d\zeta$, *a*) verifique que $G(z)$ es una función analítica de z y *b*) compruebe que $G'(z) = \operatorname{sen} z^2$.

4.76. Dada la integral real de línea $\int_C P\,dx + Q\,dy$, dé y compruebe el teorema correspondiente a:

a) el problema 4.17, *b*) el problema 4.18 y *c*) el problema 4.20.

4.77. Con la región de la figura 4-26, demuestre el teorema 4.5 de la página 118.

4.78. *a*) Si C es la circunferencia $|z| = R$, muestre que $\lim\limits_{R\to\infty} \oint \dfrac{z^2 + 2z - 5}{(z^2 + 4)(z^2 + 2z + 2)}\,dz = 0$

b) Con el resultado del inciso *a*), deduzca que si C_1 es la circunferencia $|z - 2| = 5$, entonces

$$\oint_{C_1} \frac{z^2 + 2z - 5}{(z^2 + 4)(z^2 + 2z + 2)}\,dz = 0$$

c) Si C_1 es la circunferencia $|z + 1| = 2$, ¿es verdadero el resultado del inciso *b*)? Explique.

INTEGRALES DE FUNCIONES ESPECIALES

4.79. Encuentre las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int e^{-2z}\,dz$, *b*) $\displaystyle\int z \operatorname{sen} z^2 dz$, *c*) $\displaystyle\int \frac{z^2 + 1}{z^3 + 3z + 2}\,dz$, *d*) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 2z \cos 2z\,dz$ y *e*) $\displaystyle\int z^2 \tanh(4z^3)\,dz$.

4.80. Encuentre las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int z \cos 2z\,dz$, *b*) $\displaystyle\int z^2 e^{-z}\,dz$, *c*) $\displaystyle\int z \ln z\,dz$ y *d*) $\displaystyle\int z^3 \operatorname{senh} z\,dz$.

4.81. Evalúe *a*) $\displaystyle\int_{\pi i}^{2\pi i} e^{3z}\,dz$, *b*) $\displaystyle\int_0^{\pi i} \operatorname{senh} 5z\,dz$ y *c*) $\displaystyle\int_0^{\pi+i} z \cos 2z\,dz$.

4.82. Muestre que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 z\,dz = \int_0^{\pi/2} \cos^2 z\,dz = \pi/4$.

4.83. Muestre que $\displaystyle\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{z - a}{z + a}\right) + c_1 = \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{z}{a} + c_2$.

4.84. Muestre que, al restringirse a una misma rama de la raíz cuadrada,

$$\int z\sqrt{2z + 5}\,dz = \frac{1}{20}(2z + 5)^{5/2} - \frac{5}{6}(2z + 5)^{3/2} + c$$

4.85. Evalúe $\int \sqrt{1 + \sqrt{z + 1}}\,dz$, estableciendo las condiciones en las cuales es válido su resultado.

PROBLEMAS MISCELÁNEOS

4.86. Con la definición de integral, demuestre que a lo largo de toda trayectoria que una los puntos a y b,

a) $\displaystyle\int_a^b dz = b - a$ y *b*) $\displaystyle\int_a^b z\,dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

www.FreeLibros.me

4.87. Demuestre el teorema de la página 113 relacionado con el cambio de variables. [*Sugerencia:* Exprese cada lado de la igualdad como dos integrales reales de línea y use las ecuaciones de Cauchy-Riemann.]

4.88. Sea $u(x, y)$ armónica con derivadas continuas, por lo menos de orden dos, en una región $\mathcal{R}$.

a) Muestre que la integral siguiente es independiente de la trayectoria que une en $\mathcal{R}$ los puntos (a, b) y (x, y):

$$v(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

b) Demuestre que $u + iv$ es una función analítica de $z = x + iy$ en $\mathcal{R}$.

c) Demuestre que v es armónica en $\mathcal{R}$.

4.89. Repita el problema 4.88 para los casos especiales *a*) $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ y *b*) $u = xe^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y$. [Vea los problemas 4.53*a*) y *c*).]

4.90. Con la definición de integral, verifique directamente que si C es una curva simple cerrada y z_0 es una constante,

$$a)\ \oint_C dz = 0, \qquad b)\ \oint_C z\,dz = 0 \qquad \text{y} \qquad c)\ \oint_C (z - z_0)\,dz = 0$$

4.91. Encuentre la longitud de la curva cerrada del problema 4.30 después de n pasos y verifique, que cuando $n \to \infty$, la longitud de la curva se hace infinita.

4.92. Evalúe $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2 + 4}$ a lo largo de la recta $x + y = 1$, en la dirección en la que crece x.

4.93. Muestre que $\int_0^\infty xe^{-x} \operatorname{sen} x\ dx = \frac{1}{2}$.

4.94. Evalúe $\displaystyle\int_{-2-2\sqrt{3}i}^{-2+2\sqrt{3}i} z^{1/2}\,dz$ a lo largo de una trayectoria en línea recta si se elige la rama de $z^{1/2}$ en la que $z^{1/2} = 1$ para $z = 1$.

4.95. ¿Es válido el teorema de Cauchy para la función $f(z) = z^{1/2}$ si C es la circunferencia $|z| = 1$? Explique.

4.96. ¿Es válido el teorema de Cauchy para una curva, como la curva *EFGHFJE* de la figura 4-27, que se interseca consigo misma? Justifique su respuesta.

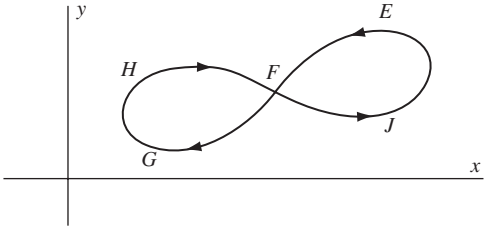


Figura 4-27

4.97. Si n es la dirección de trazo hacia afuera normal a una curva simple cerrada C, s es el parámetro de longitud de arco y U es una función continuamente diferenciable, demuestre que

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

4.98. Pruebe la *primera identidad de Green*,

$$\iint_{\mathcal{R}} U\nabla^2 V\,dx\,dy + \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_C U\frac{\partial V}{\partial n}\,ds$$

donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por la curva simple cerrada C, $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2)$, en tanto que n y s son como se indica en el problema 4.97.

4.99. Con el problema 4.98 demuestre la *segunda identidad de Green*

$$\iint_{\mathcal{R}} (U\nabla^2 V - V\nabla^2 U)\,dA = \oint_C \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) ds$$

donde dA es un elemento de área de $\mathcal{R}$.

4.100. Exprese el resultado del problema 4.31 en términos del operador ∇.

www.FreeLibros.me

4.101. Evalúe $\oint_C \frac{dz}{\sqrt{z^2+2z+2}}$ alrededor de la circunferencia unitaria $|z| = 1$ empezando con $z = 1$, y suponga que para este valor el integrando es positivo.

4.102. Sea n un entero positivo. Muestre que

$$\int_0^{2\pi} e^{\operatorname{sen} n\theta}\cos(\theta - \cos n\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\operatorname{sen} n\theta}\operatorname{sen}(\theta - \cos n\theta)\,d\theta = 0$$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

4.32. *a*) $88/3$, *b*) 32, *c*) 40 y *d*) 24

4.33. *a*) -48π y *b*) 48π

4.34. *a*) $\frac{511}{3} - \frac{49}{5}i$, *b*) $\frac{518}{3} - 57i$ y *c*) $\frac{518}{3} - 8i$

4.35. $-1 + i$

4.36. $-\frac{44}{3} - \frac{8}{3}i$ en todos los casos

4.38. *a*) $-\frac{4}{3} + \frac{8}{3}i$, *b*) $-\frac{1}{3} + \frac{79}{30}i$

4.39. *a*) 0 y *b*) $4\pi i$

4.40. 0 en todos los casos

4.41. $(96\pi^5a^5 + 80\pi^3a^3 + 30\pi a)/15$

4.42. $\frac{248}{15}$

4.43. $2\pi i$ en todos los casos

4.44. $8\pi(1 + i)$

4.45. Valor común $= -8$

4.46. -18

4.48. πab

4.49. $\frac{3\pi a^2}{8}$

4.50. Valor común $= 120\pi$

4.51. *b*) $-2\pi e^{\pi^2}$

4.52. *b*) 24

4.54. *a*) $18\pi i$, *b*) $8i$ y *c*) $40\pi i$

4.55. $6\pi i a^2$

4.59. $\hat{z} = \frac{2ai}{\pi}$, $\hat{\bar{z}} = \frac{-2ai}{\pi}$

4.70. Una posibilidad es $p = x^2 - y^2 + 2y - x$, $q = 2x + y - 2xy$, $f(z) = iz^2 + (2 - i)z$

4.72. $338 - 266i$

4.73. $\frac{1}{2}e^{-2}(1 - e^{-2})$

4.74. *b*) 0

4.79. *a*) $-\frac{1}{2}e^{-2z} + c$, *b*) $-\frac{1}{2}\cos z^2 + c$, *c*) $\frac{1}{3}\ln(z^3 + 3z + 2) + c$, *d*) $\frac{1}{10}\operatorname{sen}^5 2z + c$ y *e*) $\frac{1}{12}\ln\cosh(4z^3) + c$

4.80. *a*) $\frac{1}{2}z\operatorname{sen} 2z + \frac{1}{4}\cos 2z + c$, *b*) $-e^{-z}(z^2 + 2z + 2) + c$, *c*) $\frac{1}{2}z^2\ln z - \frac{1}{4} + c$ y *d*) $(z^3 + 6z)\cosh z - 3(z^2 + 2)\operatorname{senh} z + c$

4.81. *a*) $\frac{2}{3}$, *b*) $-\frac{2}{5}$ y *c*) $\frac{1}{4}\cosh 2 - \frac{1}{2}\operatorname{senh} 2 + \frac{1}{2}\pi i\operatorname{senh} 2$

4.85. $\frac{4}{5}\left(1 + \sqrt{z+1}\right)^{5/2} - \frac{4}{3}\left(1 + \sqrt{z+1}\right)^{3/2} + c$

4.92. $\frac{\pi}{2}$

4.94. $\frac{32}{3}$

www.FreeLibros.me

CAPÍTULO 5

Fórmulas integrales de Cauchy y teoremas relacionados

5.1 FÓRMULAS INTEGRALES DE CAUCHY

Sea $f(z)$ analítica sobre y en el interior de una curva simple cerrada C y sea a un punto en el interior de C [figura 5-1]. Entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz \tag{5.1}$$

donde C se recorre en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj).

Además, la n-ésima derivada de $f(z)$ en $z = a$ es

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.2}$$

La expresión en (5.1) puede considerarse el caso especial de la expresión en (5.2) en el que $n = 0$, si se define $0! = 1$.

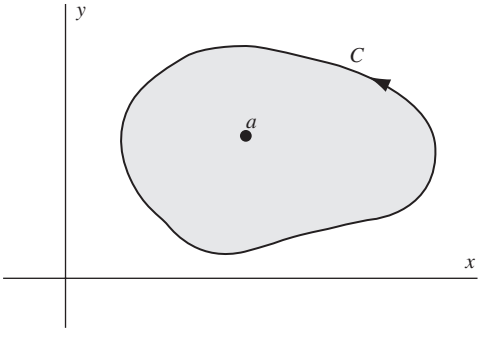


Figura 5-1

Los resultados dados en (5.1) y (5.2) se conocen como *fórmulas integrales de Cauchy,* y son importantes porque muestran que si una función $f(z)$ se conoce *sobre* una curva simple cerrada C, puede hallarse el valor de la función y los valores de todas sus derivadas en todos los puntos *interiores* de C. Por tanto, si una función de una variable compleja tiene primera derivada, es decir, es analítica, en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$, todas sus derivadas de orden superior existen en $\mathcal{R}$. Esto no es necesariamente válido para funciones de variables reales.

www.FreeLibros.me

5.2 ALGUNOS TEOREMAS IMPORTANTES

La siguiente es una lista de teoremas importantes que son consecuencia de las fórmulas integrales de Cauchy.

1. **Teorema de Morera** (recíproco del teorema de Cauchy)
Si $f(z)$ es continua en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$ y si $\oint_C f(z)\,dz = 0$ alrededor de toda curva simple cerrada C en $\mathcal{R}$, entonces $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

2. **Desigualdad de Cauchy**
Suponga que $f(z)$ es analítica en el interior y sobre una circunferencia C, tiene radio r y centro en $z = a$. Entonces,
$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{5.3}$$
donde M es una constante tal que $|f(z)| < M$ en C, es decir, M es una cota superior de $|f(z)|$ en C.

3. **Teorema de Liouville**
Suponga que para toda z en el plano complejo entero, *i*) $f(z)$ es analítica y *ii*) $f(z)$ es acotada, es decir, $|f(z)| < M$ para alguna constante M. Entonces $f(z)$ es una constante.

4. **Teorema fundamental del álgebra**
Toda ecuación polinómica $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$ de grado $n \geq 1$ en la que $a_n \neq 0$ tiene por lo menos una raíz.
De esto se sigue que $P(z) = 0$ tiene exactamente n raíces, tomando en cuenta las multiplicidades de las raíces.

5. **Teorema del valor medio de Gauss**
Suponga que $f(z)$ es analítica en el interior y sobre una circunferencia C, con centro en a y de radio r. Entonces, $f(a)$ es la media de los valores de $f(z)$ en C, es decir,
$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta \tag{5.4}$$

6. **Teorema del módulo máximo**
Suponga que $f(z)$ es analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C y que no es idénticamente igual a una constante. Entonces, el valor máximo de $|f(z)|$ se encuentra sobre C.

7. **Teorema del módulo mínimo**
Suponga que $f(z)$ es analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C y que $f(z) \neq 0$ en el interior de C. Entonces, $|f(z)|$ asume su valor mínimo sobre C.

8. **Teorema del argumento**
Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C, salvo en un número finito de polos en el interior de C. Entonces,
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P \tag{5.5}$$
donde N y P son, respectivamente, el número de ceros y el de polos de $f(z)$ en el interior de C.
Una generalización de este teorema se presenta en el problema 5.90.

9. **Teorema de Rouché**
Suponga que $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en el interior y sobre una curva simple cerrada C y suponga que $|g(z)| < |f(z)|$ sobre C. Así, $f(z) + g(z)$ y $f(z)$ tienen el mismo número de ceros en el interior de C.

10. **Fórmulas integrales de Poisson para un círculo**
Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre un círculo C definido por $|z| = R$. Así, si $z = re^{i\theta}$ es un punto cualquiera en el interior de C, se tiene
$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\,f(Re^{i\phi})}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}\,d\phi \tag{5.6}$$

www.FreeLibros.me

Si $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$ son las partes real e imaginaria de $f(re^{i\theta})$, y $u(R, \phi)$ y $v(R, \phi)$ son las partes real e imaginaria de $f(Re^{i\phi})$, entonces

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R, \phi)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}\,d\phi \tag{5.7}$$

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)v(R, \phi)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}\,d\phi \tag{5.8}$$

Estos resultados se llaman *fórmulas integrales de Poisson para un círculo.* Ellas expresan el valor de una función armónica en el interior de un círculo en términos de sus valores en la frontera.

11. Fórmulas integrales de Poisson para un semiplano

Sea $f(z)$ analítica para la mitad superior, $y \geq 0$, del plano z y sea $\zeta = \zeta + i\eta$ un punto en este semiplano superior. Entonces

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta f(x)}{(x - \xi)^2 + \eta^2}\,dx \tag{5.9}$$

En términos de las partes reales e imaginarias de $f(\zeta)$, esto se escribe como

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta u(x, 0)}{(x - \xi)^2 + \eta^2}\,dx \tag{5.10}$$

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta v(x, 0)}{(x - \xi)^2 + \eta^2}\,dx \tag{5.11}$$

Esto se conoce como *fórmulas integrales de Poisson para un semiplano.* Ellas expresan el valor de una función armónica en la mitad superior del plano en términos de los valores en el eje x [la frontera] del semiplano.

PROBLEMAS RESUELTOS

FÓRMULAS INTEGRALES DE CAUCHY

5.1. Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre la frontera C de una región simplemente conexa $\mathcal{R}$. Demuestre la *fórmula integral de Cauchy*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - a}\,dz$$

Solución

Método 1. La función $f(z)/(z - a)$ es analítica sobre y en el interior de C excepto en el punto $z = a$ (vea la figura 5-2). De acuerdo con el teorema 4.4 de la página 117, se tiene

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - a}\,dz = \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - a}\,dz \tag{1}$$

donde Γ se elige como una circunferencia de radio ϵ con centro en a. De este modo, una ecuación de Γ es $|z - a| = \epsilon$ o $z - a = \epsilon e^{i\theta}$, donde $0 \leq \theta < 2\pi$. Se sustituye $z = a + \epsilon e^{i\theta}$, $dz = i\epsilon e^{i\theta}$ y la integral de la derecha en (1) se convierte en

www.FreeLibros.me

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\epsilon e^{i\theta})i\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}}\,d\theta \;= i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta$$

De manera que, de acuerdo con (1),

$$\oint_{C} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta \tag{2}$$

Se toman límites en ambos lados de (2) y, mediante la continuidad de $f(z)$, se tiene

$$\begin{aligned}\oint_{C} \frac{f(z)}{z-a}\,dz &= \lim_{\epsilon\to 0} i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta})\;d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a)\,d\theta = 2\pi i\,f(a)\end{aligned} \tag{3}$$

con lo que se obtiene, como se buscaba,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

Método 2. El lado derecho de la ecuación (1) en el método 1 se escribe como

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz &= \oint_{\Gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + \oint_{\Gamma} \frac{f(a)}{z-a}\,dz \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + 2\pi i\,f(a)\end{aligned}$$

con el problema 4.21. Se obtiene el resultado buscado si se muestra que

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0$$

Pero, de acuerdo con el problema 3.21,

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = \oint_{\Gamma} f'(a)\,dz + \oint_{\Gamma} \eta\,dz = \oint_{\Gamma} \eta\,dz$$

Así, al elegir una Γ tan pequeña que para todos los puntos en Γ se tenga $|\eta| < \delta/2\pi$, se tiene

$$\left|\oint_{\Gamma} \eta\,dz\right| < \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)(2\pi\epsilon) = \epsilon$$

De manera que $\oint_{\Gamma} \eta\,dz = 0$, con lo que se termina la prueba.

www.FreeLibros.me

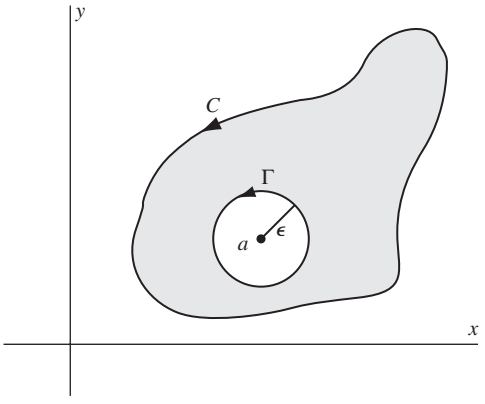


Figura 5-2

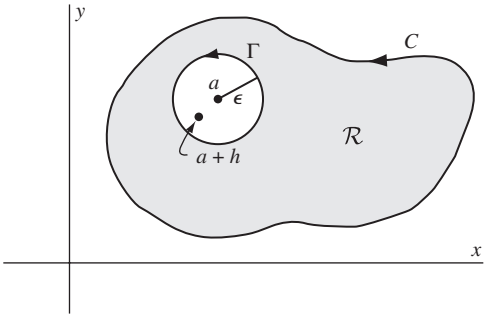


Figura 5-3

5.2. Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre la frontera C de una región simplemente conexa $\mathcal{R}$. Demuestre que

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz$$

Solución

De acuerdo con el problema 5.1, si a y $a + h$ están en $\mathcal{R}$, se tiene

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{z-(a+h)} - \frac{1}{z-a}\right\} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\, dz}{(z-a-h)(z-a)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^2} + \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\, dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

Se toma el límite cuando $h \to 0$ si se demuestra que el último término tiende a cero, y se obtiene el resultado deseado.

Para mostrar esto se aprovecha que si Γ es una circunferencia de radio ϵ con centro en a que se encuentra contenida en $\mathcal{R}$ (vea la figura 5-3), entonces

$$\frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\, dz}{(z-a-h)(z-a)^2} = \frac{h}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)\, dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

Se elige h lo bastante pequeña en valor absoluto para que $a + h$ esté en Γ y que $|h| < \epsilon/2$, y se tiene, de acuerdo con el problema 1.7c), y con el hecho de que Γ tiene la ecuación $|z - a| = \epsilon$,

$$|z-a-h| \geq |z-a| - |h| > \epsilon - \epsilon/2 = \epsilon/2$$

Asimismo, como $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$, puede hallarse un número positivo M tal que $|f(z)| < M$.

Entonces, como la longitud de Γ es $2\pi\epsilon$, se tiene

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)\, dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{M(2\pi\epsilon)}{(\epsilon/2)(\epsilon^2)} = \frac{2|h|M}{\epsilon^2}$$

y así el lado izquierdo tiende a cero cuando $h \to 0$, con lo que se termina la prueba.

Es interesante observar que este resultado es equivalente a

$$\frac{d}{da} f(a) = \frac{d}{da}\left\{\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz\right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{f(z)}{z-a}\right\} dz$$

que es una extensión de la integral de contorno de la *regla de Leibnitz* para la diferenciación bajo el símbolo de integración.

www.FreeLibros.me

5.3. Demuestre que, en las condiciones del problema 5.2,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Solución

Los casos en los que $n = 0$ y $n = 1$ corresponden a los problemas 5.1 y 5.2, respectivamente, siempre que se defina que $f^{(0)}(a) = f(a)$ y $0! = 1$.

Para el caso en que $n = 2$, se usa el problema 5.2, donde a y $a + h$ están en $\mathcal{R}$, y se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{(z-a-h)^2} - \frac{1}{(z-a)^2} \right\} f(z)\, dz \\ &= \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz + \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{3(z-a) - 2h}{(z-a-h)^2 (z-a)^3} f(z)\, dz\end{aligned}$$

Se toma el límite cuando $h \to 0$, si se demuestra que el último término tiende a cero, y se obtiene el resultado deseado. La prueba es similar a la del problema 5.2, pues, al aprovechar que la integral alrededor de C es igual a la integral alrededor de Γ, se tiene

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{3(z-a) - 2h}{(z-a-h)^2 (z-a)^3} f(z)\, dz \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{M(2\pi\epsilon)}{(\epsilon/2)^2 (\epsilon^3)} = \frac{4|h|M}{\epsilon^4}$$

Porque existe un M tal que $|\{3(z-a) - 2h\} f(z)| < M$.

De manera similar se procede en los casos $n = 3, 4, \ldots$ (vea los problemas 5.36 y 5.37).

Este resultado equivale a (vea el problema 5.2)

$$\frac{d^n}{da^n} f(a) = \frac{d^n}{da^n} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)} dz \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left\{ \frac{f(z)}{z-a} \right\} dz$$

5.4. Suponga que $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$. Demuestre que $f'(z), f''(z), \ldots$ son analíticas en $\mathcal{R}$.

Solución

Esto es consecuencia de los problemas 5.2 y 5.3.

5.5. Evalúe

a) $\displaystyle\oint_C \frac{\operatorname{sen} \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$, *b)* $\displaystyle\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$, donde C es la circunferencia $|z| = 3$.

Solución

a) Como $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$, se tiene

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = \oint_C \frac{\operatorname{sen} \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2} dz - \oint_C \frac{\operatorname{sen} \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1} dz$$

De acuerdo con la fórmula integral de Cauchy con $a = 2$ y $a = 1$, respectivamente, se tiene

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2} dz = 2\pi i \{\operatorname{sen} \pi (2)^2 + \cos \pi (2)^2\} = 2\pi i$$

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1} dz = 2\pi i \{\operatorname{sen} \pi (1)^2 + \cos \pi (1)^2\} = -2\pi i$$

www.FreeLibros.me

pues $z = 1$ y $z = 2$ están en el interior de C y sen $\pi z^2 + \cos \pi z^2$ es analítica en el interior de C. Por tanto, la integral buscada tiene el valor $2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i$.

b) Sea $f(z) = e^{2z}$ y $a = -1$ en la fórmula integral de Cauchy

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \tag{1}$$

Si $n = 3$, entonces $f'''(z) = 8e^{2z}$ y $f'''(-1) = 8e^{-2}$. Por tanto, (1) se convierte en

$$8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

de donde se ve que el valor de la integral buscada es $8\pi i e^{-2}/3$.

5.6. Demuestre la fórmula integral de Cauchy para regiones múltiplemente conexas.

Solución

Se presenta una prueba para la región múltiplemente conexa $\mathcal{R}$ limitada por las curvas simples cerradas C_1 y C_2, que se muestran en la figura 5-4. Es fácil efectuar extensiones a otras regiones múltiplemente conexas (vea el problema 5.40).

Se construye una circunferencia Γ con centro en un punto a en $\mathcal{R}$ de manera que Γ quede comprendida en $\mathcal{R}$. Sea $\mathcal{R}'$ la región que consta del conjunto de puntos en $\mathcal{R}$ exteriores a Γ. Así, la función $f(z)/(z-a)$ es analítica sobre y en el interior de la frontera de $\mathcal{R}'$. Por tanto, de acuerdo con el teorema de Cauchy para regiones múltiplemente conexas (problema 4.16),

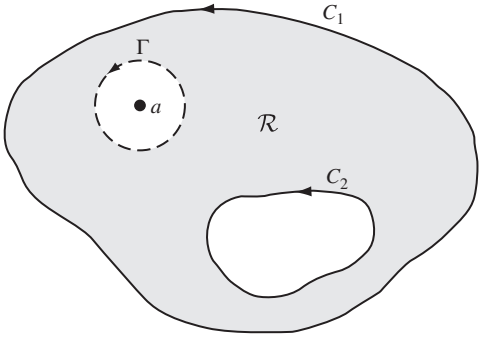


Figura 5-4

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0 \tag{1}$$

Pero, de acuerdo con la fórmula integral de Cauchy para regiones simplemente conexas, se tiene

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \tag{2}$$

de modo que, por (1),

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-a} dz \tag{3}$$

Por tanto, si C representa la frontera completa de $\mathcal{R}$ (recorrida de manera que un observador que se desplace por C tenga siempre $\mathcal{R}$ a su izquierda), (3) se escribe como

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

De manera similar, puede mostrarse que las otras fórmulas integrales de Cauchy

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

son válidas para regiones múltiplemente conexas (vea el problema 5.40).

www.FreeLibros.me

TEOREMA DE MORERA

5.7. Demuestre el *teorema de Morera* (el recíproco del teorema de Cauchy): Suponga que $f(z)$ es continua en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$ y que

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

alrededor de toda curva simple cerrada C. Así, $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

Solución

Si $\oint_C f(z)\,dz = 0$ independientemente de C, de acuerdo con el problema 4.17 se concluye que $F(z) = \int_a^z f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria que une a y z, siempre que esta trayectoria esté en $\mathcal{R}$.

Entonces, al razonar de manera idéntica a como se razonó en el problema 4.18, se resulta que $F(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$ y que $F'(z) = f(z)$. Sin embargo, en el problema 5.2 se vio que si $F'(z)$ es analítica, $F(z)$ también lo es. Por tanto, $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

DESIGUALDAD DE CAUCHY

5.8. Sea $f(z)$ analítica sobre y en el interior de una circunferencia C de radio r, con centro $z = a$. Demuestre la *desigualdad de Cauchy*

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{M \cdot n!}{r^n} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

donde M es una constante tal que $|f(z)| < M$.

Solución

De acuerdo con las fórmulas integrales de Cauchy, se tiene

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Entonces, por el problema 4.3, como $|z - a| = r$ en C y la longitud de C es $2\pi r$,

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r = \frac{M\cdot n!}{r^n}$$

TEOREMA DE LIOUVILLE

5.9. Demuestre el *teorema de Liouville:* Suponga que para toda z en la totalidad del plano complejo, *i*) $f(z)$ es analítica y *ii*) $f(z)$ es acotada [es decir, puede hallarse una constante M tal que $|f(z)| < M$]. Entonces $f(z)$ debe ser una constante.

Solución

Sean a y b dos puntos en el plano z. Suponga que C es una circunferencia de radio r y centro en a, que encierra al punto b (vea la figura 5-5).

De acuerdo con la fórmula integral de Cauchy, se tiene

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-b}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$= \frac{b-a}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-b)(z-a)}$$

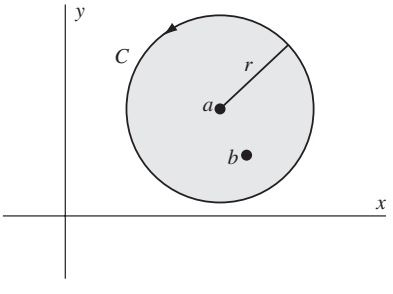


Figura 5-5

Y ahora se tiene

$$|z-a| = r, \qquad |z-b| = |z-a+a-b| \ge |z-a| - |a-b| = r - |a-b| \ge r/2$$

www.FreeLibros.me

si se elige r lo bastante grande para que $|a-b| < r/2$. Entonces, como $|f(z)| < M$ y la longitud de C es $2\pi r$, se tiene, de acuerdo con el problema 4.3,

$$|f(b)-f(a)| = \frac{|b-a|}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-b)(z-a)}\right| \le \frac{|b-a|M(2\pi r)}{2\pi(r/2)r} = \frac{2|b-a|M}{r}$$

Con $r \to \infty$ se ve que $|f(b)-f(a)| = 0$ o que $f(b) = f(a)$, lo que muestra que $f(z)$ debe ser una constante.

Otro método. En el problema 5.8, con $n = 1$ y al sustituir a por z se tiene

$$|f'(z)| \le M/r$$

Con $r \to \infty$ se deduce que $|f'(z)| = 0$ y, por tanto, $f'(z) = 0$. De manera que $f(z) =$ constante, como se deseaba.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

5.10. Demuestre el *teorema fundamental del álgebra*: Toda ecuación polinomial $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$, donde el grado $n \ge 1$ y $a_n \ne 0$, tiene por lo menos una raíz.

Solución

Si $P(z) = 0$ no tiene raíz, entonces $f(z) = 1/P(z)$ es analítica para todo z. Asimismo, $|f(z)| = 1/|P(z)|$ está acotada (y en realidad tiende a cero) cuando $|z| \to \infty$.

Así, de acuerdo con el teorema de Liouville (problema 5.9), se concluye que $f(z)$ y por ende $P(z)$ deben ser constantes. Esto genera una contradicción, por lo que se concluye que $P(z) = 0$ debe tener por lo menos una raíz o, como también suele decirse, $P(z)$ debe tener por lo menos un *cero.*

5.11. Demuestre que toda ecuación polinomial $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$, donde el grado $n \ge 1$ y $a_n \ne 0$, tiene exactamente n raíces.

Solución

De acuerdo con el teorema fundamental del álgebra (problema 5.10), $P(z)$ tiene al menos una raíz. Esta raíz se denota α. Entonces, $P(\alpha) = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} P(z) - P(\alpha) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n - (a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n) \\ &= a_1(z-\alpha) + a_2(z^2-\alpha^2) + \cdots + a_n(z^n - \alpha^n) \\ &= (z-\alpha)Q(z) \end{aligned}$$

donde $Q(z)$ es un polinomio de grado $(n-1)$.

Al aplicar de nuevo el teorema fundamental del álgebra, se ve que $Q(z)$ tiene por lo menos un cero, que se denota β [el cual puede ser igual a α], y entonces $P(z) = (z-\alpha)(z-\beta)R(z)$. Si se continúa de esta manera se verá que $P(z)$ tiene exactamente n ceros.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE GAUSS

5.12. Sea $f(z)$ analítica en el interior de una circunferencia C y sobre ella, con centro en a. Demuestre el *teorema del valor medio de Gauss* que sostiene que la media de los valores de $f(z)$ sobre C es $f(a)$.

Solución

De acuerdo con la fórmula integral de Cauchy,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{1}$$

www.FreeLibros.me

Si el radio de C es r, C tiene como ecuación $|z-a|=r$ o $z=a+re^{i\theta}$. Así, (1) se convierte en

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{i\theta})ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})\,d\theta$$

que es el resultado buscado.

TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO

5.13. Demuestre el *teorema del módulo máximo*: Suponga que $f(z)$ es analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C. Así, el valor máximo de $|f(z)|$ se encuentra sobre C, a menos que $f(z)$ sea una constante.

Solución

Método 1

Como $f(z)$ es analítica y por ende continua en el interior y sobre C, se sigue que $|f(z)|$ tiene un valor máximo M al menos en un valor de z sobre o en el interior de C. Suponga que la función no toma este valor máximo sobre la frontera de C sino en un punto interior a, es decir, $|f(a)|=M$. Sea C_1 un círculo en el interior de C con centro en a (vea la figura 5-6). Si $f(z)$ no es constante en el interior de C_1, entonces debe existir un punto en el interior de C_1, por ejemplo b, tal que $|f(b)|<M$, o, lo que es lo mismo, $|f(b)|=M-\epsilon$, donde $\epsilon>0$.

Ahora, debido a la continuidad de $|f(z)|$ en b, se ve que para toda $\epsilon>0$ puede hallarse un $\delta>0$ tal que

$$||f(z)|-|f(b)||<\frac{1}{2}\epsilon \text{ siempre que } |z-b|<\delta \qquad (1)$$

es decir,

$$|f(z)|<|f(b)|+\frac{1}{2}\epsilon=M-\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=M-\frac{1}{2}\epsilon \qquad (2)$$

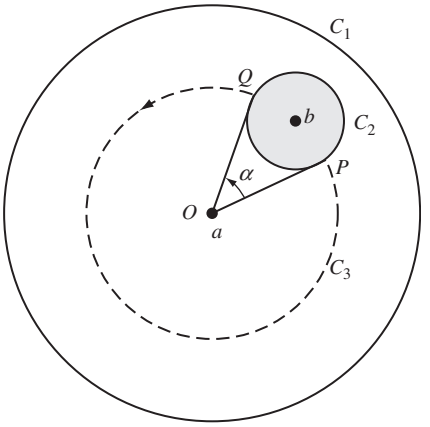


Figura 5-6

para todos los puntos interiores de una circunferencia C_2 con centro en b y radio δ, como se muestra sombreada en la figura.

Trácese un círculo C_3, con centro en a y que pase por b (círculo punteado en la figura 5-6). En una parte de este círculo [a saber, en la parte PQ incluida en C_2] se tiene, de acuerdo con (2), $|f(z)|<M-\frac{1}{2}\epsilon$. En la parte restante del círculo se tiene $|f(z)|\le M$.

Si se toma θ en sentido contrario a las manecillas del reloj desde OP y $\angle POQ=\alpha$, se sigue, de acuerdo con el problema 5.12, que si $r=|b-a|$,

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha}f(\alpha+re^{i\theta})\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi}f(a+re^{i\theta})\,d\theta$$

Entonces,

$$\begin{aligned}|f(a)|&\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha}|f(a+re^{i\theta})|\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi}|f(a+re^{i\theta})|\,d\theta\\&\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha}\left(M-\frac{1}{2}\epsilon\right)d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi}M\,d\theta\\&=\frac{\alpha}{2\pi}\left(M-\frac{1}{2}\epsilon\right)+\frac{M}{2\pi}(2\pi-\alpha)\\&\ne M-\frac{\alpha\epsilon}{4\pi}\end{aligned}$$

es decir, $|f(a)|=M\le M-(\alpha\epsilon/4\pi)$, cosa que es imposible. Debido a esta contradicción, se concluye que $|f(z)|$ no alcanza su máximo en ningún punto interior de C, por lo que debe tomar su máximo sobre C.

www.FreeLibros.me

Método 2
De acuerdo con el problema 5.12, se tiene

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|\, d\theta \tag{3}$$

Suponga que $|f(a)|$ es un máximo, de manera que $|f(a+re^{i\theta})| \leq |f(a)|$. Si $|f(a+re^{i\theta})| < |f(a)|$ para algún valor de θ, entonces, debido a la continuidad de f, esto debe ser válido para un arco finito, por ejemplo, $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Pero, en ese caso, el valor medio de $|f(a+re^{i\theta})|$ es menor a $|f(a)|$, lo que contradice a (3). Por tanto, se sigue que, en toda vecindad δ de a, es decir, para $|z-a| < \delta$, $f(z)$ debe ser una constante. Si $f(z)$ no es constante, el valor máximo de $|f(z)|$ debe estar sobre C.

En el problema 5.57 se presenta otro método.

TEOREMA DEL MÓDULO MÍNIMO

5.14. Demuestre el *teorema del módulo mínimo:* Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C. Demuestre que, si $f(z) \neq 0$ en el interior de C, $|f(z)|$ debe tomar su valor mínimo sobre C.

Solución

Como $f(z)$ es analítica en el interior y sobre C, por ende $f(z) \neq 0$ en el interior de C, entonces $1/f(z)$ es analítica en el interior y sobre C. De acuerdo con el teorema del módulo máximo, se sigue que $1/|f(z)|$ no puede tomar su valor máximo en el interior de C, y por ende $|f(z)|$ no puede tomar su valor mínimo en el interior de C. Entonces, como $|f(z)|$ tiene un mínimo, este mínimo debe alcanzarse en C.

5.15. Dé un ejemplo que muestre que si $f(z)$ es analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C, y si $f(z) = 0$ en algún punto en el interior de C, entonces $|f(z)|$ no necesariamente toma su valor mínimo sobre C.

Solución

Para $|z| \leq 1$, sea $f(z) = z$, de manera que C es un círculo con centro en el origen y radio 1. En $z = 0$ se tiene $f(z) = 0$. Si $z = re^{i\theta}$, entonces $|f(z)| = r$ y es claro que el valor mínimo de $|f(z)|$ no está sobre C, sino en su interior, donde $r = 0$, es decir, en $z = 0$.

TEOREMA DEL ARGUMENTO

5.16. Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C, salvo en un polo $z = \alpha$ de orden (multiplicidad) p en el interior de C. Suponga que en el interior de C, $f(z)$ tiene únicamente un cero $z = \beta$ de orden (multiplicidad) n y ningún cero sobre C. Compruebe que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = n - p$$

Solución

Sean C_1 y Γ_1 circunferencias en el interior de C que no se superponen y que encierran a $z = \alpha$ y a $z = \beta$, respectivamente. [Vea la figura 5-7.] Así,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \tag{1}$$

Como $f(z)$ es un polo de orden p en $z = \alpha$, se tiene

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p} \tag{2}$$

www.FreeLibros.me

donde $F(z)$ es analítica y diferente de cero en el interior y sobre C_1. Así, se toman logaritmos en (2), se diferencia y se encuentra que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z-\alpha} \tag{3}$$

de manera que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)}dz - \frac{p}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{dz}{z-\alpha} = 0 - p = -p \tag{4}$$

Como $f(z)$ tiene un cero de orden n en $z = \beta$, se tiene

$$f(z) = (z-\beta)^n G(z) \tag{5}$$

donde $G(z)$ es analítica y diferente de cero en el interior y sobre Γ_1.

Y mediante diferenciación logarítmica se tiene

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-\beta} + \frac{G'(z)}{G(z)} \tag{6}$$

de manera que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{n}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{z-\beta} + \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{G'(z)}{G(z)}dz = n \tag{7}$$

Así, de (1), (4) y (7) se obtiene el resultado buscado

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n - p$$

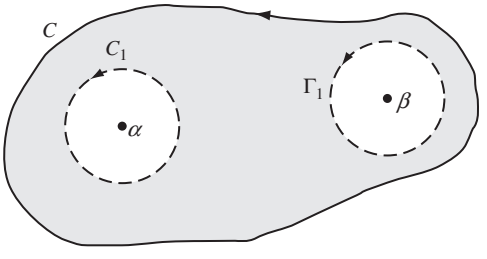


Figura 5-7

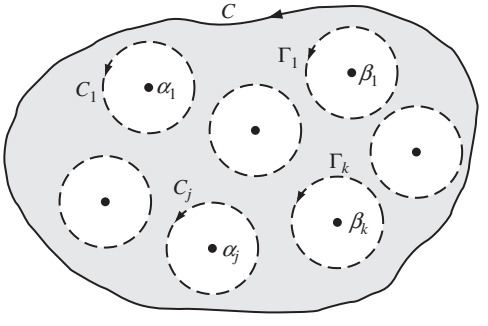


Figura 5-8

5.17. Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C excepto por un mínimo finito de polos en el interior de C. Suponga que $f(z) \neq 0$ en C. Si N y P son, respectivamente, el número de ceros y el número de polos de $f(z)$ en el interior de C, contando las multiplicidades, demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$$

Solución

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ los respectivos polos y ceros de $f(z)$ en el interior de C [figura 5-8], y suponga que sus multiplicidades son $p_1, p_2, \ldots, p_j$ y $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

www.FreeLibros.me

Encierre todos los polos y todos los ceros en las circunferencias $C_1, C_2, \ldots, C_j$ y $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$, que no se superponen. Esto siempre es posible porque los polos y los ceros son aislados.

Así se tiene, con los resultados del problema 5.16,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \sum_{r=1}^{j}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \sum_{r=1}^{k}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \\ &= \sum_{r=1}^{j} n_r - \sum_{r=1}^{k} p_r \\ &= N - P\end{aligned}$$

TEOREMA DE ROUCHÉ

5.18. Pruebe el *teorema de Rouché*: Suponga que $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en el interior y sobre una curva simple cerrada C y suponga que $|g(z)| < |f(z)|$ sobre C. Entonces, $f(z) + g(z)$ y $f(z)$ tienen el mismo número de ceros en el interior de C.

Solución

Sea $F(z) = g(z)/f(z)$, de manera que $g(z) = f(z)F(z)$ o, para simplificar, $g = fF$. De este modo, si N_1 y N_2 son, respectivamente, el número de ceros de $f + g$ y de f en el interior de C, de acuerdo con el problema 5.17, se tiene, al aprovechar que estas funciones no tienen polos en el interior de C,

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f' + g'}{f + g}\,dz, \qquad N_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'}{f}\,dz$$

Entonces,

$$\begin{aligned}N_1 - N_2 &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f' + f'F + fF'}{f + fF}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'}{f}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(1+F) + fF'}{f(1+F)}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'}{f}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \left\{\frac{f'}{f} + \frac{F'}{1+F}\right\}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'}{f}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F'}{1+F}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C F'(1 - F + F^2 - F^3 + \cdots)\,dz = 0\end{aligned}$$

al aprovechar, como se da, que $|F| < 1$ sobre C, de manera que esta serie es uniformemente convergente sobre C y la integración término por término da el valor cero. Por tanto, $N_1 = N_2$, como se deseaba.

5.19. Con el teorema de Rouché (problema 5.18) demuestre que todo polinomio de grado n tiene exactamente n ceros (teorema fundamental del álgebra).

Solución

Suponga que el polinomio es $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$, donde $a_n \neq 0$. Elija $f(z) = a_nz^n$ y $g(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}$.

Si C es una circunferencia con centro en el origen y radio $r > 1$, entonces sobre C se tiene

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| &= \frac{|a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}|}{|a_nz^n|} \le \frac{|a_0| + |a_1|r + |a_2|r^2 + \cdots + |a_{n-1}|r^{n-1}}{|a_n|r^n} \\ &\le \frac{|a_0|r^{n-1} + |a_1|r^{n-1} + |a_2|r^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}|r^{n-1}}{|a_n|r^n} = \frac{|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n|r}\end{aligned}$$

Así, al elegir r lo bastante grande, puede hacerse que $|g(z)/f(z)| < 1$, es decir, $|g(z)| < |f(z)|$. Por tanto, de acuerdo con el teorema de Rouché, el polinomio $f(z) + g(z)$ tiene el mismo número de ceros que $f(z) = a_nz^n$. Pero como esta última función tiene n ceros, todos en $z = 0$, $f(z) + g(z)$ también tiene n ceros, con lo que se termina la prueba.

www.FreeLibros.me

5.20. Demuestre que todas las raíces de $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ se encuentran entre las circunferencias $|z| = 1$ y $|z| = 2$.

Solución

Considere la circunferencia C_1: $|z| = 1$. Sea $f(z) = 12$, $g(z) = z^7 - 5z^3$. Sobre C_1 se tiene

$$|g(z)| = |z^7 - 5z^3| \leq |z^7| + |5z^3| \leq 6 < 12 = |f(z)|$$

Por tanto, de acuerdo con el teorema de Rouché, $f(z) + g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ tiene el mismo número de ceros en el interior de $|z| = 1$ que $f(z) = 12$, es decir, en el interior de C_1 no hay ningún cero.

Considere el círculo C_2: $|z| = 2$. Sea $f(z) = z^7$, $g(z) = 12 - 5z^3$. Sobre C_2 se tiene

$$|g(z)| = |12 - 5z^3| \leq |12| + |5z^3| \leq 60 < 2^7 = |f(z)|$$

Por tanto, de acuerdo con el teorema de Rouché, $f(z) + g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ tiene el mismo número de ceros en el interior de $|z| = 2$ que $f(z) = z^7$, es decir, todos los ceros están en el interior de C_2.

Por tanto, todos los ceros están en el interior de $|z| = 2$ pero en el exterior de $|z| = 1$, como se deseaba.

FÓRMULAS INTEGRALES DE POISSON PARA UN CÍRCULO

5.21. *a*) Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre un círculo C definido por $|z| = R$, y sea $z = re^{i\theta}$ un punto en el interior de C (vea la figura 5-9). Demuestre que

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} f(Re^{i\phi})\, d\phi$$

b) Sean $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$ las partes real e imaginaria de $f(re^{i\theta})$. Demuestre que

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\, u(R, \phi)\, d\phi}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}$$

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\, v(R, \phi)\, d\phi}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}$$

Estos resultados se conocen como *fórmulas integrales de Poisson para el círculo.*

Solución

a) Como $z = re^{i\theta}$ es un punto cualquiera en el interior de C, de acuerdo con la fórmula integral de Cauchy se tiene

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w - z}\, dw \qquad (1)$$

El *inverso del punto* z respecto de C está en el exterior de C, y está dado por $R^2/\bar{z}$. Por tanto, de acuerdo con el teorema de Cauchy,

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w - R^2/\bar{z}}\, dw \qquad (2)$$

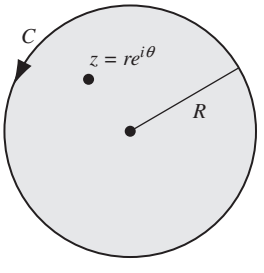


Figura 5-9

www.FreeLibros.me

Si se resta (2) de (1), se encuentra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \left\{\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w - R^2/\bar{z}}\right\} f(w)\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z - R^2/\bar{z}}{(w-z)(w-R^2/\bar{z})} f(w)\,dw \tag{3}$$

Ahora, sean $z = re^{i\theta}$ y $w = Re^{i\phi}$. Entonces, como $\bar{z} = re^{-i\theta}$, de (3) se obtiene

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\{re^{i\theta} - (R^2/r)e^{i\theta}\} f(Re^{i\phi}) iRe^{i\phi}\,d\phi}{\{Re^{i\phi} - re^{i\theta}\}\{Re^{i\phi} - (R^2/r)e^{i\theta}\}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - R^2)e^{i(\theta+\phi)} f(Re^{i\phi})\,d\phi}{(Re^{i\phi} - re^{i\theta})(re^{i\phi} - Re^{i\theta})}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(Re^{i\phi})\,d\phi}{(Re^{i\phi} - re^{i\theta})(Re^{-i\phi} - re^{-i\theta})} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(Re^{i\phi})\,d\phi}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}$$

b) Como $f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ y $f(Re^{i\phi}) = u(R, \phi) + iv(R, \phi)$, de acuerdo con el inciso *a*) se tiene

$$u(r, \theta) + iv(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\{u(R, \phi) + iv(R, \phi)\}\,d\phi}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R, \phi)\,d\phi}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)v(R, \phi)\,d\phi}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}$$

Se igualan las partes reales y las imaginarias para llegar al resultado buscado.

FÓRMULAS INTEGRALES DE POISSON PARA UN SEMIPLANO

5.22. Deduzca las fórmulas de Poisson para el semiplano [vea la página 146].

Solución

Sea C la frontera de un semicírculo de radio R [vea la figura 5-10] que contenga a ζ como punto interior. Como C encierra a ζ pero no a $\bar{\zeta}$, de acuerdo con la fórmula integral de Cauchy se tiene

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - \zeta}dz, \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - \bar{\zeta}}dz$$

Entonces, mediante resta,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\left\{\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z-\bar{\zeta}}\right\}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(\zeta - \bar{\zeta})f(z)\,dz}{(z-\zeta)(z-\bar{\zeta})}$$

Con $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$, esto se escribe

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\eta f(x)\,dx}{(x-\xi)^2 + \eta^2} + \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} \frac{\eta f(z)\,dz}{(z-\zeta)(z-\bar{\zeta})}$$

www.FreeLibros.me

donde Γ es el arco semicircular de C. Cuando $R \to \infty$, esta última integral tiende a cero [vea el problema 5.76] y se tiene

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta f(x)\, dx}{(x-\xi)^2 + \eta^2}$$

Se escribe $f(\zeta) = f(\xi + i\eta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$, $\quad f(x) = u(x, 0) + iv(x, 0)$, y se obtiene, como se deseaba,

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta u(x, 0)\, dx}{(x-\xi)^2 + \eta^2}, \qquad v(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta v(x, 0)\, dx}{(x-\xi)^2 + \eta^2}$$

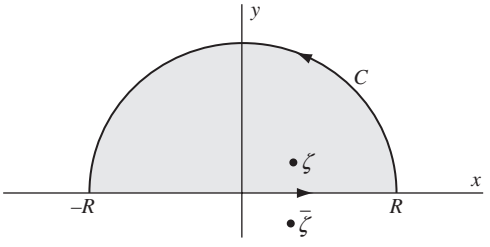


Figura 5-10

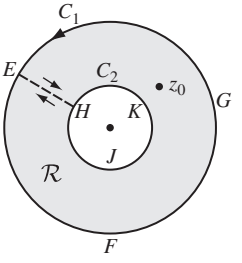


Figura 5-11

PROBLEMAS DIVERSOS

5.23. Sea $f(z)$ analítica en una región $\mathcal{R}$ limitada por dos circunferencias concéntricas C_1 y C_2, y sobre su frontera [figura 5-11]. Demuestre que, si z_0 es un punto en $\mathcal{R}$, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Solución

Método 1. Trace un corte transversal EH que una las circunferencias C_1 y C_2. Entonces $f(z)$ es analítica en la región limitada por $EFGEHKJHE$. Por tanto, de acuerdo con la fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{EFGEHKJHE} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{EFGE} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{EH} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{HKJH} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{HE} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \end{aligned}$$

pues las integrales a lo largo de EH y HE se anulan.

Hay fórmulas similares para las derivadas de $f(z)$.

Método 2. A este resultado también se llega a partir de la ecuación (3) del problema 5.6 si se sustituyen las curvas simples cerradas C_1 y C_2 por las circunferencias de la figura 5-11.

5.24. Demuestre que, para $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\, d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} 2\pi$$

www.FreeLibros.me

Solución

Sea $z = e^{i\theta}$. Entonces, $dz = ie^{i\theta}\,d\theta = iz\,d\theta$ o $d\theta = dz/iz$ y $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Por tanto, si C es la circunferencia unitaria $|z| = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\,d\theta &= \oint_C \left\{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\}^{2n} \frac{dz}{iz} \\
&= \frac{1}{2^{2n}i}\oint_C \frac{1}{z}\left\{z^{2n} + \binom{2n}{1}(z^{2n-1})\left(\frac{1}{z}\right) + \cdots + \binom{2n}{k}(z^{2n-k})\left(\frac{1}{z}\right)^k + \cdots + \left(\frac{1}{z}\right)^{2n}\right\}dz \\
&= \frac{1}{2^{2n}i}\oint_C \left\{z^{2n-1} + \binom{2n}{1}z^{2n-3} + \cdots + \binom{2n}{k}z^{2n-2k-1} + \cdots + z^{-2n}\right\}dz \\
&= \frac{1}{2^{2n}i}\cdot 2\pi i\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}2\pi \\
&= \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}2\pi = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n)(n-1)\cdots 1}{2^{2n}n!n!}2\pi \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}2\pi
\end{aligned}$$

5.25. Suponga que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$. Demuestre que u y v son armónicas en $\mathcal{R}$.

Solución

En el problema 3.6 se probó que u y v son armónicas en $\mathcal{R}$, es decir, que satisfacen la ecuación $(\partial^2\phi/\partial x^2) + (\partial^2\phi/\partial y^2) = 0$, en el *supuesto* de la existencia de las segundas derivadas parciales de u y de v, es decir, de la existencia de $f''(z)$.

Este supuesto ya no es necesario, pues en el problema 5.4 se demostró que si $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$, entonces *todas* las derivadas de $f(z)$ existen.

5.26. Demuestre el *teorema de Schwartz*: Sea $f(z)$ analítica en $|z| \le R$ con $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le M$. Entonces,

$$|f(z)| \le \frac{M|z|}{R}$$

Solución

La función $f(z)/z$ es analítica en $|z| \le R$. Por tanto, en $|z| = R$, se tiene, de acuerdo con el teorema del módulo máximo,

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \frac{M}{R}$$

Sin embargo, como esta desigualdad también debe ser válida para los puntos interiores de $|z| = R$, para $|z| \le R$ se tiene $|f(z)| \le M|z|/R$, como se deseaba.

5.27. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,\mathrm{sen}(1/x) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

donde x es real. Muestre que la función $f(x)$ *a*) tiene una primera derivada en todos los valores de x para los que $0 \le x \le 1$, pero *b*) no tiene una segunda derivada en $0 \le x \le 1$. *c*) Concilie estas conclusiones con el resultado del problema 5.4.

www.FreeLibros.me

Solución

a) El único lugar donde puede cuestionarse la existencia de la primera derivada es $x = 0$. Pero en $x = 0$ la derivada es

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \operatorname{sen}(1/\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \operatorname{sen}(1/\Delta x) = 0$$

y, por ende, existe.

En todos los demás valores de x en $0 \leq x \leq 1$ se da la derivada (con reglas elementales de diferenciación) mediante

$$x^2 \cos(1/x)\{-1/x^2\} + (2x) \operatorname{sen}(1/x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$$

b) De acuerdo con el inciso *a*), se tiene

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Para toda x tal que $0 < x \leq 1$ existe la segunda derivada. En $x = 0$, la segunda derivada se da por

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(0 + \Delta x) - f'(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x \operatorname{sen}(1/\Delta x) - \cos(1/\Delta x) - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \{2 \operatorname{sen}(1/\Delta x) - (1/\Delta x) \cos(1/\Delta x)\} \end{aligned}$$

el cual no existe.

Resulta que la segunda derivada de $f(x)$ no existe en $0 \leq x \leq 1$.

c) De acuerdo con el problema 5.4, si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$, todas las derivadas superiores existen y son analíticas en $\mathcal{R}$. El resultado anterior no se contrapone a este resultado, pues la función $f(z) = z^2 \operatorname{sen}(1/z)$ no es analítica en ninguna región que incluya a $z = 0$.

5.28. *a*) Sea $F(z)$ analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada, salvo en un polo de orden m en $z = a$ en el interior de C. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z)\, dz = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m F(z)\}$$

b) ¿Cómo habría que modificar la fórmula obtenida en el inciso *a*) si en el interior de C hubiera más de un polo?

Solución

a) Si $F(z)$ tiene un polo de orden m en $z = a$, entonces $F(z) = f(z)/(z-a)^m$, donde $f(z)$ es analítica en el interior de C y sobre ella, y $f(a) \neq 0$. Así, de acuerdo con la fórmula integral de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^m} dz = \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m F(z)\}$$

b) Suponga que en el interior de C existen dos polos en $z = a_1$ y $z = a_2$, de órdenes m_1 y m_2, respectivamente. Sean Γ_1 y Γ_2 círculos en el interior de C con radios ϵ_1 y ϵ_2, y centros en a_1 y a_2, respectivamente (vea la figura 5-12). Así,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} F(z)\, dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} F(z)\, dz \tag{1}$$

www.FreeLibros.me

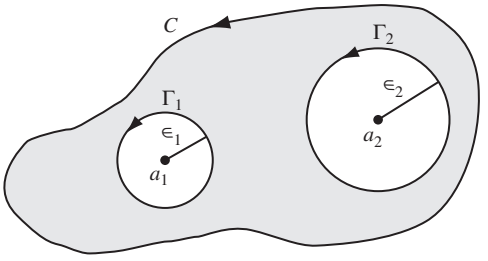


Figura 5-12

Si $F(z)$ tiene un polo de orden m_1 en $z = a_1$, entonces

$$F(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a_1)^{m_1}}, \quad \text{donde } f_1(z) \text{ es analítica y } f_1(a_1) \neq 0$$

Si $F(z)$ tiene un polo de orden m_2 en $z = a_2$, entonces

$$F(z) = \frac{f_2(z)}{(z-a_2)^{m_2}}, \text{ donde } f_2(z) \text{ es analítica y } f_2(a_2) \neq 0$$

Por tanto, de acuerdo con (1) y con el inciso a),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(z)\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f_1(z)}{(z-a_1)^{m_1}}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f_2(z)}{(z-a_2)^{m_2}}\,dz \\ &= \lim_{z\to a_1}\frac{1}{(m_1-1)!}\frac{d^{m_1-1}}{dz^{m_1-1}}\{(z-a_1)^{m_1}F(z)\} \\ &\quad + \lim_{z\to a_2}\frac{1}{(m_2-1)!}\frac{d^{m_2-1}}{dz^{m_2-1}}\{(z-a_2)^{m_2}F(z)\}\end{aligned}$$

Si los límites de la derecha se denotan R_1 y R_2, se escribe

$$\oint_C F(z)\,dz = 2\pi i(R_1 + R_2)$$

donde R_1 y R_2 se conocen como los *residuos* de $F(z)$ en los polos $z = a_1$ y $z = a_2$.

En general, si $F(z)$ tiene varios polos en el interior de C cuyos residuos son $R_1, R_2, \ldots$, entonces $\oint_C F(z)\,dz = 2\pi i$ veces la suma de los residuos. Esto se conoce como *teorema del residuo*. En el capítulo 7 se verán aplicaciones de este teorema y generalizaciones a otras singularidades distintas de los polos.

5.29. Evalúe $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}\,dz$, donde C es la circunferencia $|z| = 4$.

Solución

Los polos de $\dfrac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} = \dfrac{e^z}{(z-\pi i)^2(z+\pi i)^2}$ están en $z = \pm\pi i$ en el interior de C y ambos son de orden dos.

El residuo en $z = \pi i$ es $\displaystyle\lim_{z\to\pi i}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z-\pi i)^2\frac{e^z}{(z-\pi i)^2(z+\pi i)^2}\right\} = \frac{\pi+i}{4\pi^3}$.

El residuo en $z = -\pi i$ es $\displaystyle\lim_{z\to-\pi i}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z+\pi i)^2\frac{e^z}{(z-\pi i)^2(z+\pi i)^2}\right\} = \frac{\pi-i}{4\pi^3}$.

Entonces, $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}\,dz = 2\pi i \text{ (suma de los residuos)} = 2\pi i\left(\frac{\pi+i}{4\pi^3} + \frac{\pi-i}{4\pi^3}\right) = \frac{i}{\pi}$.

www.FreeLibros.me

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

FÓRMULAS INTEGRALES DE CAUCHY

5.30. Evalúe $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z-2}\,dz$ si C es: *a*) la circunferencia $|z| = 3$, *b*) la circunferencia $|z| = 1$.

5.31. Evalúe $\displaystyle\oint_C \frac{\operatorname{sen}\ 3z}{z+\pi/2}\,dz$ si C es la circunferencia $|z| = 5$.

5.32. Evalúe $\displaystyle\oint_C \frac{e^{3z}}{z-\pi i}\,dz$ si C es: *a*) la circunferencia $|z-1| = 4$, *b*) la elipse $|z-2| + |z+2| = 6$.

5.33. Evalúe $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{\cos \pi 2}{z^2-1}\,dz$ alrededor de un rectángulo con vértices en: *a*) $2 \pm i$, $-2 \pm i$; *b*) $-i$, $2-i$, $2+i$, i.

5.34. Muestre que $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \operatorname{sen} t$ si $t > 0$ y C es la circunferencia $|z| = 3$.

5.35. Evalúe $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3}\,dz$, donde C es la circunferencia $|z| = 2$.

5.36. Suponga que C es una curva simple cerrada que encierra a $z = a$ y que $f(z)$ es analítica en el interior y sobre C. Demuestre que $f'''(a) = \dfrac{3!}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^4}$.

5.37. Demuestre las fórmulas integrales de Cauchy para todos los valores enteros positivos de n. [*Sugerencia:* Use inducción matemática.]

5.38. Sea C la circunferencia $|z| = 1$. Encuentre el valor de *a*) $\displaystyle\oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z}{z-\pi/6}\,dz$, *b*) $\displaystyle\oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z}{(z-\pi/6)^3}\,dz$.

5.39. Evalúe $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}\,dz$ si $t > 0$ y C es la circunferencia $|z| = 3$.

5.40. Verifique las fórmulas integrales de Cauchy para la región múltiplemente conexa de la figura 4-26, página 140.

TEOREMA DE MORERA

5.41. *a*) Determine si $G(z) = \int_1^z d\zeta/\zeta$ es independiente de la trayectoria que une a 1 y z.

b) Analice la relación entre su respuesta al inciso *a*) y el teorema de Morera.

5.42. ¿Es aplicable el teorema de Morera en el caso de una región múltiplemente conexa? Justifique su respuesta.

5.43. *a*) Suponga que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones armónicas conjugadas y que C es una curva simple cerrada. Demuestre que $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$.

b) Suponga que para toda curva simple C cerrada en una región $\mathcal{R}$, $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$. ¿Es verdad que P y Q son funciones armónicas conjugadas, es decir, que el recíproco del inciso *a*) es verdad? Justifique su conclusión.

DESIGUALDAD DE CAUCHY

5.44. *a*) Con la desigualdad de Cauchy obtenga estimaciones de las derivadas de sen z en $z = 0$ y *b*) determine el error en estas estimaciones.

5.45. *a*) Muestre que si $f(z) = 1/(1-z)$, entonces $f^{(n)}(z) = n!/(1-z)^{n+1}$.

b) Con el inciso *a*) muestre que la desigualdad de Cauchy es la "mejor posible", es decir, la estimación del crecimiento de la n-ésima derivada no puede mejorarse para *todas* las funciones.

www.FreeLibros.me

5.46. Demuestre que en la desigualdad de Cauchy (5.3), página 145, la igualdad se da en el caso en el que $n = m$ si y sólo si $f(z) = kM(z-a)^m/r^m$, donde $|k| = 1$.

5.47. En la función $f(z) = e^{-1/z^2}$ analice la desigualdad de Cauchy en la vecindad de $z = 0$.

TEOREMA DE LIOUVILLE

5.48. La función de una variable real que se defina mediante $f(x) = \operatorname{sen} x$ es *a*) analítica en todas partes y *b*) acotada, es decir, $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ para toda x, pero sin duda no es una constante. ¿Contradice esto el teorema de Liouville? Explique.

5.49. Suponga que $a > 0$ y $b > 0$ son constantes y que una función no constante $F(z)$ es tal que $F(z+a) = F(z)$ y que $F(z+bi) = F(z)$. Demuestre que $F(z)$ no puede ser analítica en el rectángulo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

5.50. *a*) Dé los detalles de la prueba del teorema fundamental del álgebra para mostrar que en especial la función $f(z) = z^4 - z^2 - 2z + 2$ tiene exactamente cuatro ceros. *b*) Determine los ceros de $f(z)$.

5.51. Determine todas la raíces de las ecuaciones: *a*) $z^3 - 3z + 4i = 0$, *b*) $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE GAUSS

5.52. Evalúe $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\pi/6 + 2e^{i\theta})\, d\theta$.

5.53. Muestre que el valor medio de una función armónica sobre una circunferencia es igual al valor de la función en el centro.

5.54. Encuentre el valor medio de $x^2 - y^2 + 2y$ sobre la circunferencia $|z - 5 + 2i| = 3$.

5.55. Demuestre que $\int_0^{\pi} \ln \operatorname{sen} \theta\, d\theta = -\pi \ln 2$. [*Sugerencia:* Considere $f(z) = \ln(1+z)$.]

TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO

5.56. Encuentre el máximo de $|f(z)|$ en $|z| \leq 1$ para las funciones $f(z)$ dadas por: *a*) $z^2 - 3z + 2$, *b*) $z^4 + z^2 + 1$, *c*) $\cos 3z$, *d*) $(2z+1)/(2z-1)$

5.57. *a*) Sea $f(z)$ analítica en el interior de una curva simple cerrada C y sobre ella, que encierra a $z = a$, y demuestre que

$$\{f(a)\}^n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\{f(z)\}^n}{z-a}\,dz \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

b) Con el inciso *a*) verifique que $|f(a)|^n \leq M^n/2\pi D$, donde D es la distancia mínima de a a la curva C y M es el valor máximo de $|f(z)|$ sobre C.

c) Tome la raíz n-ésima en ambos lados de la desigualdad del inciso *b*) y, con $n \to \infty$, demuestre el teorema del módulo máximo.

5.58. Sea $U(x, y)$ armónica en el interior y sobre una curva simple C cerrada. Demuestre que la función $U(x, y)$ alcanza sobre C los valores *a*) máximo y *b*) mínimo. ¿Existen otras restricciones para $U(x, y)$?

5.59. Sea C la circunferencia $|z| = 1$. Verifique el problema 5.58 con las funciones *a*) $x^2 - y^2$ y *b*) $x^3 - 3xy^2$.

5.60. ¿Es válido el teorema del módulo máximo para regiones múltiplemente conexas? Justifique su respuesta.

www.FreeLibros.me

TEOREMA DEL ARGUMENTO

5.61. Sea $f(z) = z^5 - 3iz^2 + 2z - 1 + i$. Evalúe $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$, donde C encierra todos los ceros de $f(z)$.

5.62. Sea $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$. Evalúe $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$, donde C es la circunferencia $|z| = 4$.

5.63. Evalúe $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ si C es la circunferencia $|z| = \pi$ y *a*) $f(z) = \operatorname{sen} \pi z$, *b*) $f(z) = \cos \pi z$, *c*) $f(z) = \tan \pi z$.

5.64. Sea $f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 12z + 20$ y C la circunferencia $|z| = 5$. Evalúe $\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz$.

TEOREMA DE ROUCHÉ

5.65. Si $a > e$, demuestre que $az^n = e^z$ tiene n raíces en el interior de $|z| = 1$.

5.66. Demuestre que $ze^z = a$, donde $a \neq 0$ es real y tiene una cantidad infinita de raíces.

5.67. Demuestre que $\tan z = az$, $a > 0$ tiene *a*) una cantidad infinita de raíces, *b*) sólo dos raíces imaginarias puras si $0 < a < 1$, *c*) todas sus raíces reales si $a \geq 1$.

5.68. Demuestre que $z \tan z = a$, $a > 0$ tiene una cantidad infinita de raíces, pero no raíces imaginarias.

FÓRMULA INTEGRAL DE POISSON PARA LA CIRCUNFERENCIA

5.69. Muestre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}d\phi = 2\pi$

a) con, *b*) sin la fórmula integral de Poisson para la circunferencia.

5.70. Muestre que

$$a)\ \int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos\phi}\cos(\operatorname{sen}\phi)}{5 - 4\ \cos(\theta - \phi)}d\phi = \frac{2\pi}{3}e^{\cos\theta}\cos(\operatorname{sen}\theta), \quad b)\ \int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos\phi}\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\phi)}{5 - 4\cos(\theta - \phi)}d\phi = \frac{2\pi}{3}e^{\cos\theta}\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\theta).$$

5.71. *a*) Demuestre que la función

$$U(r,\ \theta) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2r\operatorname{sen}\theta}{1 - r^2}\right), \qquad 0 < r < 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi$$

es armónica en el interior de la circunferencia $|z| = 1$.

b) Muestre que $\lim_{r\to 1-} U(r,\ \theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \pi \\ -1 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$

c) ¿Puede deducir la expresión para $U(r, \theta)$ a partir de la fórmula integral de Poisson para el círculo?

5.72. Suponga que $f(z)$ es analítica en el interior y sobre la circunferencia C definida por $|z| = R$, y suponga que $z = re^{i\theta}$ es un punto cualquiera en el interior de C.

Muestre que

$$f'(re^{i\theta}) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R(R^2 - r^2)f(Re^{i\phi})\operatorname{sen}(\theta - \phi)}{[R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2]^2}d\phi$$

5.73. Verifique que las funciones u y v de las ecuaciones (5.7) y (5.8), página 146, satisfacen la ecuación de Laplace.

www.FreeLibros.me

FÓRMULAS INTEGRALES DE POISSON PARA UN SEMIPLANO

5.74. Encuentre una función que sea armónica en el semiplano superior $y > 0$ y que sobre el eje x tome los valores -1 si $x < 0$ y 1 si $x > 0$.

5.75. Repita el problema 5.74 si la función toma los valores -1 si $x < -1$, 0 si $-1 < x < 1$ y 1 si $x > 1$.

5.76. Demuestre la afirmación del problema 5.22 de que la integral sobre Γ tiende a cero cuando $R \to \infty$.

5.77. Demuestre que, con las restricciones adecuadas a $f(x)$,

$$\lim_{\eta \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta f(x)}{(x-\xi)^2 + \eta^2} dx = f(\xi)$$

y mencione las restricciones.

5.78. Verifique que las funciones u y v de las ecuaciones (5.10) y (5.11), página 146, satisfacen la ecuación de Laplace.

PROBLEMAS DIVERSOS

5.79. Evalúe $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_C \frac{z^2\, dz}{z^2+4}$, donde C es el cuadrado con vértices en $\pm 2, \pm 2 + 4i$.

5.80. Evalúe $\displaystyle\oint_C \frac{\cos^2 tz}{z^3} dz$, donde C es la circunferencia $|z| = 1$ y $t > 0$.

5.81. *a*) Muestre que $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z+1} = 2\pi i$ si C es la circunferencia $|z| = 2$.

b) Con el inciso *a*) muestre que

$$\oint_C \frac{(x+1)\,dx + y\,dy}{(x+1)^2 + y^2} = 0, \qquad \oint_C \frac{(x+1)\,dy - y\,dx}{(x+1)^2 + y^2} = 2\pi$$

y verifique estos resultados directamente.

5.82. Encuentre las funciones $f(z)$ que sean analíticas en todas partes del plano complejo y que satisfagan las condiciones *a*) $f(2-i) = 4i$ y *b*) $|f(z)| < e^2$ para toda z.

5.83. Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C. Demuestre que

$$a)\ f'(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f(a + e^{i\theta})\, d\theta, \quad b)\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(a + e^{i\theta})\, d\theta$$

5.84. Demuestre que $8z^4 - 6z + 5 = 0$ tiene una raíz en cada cuadrante.

5.85. Muestre que *a*) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 0$, *b*) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 2\pi$.

5.86. Extienda el resultado del problema 5.23 de manera que se obtengan fórmulas para las derivadas de $f(z)$ en todo punto en $\mathcal{R}$.

5.87. Verifique que $z^3 e^{1-z} = 1$ tiene exactamente dos raíces en el interior de la circunferencia $|z| = 1$.

5.88. Suponga que $t > 0$ y que C es una curva simple cerrada que encierra a $z = -1$. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z e^{zt}}{(z+1)^3} dz = \left(t - \frac{t^2}{2}\right) e^{-t}$$

5.89. Encuentre todas las funciones $f(z)$ que sean analíticas en $|z| < 1$ y que satisfagan las condiciones *a*) $f(0) = 1$ y *b*) $|f(z)| \geq 1$ para $|z| < 1$.

www.FreeLibros.me

5.90. Sean $f(z)$ y $g(z)$ analíticas en el interior de una curva simple cerrada C y sobre ella, excepto que $f(z)$ tiene ceros en $a_1, a_2, \ldots, a_m$ y polos en $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de órdenes (multiplicidades) $p_1, p_2, \ldots, p_m$ y $q_1, q_2, \ldots, q_n$, respectivamente. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{m} p_k g(a_k) - \sum_{k=1}^{n} q_k g(b_k)$$

5.91. Suponga que $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$, donde $a_0 \neq 0$, $a_1, \ldots, a_n$ son constantes complejas y C encierra todos los ceros de $f(z)$. Evalúe

$$a)\ \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z f'(z)}{f(z)}dz \quad b)\ \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^2 f'(z)}{f(z)}dz$$

e interprete los resultados.

5.92. Encuentre todas las funciones $f(z)$ que sean analíticas en la región $|z| \leq 1$ y que sean tales que *a*) $f(0) = 3$ y *b*) $|f(z)| \leq 3$ para todo z tal que $|z| < 1$.

5.93. Demuestre que $z^6 + 192z + 640 = 0$ tiene una raíz en el primer cuadrante, una raíz en el cuarto cuadrante, dos raíces en el segundo cuadrante y dos raíces en el tercer cuadrante.

5.94. Demuestre que la función $xy(x^2 - y^2)$ no puede tener un máximo o un mínimo absoluto en el interior de la circunferencia $|z| = 1$.

5.95. *a*) Si una función es analítica en una región $\mathcal{R}$, ¿es acotada en $\mathcal{R}$? *b*) En vista de su respuesta al inciso *a*), ¿es necesario que en el teorema de Liouville $f(z)$ sea acotada?

5.96. Encuentre todas las funciones $f(z)$ que sean analíticas en todas partes, tengan un cero de orden dos en $z = 0$, satisfagan la condición $|f'(z)| \leq 6|z|$ para toda z y que sean tales que $f(i) = -2$.

5.97. Demuestre que todas las raíces de $z^5 + z - 16i = 0$ están entre las circunferencias $|z| = 1$ y $|z| = 2$.

5.98. Sea U armónica en el interior y sobre una curva simple cerrada C. Demuestre que

$$\oint_C \frac{\partial U}{\partial n}ds = 0$$

donde n es una unidad normal a C en el plano z y s es el parámetro longitud de arco.

5.99. Un teorema de Cauchy establece que todas las raíces de la ecuación $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n = 0$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son reales, están en el interior de la circunferencia $|z| = 1 + \text{máx}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, es decir, $|z| = 1$ más el máximo de los valores $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Verifique este teorema para los casos especiales:
a) $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$, *b*) $z^4 + z^2 + 1 = 0$, *c*) $z^4 - z^2 - 2z + 2 = 0$, *d*) $z^4 + 3z^2 - 6z + 10 = 0$.

5.100. Demuestre el teorema de Cauchy del problema 5.99.

5.101. Sea $P(z)$ un polinomio. Si m es un entero positivo y $\omega = e^{2\pi i/m}$, demuestre que

$$\frac{P(1) + P(\omega) + P(\omega^2) + \cdots + P(\omega^{m-1})}{m} = P(0)$$

y dé una interpretación geométrica.

5.102. ¿Es válido el resultado del problema 5.101 para toda función $f(z)$? Justifique su respuesta.

5.103. Demuestre el *teorema de Jensen:* Suponga que $f(z)$ es analítica en el interior y sobre una circunferencia $|z| = R$, excepto en los ceros en $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de multiplicidades $p_1, p_2, \ldots, p_m$ y en los polos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de multiplicidades $q_1, q_2, \ldots, q_n$, respectivamente, y suponga que $f(0)$ es finita y diferente de cero. Así,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta})|\,d\theta = \ln|f(0)| + \sum_{k=1}^{m} p_k \ln\left(\frac{R}{|a_k|}\right) - \sum_{k=1}^{n} q_k \ln\left(\frac{R}{|b_k|}\right)$$

[*Sugerencia:* Considere $\oint_C \ln z\{f'(z)/f(z)\}\,dz$, donde C es el círculo $|z| = R$.]

www.FreeLibros.me

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

5.30. *a*) e^2, *b*) 0

5.31. $2\pi i$

5.32. *a*) $-2\pi i$, *b*) 0

5.33. *a*) 0, *b*) $-\frac{1}{2}$

5.35. $-\pi i$

5.38. *a*) $\pi i/32$, *b*) $21\pi i/16$

5.39. $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$

5.50. *b*) $1, 1, -1 \pm i$

5.51. *a*) i, $\frac{1}{2}(-i \pm \sqrt{15})$,
b) $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3i})$, $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3i})$

5.52. 1/4

5.54. 17

5.61. $10\pi i$

5.62. -2

5.63. *a*) $14\pi i$, *b*) $12\pi i$, *c*) $2\pi i$

5.64. $4\pi i$

5.74. $1 - (2/\pi)\tan^{-1}(y/x)$

5.75. $1 - \dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x+1}\right) - \dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x-1}\right)$

5.79. i

5.80. $-2\pi i t^2$

5.91. $-a_1/a_0$, *b*) $(a_1^2 - 2a_0a_2)/a_0^2$

www.FreeLibros.me

CAPÍTULO 6

Series infinitas, series de Taylor y series de Laurent

6.1 SUCESIONES DE FUNCIONES

Las ideas del capítulo 2, en las páginas 48 y 49, sobre sucesiones y series de constantes se amplían con facilidad a sucesiones y series de funciones.

Sea $u_1(z), u_2(z), \ldots, u_n(z), \ldots$, que se denota en forma breve $\{u_n(z)\}$, una sucesión definida de funciones de z y unívoca en una región del plano z. El *límite* de $u_n(z)$ cuando $n \to \infty$ se denota $U(z)$ y se escribe $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = U(z)$, si dado un número positivo ϵ puede hallarse un número N [que suele depender de ϵ y de z] tal que

$$|u_n(z) - U(z)| < \epsilon \quad \text{para toda } n > N$$

Si es así, se dice que la sucesión *converge* o es *convergente* a $U(z)$.

Si una sucesión converge para todos los valores (o puntos) z en una región $\mathcal{R}$, se dice que $\mathcal{R}$ es la *región de convergencia* de la sucesión. Si una sucesión no converge en algún valor (punto) z, se dice que es *divergente* en z.

Los teoremas sobre límites de la página 49 se extienden a sucesiones de funciones.

6.2 SERIES DE FUNCIONES

A partir de la sucesión de funciones $\{u_n(z)\}$ se forma una nueva sucesión $\{S_n(z)\}$, que se define de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} S_1(z) &= u_1(z) \\ S_2(z) &= u_1(z) + u_2(z) \\ &\vdots \\ S_n(z) &= u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) \end{aligned}$$

donde $S_n(z)$, que se conoce como la n-ésima *suma parcial*, es la suma de los n primeros términos de la sucesión $\{u_n(z)\}$.

La sucesión $S_1(z), S_2(z), \ldots$ o $\{S_n(z)\}$ se representa simbólicamente como

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \tag{6.1}$$

y se llama *serie infinita.* Si $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$, se dice que la serie es *convergente* y que $S(z)$ es su *suma*; si no es así, se dice que la serie es *divergente.* En ocasiones se escribe también $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ como $\sum u_n(z)$ o $\sum u_n$ para simplificar.

www.FreeLibros.me

Como ya se dijo, una condición necesaria para que una serie (6.1) converja es que $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = 0$, pero esta condición no es suficiente. Véase, por ejemplo, el problema 2.150, así como los problemas 6.67*c*), 6.67*d*) y 6.111*a*).

Si una serie converge para todos los valores (puntos) z en una región $\mathcal{R}$, se dice que $\mathcal{R}$ es la *región de convergencia* de esa serie.

6.3 CONVERGENCIA ABSOLUTA

Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ *converge absolutamente* si converge la serie de sus valores absolutos, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$, converge.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge, pero $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ no converge, se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ es *condicionalmente convergente*.

6.4 CONVERGENCIA UNIFORME DE SUCESIONES Y DE SERIES

En la definición de límite de una sucesión de funciones se indicó que, en general, el número N depende de ϵ y del valor particular de z. Sin embargo, puede ocurrir que se encuentre un número N tal que $|u_n(z) - U(z)| < \epsilon$ para toda $n > N$, donde ese mismo número N sirve para toda z en una región $\mathcal{R}$ [es decir, N sólo depende de ϵ y no del número (punto) z particular en la región]. En ese caso se dice que $u_n(z)$ *converge uniformemente* a $U(z)$, o que es *uniformemente convergente* a $U(z)$, para toda z en $\mathcal{R}$.

De manera similar, si en una región la sucesión de sumas parciales $\{S_n(z)\}$ converge uniformemente a $S(z)$, se dice que, en esa región, la serie infinita en (6.1) *converge uniformemente*, o es *uniformemente convergente*, a $S(z)$.

A $R_n(z) = u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \cdots = S(z) - S_n(z)$ se le conoce como el *resto* después de n términos de la serie infinita en (6.1). Así, de manera equivalente, se afirma que la serie converge uniformemente a $S(z)$ en $\mathcal{R}$ si, para todo $\epsilon > 0$, puede hallarse un número N tal que para toda z en $\mathcal{R}$,

$$|R_n(z)| = |S(z) - S_n(z)| < \epsilon \quad \text{para toda } n > N$$

6.5 SERIE DE POTENCIAS

Una serie de la forma

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \tag{6.2}$$

se llama *serie de potencias* en $z - a$. Esta serie (6.2) en ocasiones se escribe, de manera abreviada, $\sum a_n\,(z-a)^n$.

Es claro que la serie de potencias (6.2) converge para $z = a$, y éste puede ser el único punto en el que converja [véase el problema 6.13*b*)]. Pero, en general, esta serie converge también en otros puntos. En ese caso, puede mostrarse que existe un número positivo R tal que (6.2) converja para $|z - a| < R$ y diverja para $|z - a| > R$, y para $|z - a| = R$ *pueda converger o pueda no converger.*

Geométricamente, si Γ es una circunferencia de radio R con centro en $z = a$, la serie (6.2) converge en todos los puntos interiores de Γ y diverge en todos los puntos exteriores de Γ, y sobre la circunferencia Γ puede converger o puede no converger. Se considera los casos especiales en los que $R = 0$ y $R = \infty$, respectivamente, son los casos en los que (6.2) converge sólo en $z = a$ o converge para todo valor (finito) de z. Debido a esta interpretación geométrica, R suele conocerse como *radio de convergencia* de (6.2), y el círculo correspondiente, como *círculo de convergencia.*

www.FreeLibros.me

6.6 ALGUNOS TEOREMAS IMPORTANTES

A manera de referencia se presenta a continuación una lista de algunos de los teoremas más importantes relacionados con sucesiones y series. Muchos resultarán familiares por sus análogos para variables reales.

A. TEOREMAS GENERALES

TEOREMA 6.1. Si una sucesión tiene un límite, este límite es único [es decir, no hay otro].

TEOREMA 6.2. Sea $u_n = a_n + ib_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde a_n y b_n son reales. Así, una condición necesaria y suficiente para que $\{u_n\}$ converja es que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ converjan.

TEOREMA 6.3. Sea $\{a_n\}$ una sucesión real con la propiedad de que

i) $a_{n+1} \geq a_n$ o $a_{n+1} \leq a_n$
ii) $|a_n| < M$ (una constante)

Así, $\{a_n\}$ converge.

Si se satisface la primera condición de la propiedad *i*), se dice que la sucesión es *monótona creciente*; si se satisface la segunda condición de la propiedad *i*), se dice que la sucesión es *monótona decreciente.* Si se satisface la propiedad *ii*), se dice que la sucesión es *acotada*. Por tanto, este teorema establece que toda sucesión monótona (creciente o decreciente) y acotada tiene un límite.

TEOREMA 6.4. Una condición necesaria y suficiente para que $\{u_n\}$ converja es que, dado un $\epsilon > 0$, pueda hallarse un número N tal que $|u_p - u_q| < \epsilon$ para toda $p > N$, $q > N$.

Este teorema, que tiene la ventaja de no requerir del límite mismo, se llama *criterio de convergencia de Cauchy.*

TEOREMA 6.5. Una condición necesaria para que $\sum u_n$ converja es que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Pero esta condición no es suficiente.

TEOREMA 6.6. La multiplicación de cada miembro de una serie por una constante diferente de cero no afecta la convergencia o divergencia de la serie. Si dada una serie se le elimina (o se adiciona) un número finito de términos, esto no afecta la convergencia o divergencia de la serie.

TEOREMA 6.7. Una condición necesaria y suficiente para que converja $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$, donde a_n y b_n son reales, es que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converjan.

B. TEOREMAS SOBRE CONVERGENCIA ABSOLUTA

TEOREMA 6.8. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. Es decir, una serie absolutamente convergente es convergente.

TEOREMA 6.9. Los términos de una serie absolutamente convergente pueden reordenarse de cualquier manera, y todas esas series reordenadas convergen a la misma suma. Asimismo, la suma, diferencia y producto de la serie absolutamente convergente son absolutamente convergentes.

Esto no ocurre con las series condicionalmente convergentes (véase el problema 6.127).

C. CRITERIOS ESPECIALES DE CONVERGENCIA

TEOREMA 6.10. (*Criterio de la comparación*)

a) Si $\sum |v_n|$ converge y $|u_n| \leq |v_n|$, entonces $\sum u_n$ converge absolutamente.

b) Si $\sum |v_n|$ diverge y $|u_n| \geq |v_n|$, entonces $\sum |u_n|$ diverge, pero $\sum u_n$ puede converger o no.

www.FreeLibros.me

TEOREMA 6.11. (*Criterio del cociente*) Sea $\lim_{n\to\infty} |u_{n+1}/u_n| = L$. Entonces $\sum u_n$ converge (absolutamente) si $L < 1$ y diverge si $L > 1$. Si $L = 1$, esta prueba no da ningún resultado.

TEOREMA 6.12. (*Criterio de la raíz n-ésima*) Sea $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$. Entonces $\sum u_n$ converge (absolutamente) si $L < 1$ y diverge si $L > 1$. Si $L = 1$, esta prueba no da ningún resultado.

TEOREMA 6.13. (*Criterio de la integral*) Si $f(x) \geq 0$ para $x \geq a$, entonces $\sum f(n)$ converge o diverge según $\lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx$ converja o diverja.

TEOREMA 6.14. (*Criterio de Raabe*) Sea $\lim_{n\to\infty} n\big(1 - |u_{n+1}/u_n|\big) = L$. Entonces $\sum u_n$ converge (absolutamente) si $L > 1$ y diverge o converge condicionalmente si $L < 1$. Si $L = 1$, esta prueba no da ningún resultado.

TEOREMA 6.15. (*Criterio de Gauss*) Suponga que $|u_{n+1}/u_n| = 1 - (L/n) + (c_n/n^2)$, donde $|c_n| < M$ para toda $n > N$. Entonces $\sum u_n$ converge (absolutamente) si $L > 1$ y diverge o converge condicionalmente si $L \leq 1$.

TEOREMA 6.16. (*Criterio de la serie alternante*) Si $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $a_1 - a_2 + a_3 - \cdots = \sum (-1)^{n-1} a_n$ converge.

D. TEOREMAS SOBRE CONVERGENCIA UNIFORME

TEOREMA 6.17. (*Criterio M de Wieirstrass*) Si $|u_n(z)| \leq M_n$, donde M_n es independiente de z en una región $\mathcal{R}$ y $\sum M_n$ converge, entonces $\sum u_n(z)$ es uniformemente convergente en $\mathcal{R}$.

TEOREMA 6.18. La suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas es continua, es decir, si $u_n(z)$ es continua en $\mathcal{R}$ y $S(z) = \sum u_n(z)$ es uniformemente convergente en $\mathcal{R}$, entonces $S(z)$ es continua en $\mathcal{R}$.

TEOREMA 6.19. Suponga que $\{u_n(z)\}$ es continua en $\mathcal{R}$, $S(z) = \sum u_n(z)$ es uniformemente convergente en $\mathcal{R}$ y C es una curva en $\mathcal{R}$. Así,

$$\int_C S(z)\,dz = \int_C u_1(z)\,dz + \int_C u_2(z)\,dz + \cdots$$

o

$$\int_C \Big\{\sum u_n(z)\Big\}\,dz = \sum \int_C u_n(z)\,dz$$

Es decir, una serie uniformemente continua de funciones continuas puede integrarse término por término.

TEOREMA 6.20. Suponga que $u'_n(z) = (d/dz)u_n(z)$ existe en $\mathcal{R}$, que $\sum u'_n(z)$ converge uniformemente en $\mathcal{R}$ y que $\sum u_n(z)$ converge en $\mathcal{R}$. Entonces, $(d/dz) \sum u_n(z) = \sum u'_n(z)$.

TEOREMA 6.21. Suponga que $\{u_n(z)\}$ es analítica y que $\sum u_n(z)$ es uniformemente convergente en $\mathcal{R}$. Entonces, $S(z) = \sum u_n(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

www.FreeLibros.me

E. TEOREMAS SOBRE SERIES DE POTENCIAS

TEOREMA 6.22. Una serie de potencias converge uniforme y absolutamente en toda región comprendida en el interior de su círculo de convergencia.

TEOREMA 6.23. *a*) Una serie de potencias se diferencia término por término en el interior de su círculo de convergencia.
b) Una serie de potencias se integra término por término a lo largo de cualquier curva C comprendida en el interior de su círculo de convergencia.
c) La suma de una serie de potencias es continua en toda región comprendida en el interior de su círculo de convergencia.

Estos incisos son consecuencia de los teoremas 6.17-6.19 y 6.21.

TEOREMA 6.24. (*Teorema de Abel*) Sea R el radio de convergencia de $\sum a_n z^n$ y suponga que z_0 es un punto sobre la circunferencia de convergencia, tal que $\sum a_n z_0^n$ converja. Así, $\lim_{z \to z_0} \sum a_n z^n = \sum a_n z_0^n$, donde $z \to z_0$ desde el interior del círculo de convergencia. Es fácil efectuar extensiones a otras series de potencias.

TEOREMA 6.25. Suponga que $\sum a_n z^n$ converge a cero para toda z tal que $|z| < R$, donde $R > 0$. Así, $a_n = 0$. De manera equivalente, si $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$ para toda z tal que $|z| < R$, entonces $a_n = b_n$.

6.7 TEOREMA DE TAYLOR

Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C. Sean a y $a + h$ dos puntos en el interior de C. Entonces,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots \tag{6.3}$$

o, al escribir $z = a + h$, $h = z - a$,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots \tag{6.4}$$

Esto se conoce como *teorema de Taylor*, y la serie en (6.3) o (6.4), como *serie de Taylor* o *expansión de Taylor* para $f(a+h)$ o $f(z)$, respectivamente.

La región de convergencia de la serie (6.4) está dada por $|z - a| < R$, donde el radio R de convergencia es la distancia de a a la singularidad más cercana de la función $f(z)$. Sobre $|z - a| = R$, la serie puede o no converger. Para $|z - a| > R$, la serie diverge.

Si la singularidad más cercana de $f(z)$ se encuentra al infinito, el radio de convergencia es infinito, es decir, la serie converge para toda z.

Si en (6.3) o en (6.4) $a = 0$, se obtiene una *serie de Maclaurin.*

6.8 ALGUNAS SERIES ESPECIALES

En la lista siguiente se presentan algunas series especiales y sus regiones de convergencia. En el caso de funciones multivaluadas se emplea la rama principal.

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad |z| < \infty$

2. $\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad |z| < \infty$

www.FreeLibros.me

3. $\cos z \quad = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \cdots (-1)^{n-1} \dfrac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \qquad |z| < \infty$

4. $\ln(1+z) \quad = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \cdots (-1)^{n-1} \dfrac{z^n}{n} + \cdots \qquad |z| < 1$

5. $\tan^{-1} z \quad = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} - \cdots (-1)^{n-1} \dfrac{z^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \qquad |z| < 1$

6. $(1+z)^p \quad = 1 + pz + \dfrac{p(p-1)}{2!} z^2 + \cdots + \dfrac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} z^n + \cdots \qquad |z| < 1$

En esta lista, observe que en la última línea se tiene el *teorema* o *fórmula del binomio.* Si $(1+z)^p$ es multivaluada, el resultado es válido para la rama de la función que tenga el valor 1 para $z = 0$.

6.9 TEOREMA DE LAURENT

Sean C_1 y C_2 circunferencias concéntricas de radios R_1 y R_2, respectivamente, y centro en a [figura 6-1]. Suponga que $f(z)$ es unívoca y analítica sobre C_1 y C_2, así como en la región $\mathcal{R}$ en forma de anillo [también llamada *región anular* o *corona*] entre C_1 y C_2, que aparece sombreada en la figura 6-1. Sea $a + h$ un punto en $\mathcal{R}$. Así, se tiene

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{h} + \frac{a_{-2}}{h^2} + \frac{a_{-3}}{h^3} + \cdots \tag{6.5}$$

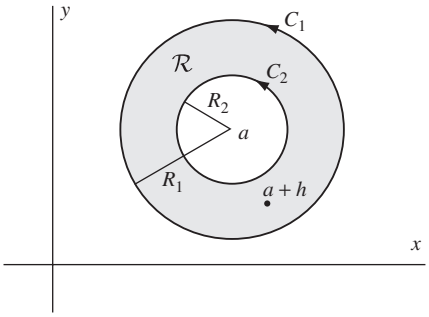


Figura 6-1

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} (z-a)^{n-1} f(z)\, dz \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.6}$$

y donde C_1 y C_2 se recorren en dirección positiva respecto de sus interiores.

En las integrales anteriores pueden reemplazarse C_1 y C_2 por cualquier circunferencia concéntrica C entre C_1 y C_2 [véase el problema 6.100]. Así, los coeficientes (6.6) se escriben en una sola fórmula,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6.7}$$

Mediante un cambio apropiado de notación, lo anterior se escribe como

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots \tag{6.8}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6.9}$$

Esto es el *teorema de Laurent*, y (6.5) o (6.8), con los coeficientes (6.6), (6.7) o (6.9), la *expansión de Laurent* o *serie de Laurent.*

La parte $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$ se conoce como *parte analítica* de la serie de Laurent, mientras que el resto de la serie, que consta de las potencias inversas de $z - a$, es la *parte principal*. Si la parte principal es cero, la serie de Laurent se reduce a una serie de Taylor.

www.FreeLibros.me

6.10 CLASIFICACIÓN DE LAS SINGULARIDADES

Las singularidades de una función $f(z)$ se clasifican al examinar su serie de Laurent. Para esto, en la figura 6-1 se supone que $R_2 = 0$, de manera que $f(z)$ es analítica en el interior y sobre C_1, salvo en $z = a$, que es una singularidad aislada [véase la página 81]. En lo sucesivo, a menos que se indique otra cosa, todas las singularidades se considerarán singularidades aisladas.

1. **Polos.** Si $f(z)$ tiene la forma (6.8) y la parte principal sólo tiene un número finito de términos dados por

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

donde $a_{-n} \neq 0$, entonces $z = a$ es un *polo de orden n*. Si $n = 1$, es un *polo simple.*

Si $f(z)$ tiene un polo en $z = a$, entonces $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ [véase el problema 6.32].

2. **Singularidades removibles.** Si una función unívoca $f(z)$ no se define en $z = a$ pero existe $\lim_{z\to a} f(z)$, entonces $z = a$ es una *singularidad removible.* En tal caso, $f(z)$ en $z = a$ se define como igual a $\lim_{z\to a} f(z)$, con lo que $f(z)$ es analítica en a.

EJEMPLO 6.1: Si $f(z) = \operatorname{sen} z/z$, entonces $z = 0$ es una singularidad removible, pues $f(0)$ no está definida pero $\lim_{z\to 0} \operatorname{sen} z/z = 1$. Se define $f(0) = \lim_{z\to 0} \operatorname{sen} z/z = 1$. Observe que en este caso

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{z}\left\{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right\} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$$

3. **Singularidades esenciales.** Si $f(z)$ es una función univaluada, toda singularidad que no sea un polo o una singularidad removible es una *singularidad esencial.* Si $z = a$ es una singularidad esencial de $f(z)$, la parte principal de la expansión de Laurent tiene una cantidad infinita de términos.

EJEMPLO 6.2: Como $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$, $z = 0$ es una singularidad esencial.

Los dos teoremas siguientes relacionados con singularidades esenciales son importantes (véanse los problemas 6.153-6.155).

Teorema de Casorati-Weierstrass. En toda vecindad de una singularidad esencial aislada a, una función $f(z)$, que de otro modo sería analítica, se acerca arbitrariamente a todo número complejo un número infinito de veces. En símbolos, dados números positivos δ y ϵ, y un número complejo A, en el interior del círculo $|z - a| = \delta$ existe un valor de z para el que $|f(z) - A| < \epsilon$.

Teorema de Picard. En la vecindad de una singularidad esencial aislada a, una función $f(z)$, que de otro modo sería analítica, toma todo valor complejo salvo quizás una excepción.

4. **Puntos de ramificación.** Un punto $z = z_0$ se llama *punto de ramificación* de una función multivaluada $f(z)$ si las ramas de $f(z)$ se intercambian cuando z describe una trayectoria cerrada en torno a z_0 [véase la página 45]. Un punto de ramificación es una singularidad no aislada. Como cada rama de una función multivaluada es analítica, son aplicables todos los teoremas para funciones analíticas, en particular el de Taylor.

EJEMPLO 6.3: La rama de $f(z) = z^{1/2}$, que vale 1 para $z = 1$, tiene una serie de Taylor de la forma $a_0 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + \cdots$ con radio de convergencia $R = 1$ [la distancia de $z = 1$ a la singularidad más cercana, a saber, al punto de ramificación $z = 0$].

5. **Singularidades al infinito.** Con $z = 1/w$ en $f(z)$ se obtiene la función $f(1/w) = F(w)$. Así, el tipo de esta singularidad para $f(z)$ en $z = \infty$ [el punto al infinito] se define como igual al de $F(w)$ en $w = 0$.

EJEMPLO 6.4: $f(z) = z^3$ tiene un polo de orden 3 en $z = \infty$, pues $F(w) = f(1/w) = 1/w^3$ tiene un polo de orden 3 en $w = 0$. De manera similar, $f(z) = e^z$ tiene una singularidad esencial en $z = \infty$, pues $F(w) = f(1/w) = e^{1/w}$ tiene una singularidad esencial en $w = 0$.

www.FreeLibros.me

6.11 FUNCIONES ENTERAS

Una función analítica en todas partes del plano finito [es decir, en todas partes excepto en ∞] se llama *función entera* o *función integral.* Las funciones e^z, sen z, cos z son funciones enteras.

Una función entera se representa con una serie de Taylor de radio de convergencia infinito. Al contrario, si una serie de potencia tiene un radio de convergencia infinito, la serie representa una función entera.

Observe que, de acuerdo con el teorema de Liouville [capítulo 5, página 145], una función analítica *en todas partes incluso* ∞ debe ser una constante.

6.12 FUNCIONES MEROMÓRFICAS

Una función que sea analítica en todas partes del plano finito excepto en una cantidad finita de polos se llama *función meromórfica*.

EJEMPLO 6.5: $z/(z-1)(z+3)^2$, analítica en todas partes del plano finito excepto en los polos $z = 1$ (polo simple) y $z = -3$ (polo de orden 2), es una función meromórfica.

6.13 DESARROLLO DE LAGRANGE

Sea z la raíz de $z = a + \zeta\phi(z)$ con el valor $z = a$ cuando $\zeta = 0$. Así, si $\phi(z)$ es analítica en el interior y sobre una circunferencia C, que contenga a $z = a$, se tiene

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{[\phi(a)]^n\} \tag{6.10}$$

De manera más general, si $F(z)$ es analítica en el interior y sobre C, entonces

$$F(z) = F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{F'(a)[\phi(a)]^n\} \tag{6.11}$$

La expansión (6.11) y el caso especial (6.10) suelen denominarse *desarrollos de Lagrange.*

6.14 CONTINUACIÓN ANALÍTICA

Suponga que no se conoce la forma exacta de una función analítica $f(z)$ y que sólo se sabe que en el interior de algún círculo de convergencia C_1 con centro en a [figura 6-2] $f(z)$ está representada por una serie de Taylor

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots \tag{6.12}$$

Al elegir un punto b en el interior de C_1 se halla el valor de $f(z)$ y de sus derivadas en b mediante (6.13), y de esta manera se obtiene una nueva serie

$$b_0 + b_1(z-b) + b_2(z-b)^2 + \cdots \tag{6.13}$$

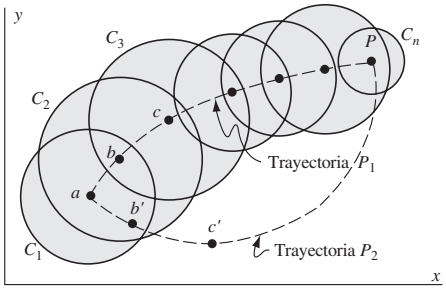


Figura 6-2

con círculo de convergencia C_2. Si C_2 se extiende más allá de C_1, entonces en la porción extendida se obtienen los valores de $f(z)$ y de sus derivadas, y, de esta manera, más información sobre $f(z)$.

En este caso se dice que $f(z)$ *se extendió analíticamente* más allá de C_1, proceso que se conoce como *continuación analítica* o *extensión analítica*.

Desde luego, el proceso puede repetirse indefinidamente. Así, al elegir un punto c en el interior de C_2 se obtiene una nueva serie con círculo de convergencia C_3, la cual puede extenderse más allá de C_1 y C_2, etcétera.

El conjunto de todas estas representaciones de series de potencias, es decir, de todas las posibles continuaciones analíticas, se define como la función analítica $f(z)$, y cada serie de potencias se denomina en ocasiones un *elemento de* $f(z)$.

www.FreeLibros.me

Al realizar una continuación analítica, deben evitarse las singularidades. Por ejemplo, en la figura 6-2 no debe haber ninguna singularidad que esté en el interior de C_2 y sobre la frontera de C_1, porque si la hay, (6.13) divergirá en ese punto. En algunos casos, las singularidades sobre un círculo de convergencia son tan numerosas que es imposible una continuación analítica. En estos casos, la frontera del círculo se llama *frontera natural* o barrera [véase el problema 6.30]. Una función representada por una serie que tenga una frontera natural se llama función *lacunary*.

Al pasar del círculo C_1 al círculo C_n [figura 6-2] se eligió la trayectoria formada por los centros $a, b, c, \ldots, p$, que se representó con la *trayectoria* P_1. Hay muchas otras trayectorias posibles, como $a, b', c', \ldots, p$, que se representan de manera abreviada con la *trayectoria* P_2. La pregunta es si cuando se elige otra trayectoria se obtiene la misma representación válida en el interior de C_n. La respuesta es *sí*, siempre que la región limitada por las trayectorias P_1 y P_2 no tenga ninguna singularidad.

En el capítulo 10 se verá más sobre continuación analítica.

PROBLEMAS RESUELTOS

SUCESIONES DE FUNCIONES Y SERIES DE FUNCIONES

6.1. Con la definición, demuestre que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)=1$ para toda z.

Solución

Dado un número $\epsilon > 0$, hay que hallar un N tal que $|1 + z/n - 1| < \epsilon$ para $n > N$. Así, $|z/n| < \epsilon$, es decir, $|z|/n < \epsilon$ si $n > |z|/\epsilon = N$.

6.2. *a*) Pruebe que, para $|z| < 1$, la serie $z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \cdots$ converge, y *b*) encuentre su suma.

Solución

La suma de los primeros n términos de la serie es

$$\begin{aligned} S_n(z) &= z(1-z) + z^2(1-z) + \cdots + z^n(1-z) \\ &= z - z^2 + z^2 - z^3 + \cdots + z^n - z^{n+1} = z - z^{n+1} \end{aligned}$$

Ahora, $|S_n(z) - z| = |-z^{n+1}| = |z|^{n+1} < \epsilon$ para $(n+1)\ln|z| < \ln\epsilon$, es decir, $n + 1 > \ln\epsilon/\ln|z|$ o $n > (\ln\epsilon/\ln|z|) - 1$.

Si $z = 0$, $S_n(0) = 0$ y $|S_n(0) - 0| < \epsilon$ para toda n.

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = z$, la suma buscada para toda z tal que $|z| < 1$.

Otro método. Como $S_n(z) = z - z^{n+1}$, se tiene [de acuerdo con el problema 2.41, en el que se mostró que $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ si $|2| < 1$]

$$\text{Suma buscada} = S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty}(z - z^{n+1}) = z.$$

CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONVERGENCIA UNIFORME

6.3. *a*) Demuestre que si $|z| \le \frac{1}{2}$, la serie del problema 6.2 converge uniformemente a la suma z.
b) ¿Converge esta serie uniformemente si $|z| \le 1$? Explique.

Solución

a) En el problema 6.2 se mostró que $|S_n(z) - z| < \epsilon$ para toda $n > (\ln\epsilon/\ln|z|) - 1$, es decir, esta serie converge a la suma z para $|z| < 1$ y, por ende, para $|z| \le \frac{1}{2}$.

Ahora, si $|z| \le \frac{1}{2}$, el valor mayor de $(\ln\epsilon/\ln|z|) - 1$ se encuentra cuando $|z| = \frac{1}{2}$ y está dado por $(\ln\epsilon/\ln(1/2)) - 1 = N$. Se sigue que $|S_n(z) - z| < \epsilon$ para toda $n > N$, donde N sólo depende de ϵ y no del valor de z de que se trate en $|z| \le \frac{1}{2}$. Por tanto, para $|z| \le \frac{1}{2}$ esta serie converge uniformemente a z.

www.FreeLibros.me

b) El mismo argumento del inciso *a*) sirve para mostrar que con $N = (\ln \epsilon/\ln(.9)) - 1$ y $N = (\ln \epsilon/\ln(.99)) - 1$ para $|z| \leq 0.9$ o $|z| \leq 0.99$, respectivamente, esta serie converge uniformemente a la suma z.

Sin embargo, es claro que este argumento no se puede extender a $|z| \leq 1$, pues para esto se necesitaría que $N = (\ln \epsilon/\ln 1) - 1$, que es infinito, es decir, en este caso no existe un valor finito N útil. Por tanto, esta serie no converge uniformemente para $|z| \leq 1$.

6.4. *a*) Demuestre que la sucesión $\{1/1 + nz\}$ converge uniformemente a cero para todo z tal que $|z| \geq 2$.
b) ¿Puede extenderse la región de convergencia uniforme del inciso *a*)? Explique.

Solución

a) Se tiene que $|(1/1 + nz) - 0| < \epsilon$ cuando $1/|1 + nz| < \epsilon$ o $|1 + nz| > 1/\epsilon$. Ahora, $|1 + nz| \leq |1| + |nz| = 1 + n|z|$ y $1 + n|z| \geq |1 + nz| > 1/\epsilon$ para $n > (1/\epsilon - 1/|z|)$. Por tanto, esta sucesión converge a cero para $|z| > 2$.

Para determinar si esta sucesión converge uniformemente a cero, observe que en $|z| \geq 2$ el mayor valor de $(1/\epsilon - 1/|z|)$ corresponde a $|z| = 2$ y está dado por $\frac{1}{2}\{(1/\epsilon) - 1\} = N$. Se sigue que $|(1/1 + nz) - 0| < \epsilon$ para todo $n > N$, donde N sólo depende de ϵ y no de la z particular en $|z| \geq 2$. Por tanto, esta sucesión converge uniformemente a cero en esta región.

b) Si δ es cualquier número positivo, el mayor valor de $((1/\epsilon) - 1)/|z|$ en $|z| \geq \delta$ se obtiene cuando $|z| = \delta$ y está dado por $((1/\epsilon) - 1)/\delta$. Como en el inciso *a*), se sigue que esta sucesión converge uniformemente a cero para todo z tal que $|z| \geq \delta$, es decir, en toda región que excluya todos los puntos que se encuentren en una vecindad de $z = 0$.

Como δ puede elegirse arbitrariamente cercana a cero, se sigue que la región del inciso *a*) puede extenderse considerablemente.

6.5. Muestre que *a*) la función suma en el problema 6.2 es discontinua en $z = 1$, *b*) el límite en el problema 6.4 es discontinuo en $z = 0$.

Solución

a) En el problema 6.2, $S_n(z) = z - z^{n+1}$, $S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z)$. Si $|z| < 1$, $S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = z$. Si $z = 1$, $S_n(z) = S_n(1) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} S_n(1) = 0$. Por tanto, $S(z)$ es discontinua en $z = 1$.

b) De acuerdo con el problema 6.4, si se escribe $u_n(z) = 1/1 + nz$ y $U(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z)$, se tiene $U(z) = 0$ si $z \neq 0$ y $U(z) = 1$ si $z = 0$. Así, $U(z)$ es discontinuo en $z = 0$.

Éstas son consecuencias [véase el problema 6.16] de que si una serie de funciones continuas es uniformemente convergente en una región $\mathcal{R}$, entonces la función suma debe ser continua en $\mathcal{R}$. Por tanto, si la función suma no es continua, la serie no puede ser uniformemente convergente. Se obtiene un resultado similar con las sucesiones.

6.6. Demuestre que la serie del problema 6.2 es absolutamente convergente para $|z| < 1$.

Solución

Sea $T_n(z) = |z(1 - z)| + |z^2(1 - z)| + \cdots + |z^n(1 - z)| = |1 - z|\{|z| + |z|^2 + |z|^3 + \cdots + |z|^n\}$

$$= |1 - z||z|\left\{\frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}\right\}$$

Si $|z| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} |z|^n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} T_n(z)$ existe, de manera que la serie converge absolutamente.

Observe que, en este caso, la serie de los valores absolutos converge a $|1 - z||z|/1 - |z|$.

CRITERIOS ESPECIALES DE CONVERGENCIA

6.7. Suponga que $\sum |v_n|$ converge y que $|u_n| \leq |v_n|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Demuestre que $\sum |u_n|$ también converge (es decir, establezca el criterio de comparación para la convergencia).

www.FreeLibros.me

Solución

Sea $S_n = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|$, $T_n = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$.

Como $\sum |v_n|$ converge, $\lim_{n\to\infty} T_n$ existe y es igual a T, por ejemplo. Asimismo, como $|v_n| \geq 0$, $T_n \leq T$.

Así, $S_n = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| \leq |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \leq T$ o $0 \leq S_n \leq T$.

Por tanto, S_n es una sucesión monótonamente creciente y acotada, por lo que debe tener un límite [teorema 6.3, página 171], es decir, $\sum |u_n|$ converge.

6.8. Verifique que $\dfrac{1}{1^p} + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge para toda constante $p > 1$.

Solución

Se tiene

$$\frac{1}{1^p} = \frac{1}{1^{p-1}}$$

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \leq \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}}$$

etc., donde se toman 1, 2, 4, 8,… términos de la serie. Se sigue que la suma de cualquier número finito de términos de la serie dada es menor que la serie geométrica

$$\frac{1}{1^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2^{p-1}}$$

la cual converge para $p > 1$. Por tanto, la serie dada, que en ocasiones se denomina *serie p*, converge.

Con un método análogo al empleado aquí y el criterio de comparación para divergencia [teorema 6.10*b*), página 171], puede mostrarse que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ diverge para $p \leq 1$.

6.9. Demuestre que una serie absolutamente convergente es convergente.

Solución

Como $\sum |u_n|$ converge, hay que mostrar que $\sum u_n$ converge. Sea

$$S_M = u_1 + u_2 + \cdots + u_M \text{ y } T_M = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_M|$$

Así,

$$\begin{aligned} S_M + T_M &= (u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \cdots + (u_M + |u_M|) \\ &\leq 2|u_1| + 2|u_2| + \cdots + 2|u_M| \end{aligned}$$

Como $\sum |u_n|$ converge y $u_n + |u_n| \geq 0$ para $n = 1, 2, 3,\ldots$, se sigue que $S_M + T_M$ es una sucesión monótonamente creciente y acotada, y, por tanto, $\lim_{M\to\infty} (S_M + T_M)$ existe.

Además, como $\lim_{M\to\infty} T_M$ existe [pues, por hipótesis, esta serie es absolutamente convergente],

$$\lim_{M\to\infty} S_M = \lim_{M\to\infty} (S_M + T_M - T_M) = \lim_{M\to\infty} (S_M + T_M) - \lim_{M\to\infty} T_M$$

también debe existir, con lo que se demuestra lo que se buscaba.

6.10. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ converge absolutamente para $|z| \leq 1$.

Solución

Si $|z| \leq 1$, entonces $\left|\dfrac{z^n}{n(n+1)}\right| = \dfrac{|z|^n}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Si en el criterio de comparación se toma $u_n = z^n/n(n+1)$, $v_n = 1/n^2$ y se reconoce que $\sum 1/n^2$ converge, de acuerdo con el problema 6.8 con $p = 2$, se ve que $\sum |u_n|$ converge, es decir, $\sum u_n$ converge absolutamente.

www.FreeLibros.me

6.11. Establezca el criterio del cociente para la convergencia.

Solución

Hay que mostrar que si $\lim_{n\to\infty} |u_{n+1}/u_n| = L < 1$, entonces $\sum |u_n|$ converge o, según el problema 6.9, $\sum u_n$ es (absolutamente) convergente.

Por hipótesis, puede elegirse un entero N tan grande que para todo $n \geq N$, $|u_{n+1}/u_n| \leq r$, donde r es una constante tal que $L < r < 1$. Así,

$$|u_{N+1}| \leq r|u_N|$$

$$|u_{N+2}| \leq r|u_{N+1}| < r^2|u_N|$$

$$|u_{N+3}| \leq r|u_{N+2}| < r^3|u_N|$$

etc. Se suma,

$$|u_{N+1}| + |u_{N+2}| + \cdots \leq |u_N|(r + r^2 + r^3 + \cdots)$$

y por ende $\sum |u_n|$ converge, de acuerdo con el criterio de comparación, pues $0 < r < 1$.

6.12. Encuentre la región de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$.

Solución

Si $u_n = \dfrac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$, entonces $u_{n+1} = \dfrac{(z+2)^n}{(n+2)^3 4^{n+1}}$. Por tanto, al excluir $z = -2$, valor para el que esta serie converge, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2)}{4}\frac{(n+1)^3}{(n+2)^3}\right| = \frac{|z+2|}{4}$$

Así, esta serie converge (absolutamente) para $|z+2|/4 < 1$, es decir, para $|z+2| < 4$. El punto $z = -2$ está incluido en $|z+2| < 4$.

Si $|z+2|/4 = 1$, es decir, si $|z+2| = 4$, el criterio del cociente no da resultado. Sin embargo, en este caso se ve que

$$\left|\frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}\right| = \frac{1}{4(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

y como $\sum 1/n^3$ converge [serie p con $p = 3$], la serie dada converge (absolutamente).

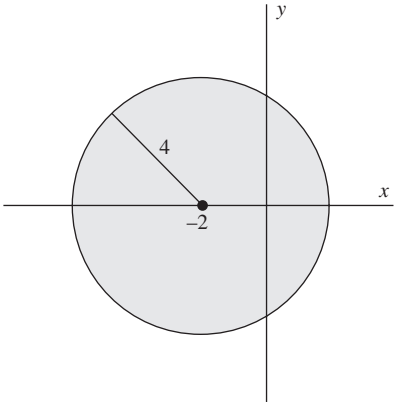


Figura 6-3

Se concluye que la serie dada converge (absolutamente) para $|z+2| \leq 4$. Geométricamente, éste es el conjunto de puntos en el interior y sobre una circunferencia de radio 4 y centro en $z = -2$, que se conoce como *círculo de convergencia* [sombreado en la figura 6-3]. El *radio de convergencia* es igual a 4.

6.13. Encuentre la región de convergencia de las series *a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, *b*) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$.

Solución

a) Si $u_n = (-1)^{n-1} z^{2n-1}/(2n-1)!$, entonces $u_{n+1} = (-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)$. Por tanto, al excluir $z = 0$, valor para el cual la serie converge, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{z^2(2n-1)!}{(2n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!|z|^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|z|^2}{(2n+1)(2n)} = 0$$

www.FreeLibros.me

para toda z finita. Por tanto, la serie converge (absolutamente) para toda z y se dice que la serie converge para $|z| < \infty$. De manera equivalente puede decirse que el círculo de convergencia es infinito o que el radio de convergencia es infinito.

b) Si $u_n = n!z^n$ y $u_{n+1} = (n+1)!z^{n+1}$, al excluir $z = 0$, valor para el que esta serie converge, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|z| = \infty$$

Por tanto, la serie sólo converge para $z = 0$.

TEOREMAS SOBRE CONVERGENCIA UNIFORME

6.14. Demuestre el criterio M de Weierstrass, es decir, si en una región $\mathcal{R}$, $|u_n(z)| \le M_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde las M_n son constantes positivas tales que $\sum M_n$ converge, entonces $\sum u_n(z)$ es uniforme (y absolutamente) convergente en $\mathcal{R}$.

Solución

El resto de la serie $\sum u_n(z)$ después de n términos es $R_n(z) = u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \cdots$. Ahora

$$\begin{aligned}|R_n(z)| = |u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \cdots| &\le |u_{n+1}(z)| + |u_{n+2}(z)| + \cdots \\ &\le M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots\end{aligned}$$

Pero $M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots$ puede hacerse menor a ϵ al elegir $n > N$, pues $\sum M_n$ converge. Como N es sin duda independiente de z, se tiene $|R_n(z)| < \epsilon$ para $n > N$, con lo que la serie es uniformemente convergente. La convergencia absoluta es consecuencia inmediata del criterio de la comparación.

6.15. Verifique la convergencia uniforme en la región indicada:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$, $|z| \le 1$; *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+z^2}$, $1 < |z| < 2$; *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{n^3}$, $|z| \le 1$.

Solución

a) Si $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$, entonces $|u_n(z)| = \dfrac{|z|^n}{n\sqrt{n+1}} \le \dfrac{1}{n^{3/2}}$ si $|z| \le 1$. Con $M_n = 1/n^{3/2}$, se ve que $\sum M_n$ converge (serie p con $p = 3/2$). Por tanto, de acuerdo con el criterio M de Weierstrass, la serie dada converge uniformemente (y absolutamente) para $|z| \le 1$.

b) La serie dada es $\dfrac{1}{1^2+z^2} + \dfrac{1}{2^2+z^2} + \dfrac{1}{3^2+z^2} + \cdots$. Los primeros dos términos pueden omitirse sin que afecten la convergencia uniforme de la serie. Para $n \ge 3$ y $1 < |z| < 2$, se tiene

$$|n^2 + z^2| \ge |n^2| - |z^2| \ge n^2 - 4 \ge \frac{1}{2}n^2 \quad \text{o} \quad \left|\frac{1}{n^2+z^2}\right| \le \frac{2}{n^2}$$

Como $\sum_{n=3}^{\infty} 2/n^2$ converge, se concluye, de acuerdo con el criterio M de Weierstrass (con $M_n = 2/n^2$), que la serie dada converge uniformemente (y absolutamente) para $1 < |z| < 2$.

Observe que la convergencia, y por ende la convergencia uniforme, se deshace si $|z| = 1$ o $|z| = 2$ [a saber, en $z = \pm i$ y en $z = \pm 2i$]. Por tanto, esta serie no puede converger uniformemente para $1 \le |z| \le 2$.

c) Si $z = x + iy$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\cos nz}{n^3} &= \frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2n^3} = \frac{e^{inx-ny} + e^{-inx+ny}}{2n^3} \\ &= \frac{e^{-ny}(\cos nx + i \operatorname{sen} nx)}{2n^3} + \frac{e^{ny}(\cos nx - i \operatorname{sen} nx)}{2n^3}\end{aligned}$$

Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{ny}(\cos nx - i \operatorname{sen} nx)}{2n^3} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-ny}(\cos nx + i \operatorname{sen} nx)}{2n^3}$$

www.FreeLibros.me

no pueden converger para $y > 0$ y $y < 0$, respectivamente [pues, en estos casos, el término n-ésimo no tiende a cero]. Así, esta serie no converge para toda z tal que $|z| \leq 1$, y por ende no puede ser uniformemente convergente en esta región.

La serie sí converge para $y = 0$, es decir, si z es real. En este caso, $z = x$ y la serie se convierte en $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx/n^3$. Así, como $\left|\cos nx/n^3\right| \leq 1/n^3$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ converge, se concluye, por el criterio M de Weierstrass (con $M_n = 1/n^3$), que la serie dada converge uniformemente en todo intervalo sobre el eje real.

6.16. Demuestre el teorema 6.18 de la página 172, es decir, si $u_n(z)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ son continuas en $\mathcal{R}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge uniformemente a $S(z)$ en $\mathcal{R}$, entonces $S(z)$ es continua en $\mathcal{R}$.

Solución

Si $S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z)$ y $R_n(z) = u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \cdots$ es el resto después de n términos, es claro que

$$S(z) = S_n(z) + R_n(z) \quad \text{y} \quad S(z+h) = S_n(z+h) + R_n(z+h)$$

y por ende

$$S(z+h) - S(z) = S_n(z+h) - S_n(z) + R_n(z+h) - R_n(z) \tag{1}$$

donde z y $z + h$ están en $\mathcal{R}$.

Como $S_n(z)$ es la suma de un número finito de funciones continuas, debe ser también continua. Así, dado $\epsilon > 0$, puede hallarse un δ tal que

$$|S_n(z+h) - S_n(z)| < \epsilon/3 \quad \text{siempre que } |h| < \delta \tag{2}$$

Como, por hipótesis, la serie es uniformemente continua, puede elegirse una N para que toda z en $\mathcal{R}$,

$$|R_n(z)| < \epsilon/3 \quad \text{y} \quad |R_n(z+h)| < \epsilon/3 \text{ para } n > N \tag{3}$$

Entonces, de acuerdo con (1), (2) y (3),

$$|S(z+h) - S(z)| \leq |S_n(z+h) - S_n(z)| + |R_n(z+h)| + |R_n(z)| < \epsilon$$

para $|h| < \delta$ y para toda z en $\mathcal{R}$, con lo que se establece la continuidad.

6.17. Demuestre el teorema 6.19 de la página 172, es decir, suponga que $\{u_n(z)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, son continuas en $\mathcal{R}$, $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ es uniformemente convergente en $\mathcal{R}$ y C es una curva en $\mathcal{R}$. Así,

$$\int_C S(z)\, dz = \int_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(z)\, dz$$

Solución

Como en el problema 6.16, se tiene $S(z) = S_n(z) + R_n(z)$ y, como éstas son continuas en $\mathcal{R}$ [según el problema 6.16], sus integrales existen, es decir,

$$\int_C S(z)\, dz = \int_C S_n(z)\, dz + \int_C R_n(z)\, dz = \int_C u_1(z)\, dz + \int_C u_2(z)\, dz + \cdots + \int_C u_n(z)\, dz + \int_C R_n(z)\, dz$$

Por hipótesis, la serie es uniformemente convergente, de manera que, dado un $\epsilon > 0$, puede hallarse un número N independiente de z en $\mathcal{R}$ tal que $|R_n(z)| < \epsilon$ cuando $n > N$. Si la longitud de la curva C se denota L, se tiene [con la propiedad e) en la página 112]

$$\left| \int_C R_n(z)\, dz \right| < \epsilon L$$

Entonces $\left| \int_C S(z)\, dz - \int_C S_n(z)\, dz \right|$ puede hacerse tan pequeña como se desee al elegir n lo bastante grande, y se demuestra el resultado.

www.FreeLibros.me

TEOREMAS SOBRE SERIES DE POTENCIAS

6.18. Suponga que una serie de potencias $\sum a_n z^n$ converge para $z = z_0 \neq 0$. Demuestre que esta serie converge: *a*) absolutamente para $|z| < |z_0|$, *b*) uniformemente para $|z| \leq |z_1|$, donde $|z_1| < |z_0|$.

Solución

a) Como $\sum a_n z_0^n$ converge, $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$, y puede hacerse $|a_n z_0^n| < 1$ al elegir n lo bastante grande, es decir, $|a_n| < 1/|z_0|^n$ para $n > N$. Entonces

$$\sum_{N+1}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{N+1}^{\infty} |a_n||z|^n \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \tag{1}$$

Pero la última serie en (1) converge para $|z| < |z_0|$ y así, de acuerdo con el criterio de la comparación, la primera serie converge, es decir, la serie dada es absolutamente convergente.

b) Sea $M_n = |z_1|^n/|z_0|^n$. Entonces $\sum M_n$ converge, porque $|z_1| < |z_0|$. Como en el inciso *a*), $|a_n z^n| < M_n$ para $|z| \leq |z_1|$, de manera que, de acuerdo con el criterio *M* de Weierstrass, $\sum a_n z^n$ es uniformemente convergente.

Se concluye que una serie de potencias es uniformemente convergente en toda región comprendida por completo en el interior de su círculo de convergencia.

6.19. Demuestre que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y la correspondiente serie de derivadas $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia.

Solución

Sea $R > 0$ el radio de convergencia de $\sum a_n z^n$. Sea $0 < |z_0| < R$. Entonces, como en el problema 6.18, puede elegirse N de manera que $|a_n| < 1/|z_0|^n$ para $n > N$.

Así, para $n > N$, los términos de la serie $\sum |n a_n z^{n-1}| = \sum n|a_n||z|^{n-1}$ pueden hacerse menores que los términos correspondientes de la serie $\sum n(|z|^{n-1}/|z_0|^n)$, la cual, de acuerdo con el criterio del cociente, converge para $|z| < |z_0| < R$.

Por tanto, $\sum n a_n z^{n-1}$ converge absolutamente en todos los puntos tales que $|z| < |z_0|$ (sin importar lo cerca de R que esté $|z_0|$), es decir, para $|z| < R$.

Pero si $|z| > R$, $\lim_{n\to\infty} a_n z^n \neq 0$ y por ende $\lim_{n\to\infty} n a_n z^{n-1} \neq 0$, de manera que $\sum n a_n z^{n-1}$ no converge.

Así, R es el radio de convergencia de $\sum n a_n z^{n-1}$. Esto también es válido si $R = 0$.

Observe que, para valores de z tales que $|z| = R$, la serie de las derivadas puede o no converger.

6.20. Demuestre que en toda región comprendida por completo en el interior de su círculo de convergencia, una serie de potencias *a*) representa una función continua, por ejemplo $f(z)$, *b*) puede integrarse término por término para obtener la integral de $f(z)$, *c*) puede diferenciarse término por término para obtener la derivada de $f(z)$.

Solución

Se considerará la serie de potencias $\sum a_n z^n$, si bien valen resultados análogos para $\sum a_n(z-a)^n$.

a) Esto es consecuencia del problema 6.16 y de que cada término $a_n z^n$ de la serie sea continuo.

b) Esto es consecuencia del problema 6.17 y de que cada término $a_n z^n$ de la serie sea continuo y por tanto integrable.

c) De acuerdo con el problema 6.19, la derivada de una serie de potencias converge dentro del círculo de convergencia de la serie de potencias original, por lo que es uniformemente convergente en toda región comprendida por completo en el interior del círculo de convergencia. Así, el resultado buscado proviene del teorema 6.20, página 172.

6.21. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ tiene un valor finito en todos los puntos en el interior de su círculo de convergencia y sobre él, pero no para la serie de las derivadas.

Solución

De acuerdo con el criterio del cociente, esta serie converge para $|z| < 1$ y diverge para $|z| > 1$. Si $|z| = 1$, entonces $|z^n/n^2| = 1/n^2$ y la serie es convergente (absolutamente). Así, la serie es convergente para $|z| \leq 1$, por lo que tiene un valor finito en el interior de su circunferencia de convergencia y sobre ella.

www.FreeLibros.me

La serie de las derivadas es $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}/n$. De acuerdo con el criterio del cociente, esta serie converge para $|z| < 1$. Sin embargo, esta serie no converge para toda z tal que $|z| = 1$; por ejemplo, si $z = 1$, la serie diverge.

TEOREMA DE TAYLOR

6.22. Demuestre el teorema de Taylor: Si $f(z)$ es analítica en el interior de un círculo C con centro en a, entonces, para toda z en el interior de C,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \cdots$$

Solución

Sea z un punto en el interior de C. Construya una círculo C_1 con centro en a y que encierre a z (véase la figura 6-4). Después, de acuerdo con la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \tag{1}$$

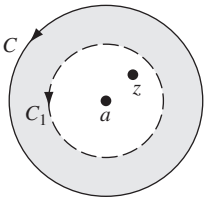


Figura 6-4

Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\left\{\frac{1}{1-(z-a)/(w-a)}\right\}\\ &= \frac{1}{w-a}\left\{1 + \left(\frac{z-a}{w-a}\right) + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1}\right.\\ &\quad \left. + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{1}{1-(z-a)/(w-a)}\right\}\end{aligned}$$

o

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(w-a)^3} + \cdots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{1}{w-z} \tag{2}$$

Se multiplican ambos lados de (2) por $f(w)$ y, con (1), se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-a}\,dw + \frac{z-a}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2}\,dw + \cdots + \frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^n}\,dw + U_n \tag{3}$$

donde

$$U_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Con las fórmulas integrales de Cauchy,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(3) se convierte en

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + U_n$$

Ahora, para demostrar el resultado buscado, sólo es necesario mostrar que $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$. Para esto se observa que, como w está sobre C_1,

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \gamma < 1$$

donde γ es una constante. Además, se tiene $|f(w)| < M$, donde M es una constante y

$$|w-z| = |(w-a)-(z-a)| \geq r_1 - |z-a|$$

www.FreeLibros.me

donde r_1 es el radio de C_1. Por tanto, de acuerdo con la propiedad *e*) de la página 112, se tiene

$$|U_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{j(w)}{w-z}\,dw\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma^n M}{r_1 - |z-a|}\cdot 2\pi r_1 = \frac{\gamma^n M r_1}{r_1 - |z-a|}$$

y se ve que $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, con lo que termina la prueba.

6.23. Sea $f(z) = \ln(1+z)$, donde se considera la rama que tiene el valor cero cuando $z = 0$. *a*) Obtenga el desarrollo de $f(z)$ en una serie de Taylor en torno a $z = 0$. *b*) Determine la región de convergencia de la serie del inciso *a*). *c*) Obtenga el desarrollo de $\ln(1 + z/1 - z)$ en una serie de Taylor en torno a $z = 0$.

Solución

a)
$$\begin{aligned}
f(z) &= \ln(1+z), & f(0) &= 0\\
f'(z) &= \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1}, & f'(0) &= 1\\
f''(z) &= -(1+z)^{-2}, & f''(0) &= -1\\
f'''(z) &= (-1)(-2)(1+z)^{-3}, & f'''(0) &= 2!\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n+1)}(z) &= (-1)^n n!(1+z)^{-(n+1)}, & f^{(n+1)}(0) &= (-1)^n n!
\end{aligned}$$

Entonces

$$f(z) = \ln(1+z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \cdots$$
$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

Otro método. Si $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

Al integrar desde 0 hasta z se obtiene

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

b) El término n-ésimo es $u_n = (-1)^{n-1}z^n/n$. Con el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nz}{n+1}\right| = |z|$$

y la serie converge para $|z| < 1$. Puede mostrarse que la serie converge para $|z| = 1$, salvo para $z = -1$.

Este resultado también se obtiene porque la serie converge en un círculo que se extiende hasta la singularidad más cercana (es decir, $z = -1$) a $f(z)$.

c) De acuerdo con el resultado del inciso *a*), al sustituir z por $-z$,

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$
$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots$$

www.FreeLibros.me

dos series que convergen para $|z| < 1$. Se resta y se obtiene

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$$

que converge para $|z| < 1$. También puede mostrarse que esta serie converge para $|z| = 1$, salvo en $z = \pm 1$.

6.24. *a*) Obtenga el desarrollo de $f(z) = \operatorname{sen} z$ en una serie de Taylor en torno a $z = \pi/4$.
b) Determine la región de convergencia de esta serie.

Solución

a) $f(z) = \operatorname{sen} z,\ f'(z) = \cos z,\ f''(z) = -\operatorname{sen} z,\ f'''(z) = -\cos z,\ f^{\mathrm{IV}}(z) = \operatorname{sen} z, \ldots$

$f(\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ f'(\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ f''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2,\ f'''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2,\ f^{\mathrm{IV}}(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \ldots$

Así, como $a = \pi/4$,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)(z-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(z-a)^3}{3!} + \cdots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(z-\pi/4) - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}(z-\pi/4)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}(z-\pi/4)^3 + \cdots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + (z-\pi/4) - \frac{(z-\pi/4)^2}{2!} - \frac{(z-\pi/4)^3}{3!} + \cdots\right\} \end{aligned}$$

Otro método. Sea $u = z - \pi/4$ o $z = u + \pi/4$. De ese modo se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}(u + \pi/4) = \operatorname{sen} u \cos(\pi/4) + \cos u \operatorname{sen}(\pi/4) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} u + \cos u) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots\right) + \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \cdots\right)\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + u - \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + (z-\pi/4) - \frac{(z-\pi/4)^2}{2!} - \frac{(z-\pi/4)^3}{3!} + \cdots\right\} \end{aligned}$$

b) Como la singularidad de sen z más cercana a $\pi/4$ está al infinito, la serie converge para todo valor finito de z, es decir, para $|z| < \infty$. A esto también se llega con el criterio del cociente.

TEOREMA DE LAURENT

6.25. Demuestre el *teorema de Laurent*: Suponga que $f(z)$ es analítica en el interior de la frontera de una región $\mathcal{R}$, y sobre ella, en forma de anillo, limitada por dos circunferencias concéntricas C_1 y C_2 con centro en a y radios r_1 y r_2, respectivamente ($r_1 > r_2$) (véase la figura 6-5). Así, para toda z en $\mathcal{R}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a-n}{(z-a)^n}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}\, dw \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

www.FreeLibros.me

Solución

De acuerdo con la fórmula integral de Cauchy [véase el problema 5.23, página 159], se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \tag{1}$$

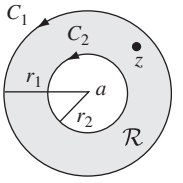


Figura 6-5

Considere la primera integral en (1). Igual que en el problema 6.22, ecuación (2), se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-a)\{1-(z-a)/(w-a)\}}\\ &= \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \cdots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{1}{w-z}\end{aligned} \tag{2}$$

de manera que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-a}\,dw + \frac{z-a}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2}\,dw\\ &\quad + \cdots + \frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^n}\,dw + U_n\\ &= a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + U_n\end{aligned} \tag{3}$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-a}\,dw, \quad a_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2}\,dw, \quad \ldots, \quad a_{n-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^n}\,dw$$

y

$$U_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Ahora considere la segunda integral en (1). Se intercambian w y z en (2) para obtener

$$\begin{aligned}-\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(z-a)\{1-(w-a)/(z-a)\}}\\ &= \frac{1}{z-a} + \frac{w-a}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n \frac{1}{z-w}\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{z-a}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{w-a}{(z-a)^2} f(w)\,dw\\ &\quad + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_3} \frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n} f(w)\,dw + V_n\\ &= \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + V_n\end{aligned} \tag{4}$$

donde

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(w)\,dw, \quad a_{-2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} (w-a)\,f(w)\,dw, \ \ldots, a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} (w-a)^{n-1} f(w)\,dw$$

y

$$V_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n \frac{f(w)}{z-w}\,dw$$

www.FreeLibros.me

De (1), (3) y (4) se tiene

$$f(z) = \{a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1}\} + \left\{\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}\right\} + U_n + V_n \tag{5}$$

Si se demuestra que *a*) $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ y *b*) $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$, se llega al resultado buscado. La prueba de *a*) es consecuencia del problema 6.22. Para demostrar *b*) se observa primero que, como w está sobre C_2,

$$\left|\frac{w-a}{z-a}\right| = \kappa < 1$$

donde κ es una constante. Asimismo, se tiene $|f(w)| < M$, donde M es una constante y

$$|z-w| = |(z-a)-(w-a)| \geq |z-a| - r_2$$

Por tanto, de acuerdo con la propiedad *e*) de la página 112, se tiene

$$|V_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_2}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n \frac{f(w)}{z-w}\,dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\kappa^n M}{|z-a|-r_2}2\pi r_2 = \frac{\kappa^n M r_2}{|z-a|-r_2}$$

Así, $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$ y termina la prueba.

6.26. De las funciones siguientes, encuentre la serie de Laurent en torno a la singularidad indicada.

a) $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$; $z = 1$.

b) $(z-3)\,\text{sen}\dfrac{1}{z+2}$; $z = -2$.

c) $\dfrac{z - \text{sen}\, z}{z^3}$; $z = 0$.

d) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z = -2$.

e) $\dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$; $z = 3$.

En cada caso identifique la singularidad y dé el radio de convergencia de cada serie.

Solución

a) Sea $z - 1 = u$. Así, $z = 1 + u$ y

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3}\cdot e^{2u} = \frac{e^2}{u^3}\left\{1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \cdots\right\}$$
$$= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}(z-1) + \cdots$$

$z = 1$ es un *polo de orden* 3, o *triple polo.*

La serie converge para todos los valores de $z \neq 1$.

b) Sea $z + 2 = u$ o $z = u - 2$. Entonces

$$(z-3)\,\text{sen}\frac{1}{z+2} = (u-5)\,\text{sen}\frac{1}{u} = (u-5)\left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{3!\,u^3} + \frac{1}{5!\,u^5} - \cdots\right\}$$
$$= 1 - \frac{5}{u} - \frac{1}{3!\,u^2} + \frac{5}{3!\,u^3} + \frac{1}{5!\,u^4} - \cdots$$
$$= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{6(z+2)^2} + \frac{5}{6(z+2)^3} + \frac{1}{120(z+2)^4} - \cdots$$

$z = -2$ es una *singularidad esencial.*

La serie converge para todo valor de $z \neq -2$.

c)

$$\frac{z - \text{sen}\, z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left\{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{z^3}\left\{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots\right\} = \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \cdots$$

www.FreeLibros.me

$z = 0$ es una *singularidad removible.*
La serie converge para todo valor de z.

d) Sea $z + 2 = u$. Entonces

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u} \cdot \frac{1}{1-u} = \frac{2-u}{u}(1 + u + u^2 + u^3 + \cdots)$$
$$= \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + \cdots = \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \cdots$$

$z = -2$ es un *polo de orden* 1, o *polo simple.*
La serie converge para todo valor de z tal que $0 < |z + 2| < 1$.

e) Sea $z - 3 = u$. Así, de acuerdo con el teorema del binomio,

$$\frac{1}{z^2(z-3)^2} = \frac{1}{u^2(3+u)^2} = \frac{1}{9u^2(1+u/3)^2}$$
$$= \frac{1}{9u^2}\left\{1 + (-2)\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{u}{3}\right)^3 + \cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{9u^2} - \frac{2}{27u} + \frac{1}{27} - \frac{4}{243}u + \cdots$$
$$= \frac{1}{9(z-3)^2} - \frac{2}{27(z-3)} + \frac{1}{27} - \frac{4(z-3)}{243} + \cdots$$

$z = 3$ es un *polo de orden* 2, o *polo doble.*
La serie converge para todo valor de z tal que $0 < |z - 3| < 3$.

6.27. Obtenga el desarrollo de $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ en una serie de Laurent válida para:

a) $1 < |z| < 3$, *b*) $|z| > 3$, *c*) $0 < |z + 1| < 2$, *d*) $|z| < 1$.

Solución

a) Al descomponer en fracciones parciales,

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+3}\right)$$

Si $|z| > 1$,

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2z(1+1/z)} = \frac{1}{2z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots\right) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \cdots$$

Si $|z| < 3$,

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{6(1+z/3)} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \frac{z^3}{27} + \cdots\right) = \frac{1}{6} - \frac{z}{18} + \frac{z^2}{54} - \frac{z^3}{162} + \cdots$$

Así, la expansión de Laurent válida tanto para $|z| > 1$ como para $|z| < 3$, es decir, $1 < |z| < 3$, es

$$\cdots - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \frac{z^3}{162} - \cdots$$

b) Si $|z| > 1$, se tiene, como en el inciso *a*),

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \cdots$$

Si $|z| > 3$,

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{2z(1+3/z)} = \frac{1}{2z}\left(1 - \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} - \frac{27}{z^3} + \cdots\right) = \frac{1}{2z} - \frac{3}{2z^2} + \frac{9}{2z^3} - \frac{27}{2z^4} + \cdots$$

www.FreeLibros.me

De este modo, la expansión de Laurent válida tanto para $|z| > 1$ como para $|z| > 3$, es decir, para $|z| > 3$, es por sustracción

$$\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \cdots$$

c) Sea $z + 1 = u$. Así,

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u(1+u/2)} = \frac{1}{2u}\left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{8} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \frac{1}{16}(z+1)^2 + \cdots$$

es válida para $|u| < 2$, $u \neq 0$ o $0 < |z+1| < 2$.

d) Si $|z| < 1$,

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2(1+z)} = \frac{1}{2}(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^3 + \cdots$$

Si $|z| < 3$, de acuerdo con el inciso *a*),

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{6} - \frac{z}{18} + \frac{z^2}{54} - \frac{z^3}{162} + \cdots$$

Así, la expansión de Laurent buscada, válida para $|z| < 1$ y $|z| < 3$, es decir, para $|z| < 1$, es por sustracción

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \cdots$$

Ésta es una *serie de Taylor.*

DESARROLLO DE LAGRANGE

6.28. Demuestre el desarrollo de Lagrange (6.11) de la página 176.

Solución

Suponga que C se toma de manera que en el interior de C sólo exista un cero simple de $z = \alpha + \zeta\phi(z)$. Así, de acuerdo con el problema 5.90 de la página 167, con $g(z) = z$ y $f(z) = z - a - \zeta\phi(z)$, se tiene

$$z = \frac{1}{2\pi i}\oint_C w\left\{\frac{1 - \zeta\phi'(w)}{w - a - \zeta\phi(w)}\right\} dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{w}{w-a}\{1 - \zeta\phi'(w)\}\left\{\frac{1}{1 - \zeta\phi(w)/(w-a)}\right\} dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{w}{w-a}\{1 - \zeta\phi'(w)\}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \phi^n(w)/(w-a)^n\right\} dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{w}{w-a}\, dw + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta^n}{2\pi i}\oint_C \left\{\frac{w\phi^n(w)}{(w-a)^{n+1}} - \frac{w\phi^{n-1}(w)\phi'(w)}{(w-a)^n}\right\} dw$$
$$= a - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta^n}{2\pi i}\oint_C \frac{w}{n}\frac{d}{dw}\left\{\frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n}\right\} dw = a + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta^n}{2\pi i n}\oint_C \frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n}\, dw$$
$$= a + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\phi^n(a)]$$

CONTINUACIÓN ANALÍTICA

6.29. Muestre que las series *a*) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ y *b*) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ son continuaciones analíticas una de la otra.

www.FreeLibros.me

Solución

a) De acuerdo con el criterio del cociente, la serie converge para $|z| < 2$ (sombreada en la figura 6-6). En esta circunferencia, la serie, que es una serie geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{2}$ y cuyo radio es $z/2$, puede sumarse y representa la función

$$\frac{1/2}{1 - z/2} = \frac{1}{2 - z}$$

b) De acuerdo con el criterio del cociente, la serie converge para $|(z - i)/(2 - i)| < 1$, es decir, $|z - i| < \sqrt{5}$ (véase la figura 6-6). En esta circunferencia, la serie, que es una serie geométrica cuyo primer término es $1/(2 - i)$ y cuyo radio es $(z - i)/(2 - i)$, puede sumarse y representa la función

$$\frac{1/(2 - i)}{1 - (z - i)/(2 - i)} = \frac{1}{2 - z}$$

Como estas series de potencias representan la misma función en la región común a los interiores de las circunferencias $|z| = 2$ y $|(z - i)| = \sqrt{5}$, se sigue que son continuaciones analíticas una de la otra.

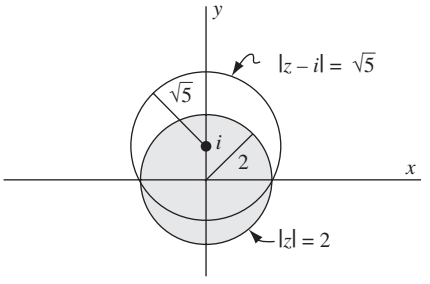


Figura 6-6

6.30. Demuestre que la serie $1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ no puede continuarse analíticamente más allá de $|z| = 1$.

Solución

Sea $F(z) = 1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots$. Así,

$$F(z) = z + F(z^2), \quad F(z) = z + z^2 + F(z^4), \quad F(z) = z + z^2 + z^4 + F(z^8) + \cdots .$$

De lo que resulta claro que todos los valores de z dados por $z = 1$, $z^2 = 1$, $z^4 = 1$, $z^8 = 1$,... son singularidades de $F(z)$. Todas estas singularidades se encuentran en la circunferencia $|z| = 1$. Con cualquier arco pequeño de esa circunferencia, habrá una cantidad infinita de singularidades. Estas singularidades representan una barrera infranqueable y, por tanto, la continuación analítica más allá de $|z| = 1$ es imposible. La circunferencia $|z| = 1$ constituye una *frontera natural*.

PROBLEMAS DIVERSOS

6.31. Sea $\{f_k(z)\}$, $k = 1, 2, 3,\ldots$ una sucesión de funciones analíticas en una región $\mathcal{R}$. Suponga que

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

es uniformemente convergente en $\mathcal{R}$. Demuestre que $F(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

Solución

Sea $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$. Por definición de convergencia uniforme, dado un $\epsilon > 0$ puede hallarse un entero positivo N que dependa de ϵ y no de z tal que para toda z en $\mathcal{R}$,

$$|F(z) - S_n(z)| < \epsilon \quad \text{para toda } n > N \tag{1}$$

Ahora suponga que C es una curva simple cerrada contenida por completo en $\mathcal{R}$ y denote por L su longitud. Así, de acuerdo con el problema 6.16, como $f_k(z)$, $k = 1, 2, 3,\ldots$ son continuas, $F(z)$ también es continua, de manera que $\oint_C F(z)\,dz$ existe. Asimismo, con (1), se ve que, para $n > N$,

$$\left| \oint_C F(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_C f_k(z)\,dz \right| = \left| \oint_C \{F(z) - S_n(z)\}\,dz \right|$$

www.FreeLibros.me

Como ϵ puede hacerse tan pequeña como se desee, se ve que

$$\oint_C F(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \oint_C f_k(z)\,dz$$

Pero de acuerdo con el teorema de Cauchy, $\oint_C f_k(z)\,dz = 0$. Por tanto,

$$\oint_C F(z)\,dz = 0$$

y de esta manera, de acuerdo con el teorema de Morera (página 145, capítulo 5), $F(z)$ debe ser analítica.

6.32. Demuestre que una función analítica no puede ser acotada en la vecindad de una singularidad aislada.

Solución

Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre una circunferencia C de radio r salvo en la singularidad aislada $z = a$, que se toma como centro de C. Así, de acuerdo con el teorema de Laurent, $f(z)$ tiene un desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k \tag{1}$$

donde los coeficientes a_k están dados por la ecuación (6.7) de la página 174. En particular,

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}}\,dz \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Ahora, si $|f(z)| < M$ para una constante M, es decir, si $f(z)$ es acotada, entonces, de acuerdo con (2),

$$|a_{-n}| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C (z-a)^{n-1} f(z)\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi} r^{n-1} \cdot M \cdot 2\pi r = Mr^n$$

Por tanto, como r puede hacerse arbitrariamente pequeña, se tiene $a_{-n} = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es decir, $a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \ldots = 0$, y la serie de Laurent se reduce a una serie de Taylor en torno a $z = a$. Esto muestra que $f(z)$ es analítica en $z = a$ de manera que $z = a$ no es una singularidad, lo que contradice la hipótesis. Esta contradicción muestra que, en la vecindad de una singularidad aislada, $f(z)$ no puede ser acotada.

6.33. Demuestre que si $z \neq 0$, entonces

$$e^{1/2\alpha(z-1/z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) z^n$$

donde

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - \alpha \operatorname{sen} \theta)\,d\theta \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Solución

El punto $z = 0$ es la única singularidad finita de la función $e^{1/2\alpha(z-1/z)}$ y, por tanto, para la función debe haber un desarrollo en una serie de Laurent de la forma

$$e^{1/2\alpha(z-1/z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) z^n \tag{1}$$

que es válida para $|z| > 0$. De acuerdo con la ecuación (6.7) de la página 174, los coeficientes $J_n(\alpha)$ están dados por

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{1/2\alpha(z-1/z)}}{z^{n+1}}\,dz \tag{2}$$

donde C es cualquier curva simple cerrada que tenga $z = 0$ en su interior.

www.FreeLibros.me

En especial, si C se elige como una circunferencia de radio 1 con centro en el origen, la ecuación de C es $|z| = 1$ o $z = e^{i\theta}$. Entonces (2) se convierte en

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{1/2\alpha(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}}{e^{i(n+1)\theta}} ie^{i\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\alpha \operatorname{sen}\theta - in\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\alpha \operatorname{sen}\theta - n\theta)\,d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\alpha \operatorname{sen}\theta - n\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta - \alpha \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

al aprovechar que $I = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\alpha \operatorname{sen}\theta - n\theta)\,d\theta = 0$. A este último resultado se llega debido a que, con $\theta = 2\pi - \phi$, se encuentra que

$$I = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(-\alpha \operatorname{sen}\phi - 2\pi n + n\phi)\,d\phi = -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\alpha \operatorname{sen}\phi - n\phi)\,d\phi = -I$$

de manera que $I = -I$ e $I = 0$. Con lo que se demuestra el resultado deseado.

La función $J_n(\alpha)$ se conoce como *función de Bessel* de primera clase de orden n.

En el capítulo 10 se verá más sobre las funciones de Bessel.

6.34. Los *polinomios de Legendre* $P_n(t)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ se definen mediante la *fórmula* de *Rodrigues*

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$$

a) Demuestre que si C es cualquier curva simple cerrada que encierre el punto $z = t$, entonces

$$P_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{2^n}\oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-t)^{n+1}}\,dz$$

Esta fórmula se conoce como *representación de Schlaefli* o *fórmula de Schlaefli* para $P_n(t)$.

b) Demuestre que

$$P_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (t + \sqrt{t^2-1}\cos\theta)^n\,d\theta$$

Solución

a) De acuerdo con la fórmula integral de Cauchy, si C encierra el punto t,

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}f(t) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}}\,dz$$

Así, al tomar $f(t) = (t^2-1)^n$ de manera que $f(z) = (z^2-1)^n$, se obtiene el resultado buscado

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

$$= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-t)^{n+1}}\,dz$$

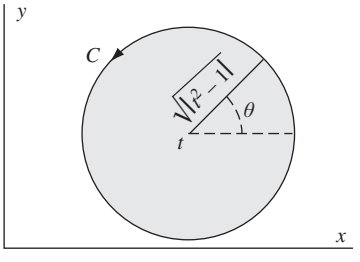


Figura 6-7

www.FreeLibros.me

b) Si se elige C como círculo con centro en t y radio $\sqrt{|t^2-1|}$, como se muestra en la figura 6-7, una ecuación para C es $|z-t| = \sqrt{|t^2-1|}$ o $z = t + \sqrt{t^2-1}e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$. Con esto en el inciso *a*) se tiene

$$\begin{aligned}
P_n(t) &= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\{(t+\sqrt{t^2-1}e^{i\theta})^2-1\}^n\sqrt{t^2-1}ie^{i\theta}}{(\sqrt{t^2-1}e^{i\theta})^{n+1}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\{(t^2-1)+2t\sqrt{t^2-1}e^{i\theta}+(t^2-1)e^{2i\theta}\}^n e^{-in\theta}}{(t^2-1)^{n/2}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\{(t^2-1)e^{-i\theta}+2t\sqrt{t^2-1}+(t^2-1)e^{i\theta}\}^n}{(t^2-1)^{n/2}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\{2t\sqrt{t^2-1}+2(t^2-1)\cos\theta\}^n}{(t^2-1)^{n/2}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t+\sqrt{t^2-1}\cos\theta)^n\,d\theta
\end{aligned}$$

En el capítulo 10 se ve más sobre polinomios de Legendre.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

SUCESIONES DE FUNCIONES Y SERIES DE FUNCIONES

6.35. Con la definición, demuestre: *a*) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n-2z}{n+z} = 3$, *b*) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{nz}{n^2+z^2} = 0$.

6.36. Sean $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = U(z)$ y $\lim_{n\to\infty} v_n(z) = V(z)$. Compruebe que *a*) $\lim_{n\to\infty}\{u_n(z)\pm v_n(z)\} = U(z)\pm V(z)$, *b*) $\lim_{n\to\infty}\{u_n(z)v_n(z)\} = U(z)V(z)$, *c*) $\lim_{n\to\infty} u_n(z)/v_n(z) = U(z)/V(z)$ si $V(z)\neq 0$.

6.37. *a*) Verifique que la serie $\dfrac{1}{2}+\dfrac{z}{2^2}+\dfrac{z^2}{2^3}+\cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^n}$ converge para $|z|<2$ y *b*) encuentre su suma.

6.38. *a*) Determine el conjunto de valores de z para los que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z^n+z^{n+1})$ converge y *b*) encuentre su suma.

6.39. *a*) ¿Para qué valores de z converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty}1/(z^2+1)^n$?, y *b*) ¿cuál es su suma?

6.40. Suponga que $\lim_{n\to\infty}|u_n(z)| = 0$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}u_n(z) = 0$. ¿Lo contrario es verdadero? Justifique su respuesta.

6.41. Demuestre que, para toda z finita, $\lim_{n\to\infty} z^n/n! = 0$.

6.42. Sea $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ una sucesión de números positivos cuyo límite es cero. Suponga que $|u_n(z)|\le a_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}u_n(z) = 0$.

6.43. Demuestre que si a una serie se le agrega o se le elimina un número finito de términos, esto no afecta a la convergencia o divergencia de la serie.

6.44. Sean $S_n = z+2z^2+3z^3+\cdots+nz^n$, $T_n = z+z^2+z^3+\cdots+z^n$. *a*) Muestre que $S_n = (T_n - nz^{n+1})/(1-z)$. *b*) Con el inciso *a*) halle la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$ y determine el conjunto de valores en los que la serie converge.

6.45. Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)/2^n$.

www.FreeLibros.me

CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONVERGENCIA UNIFORME

6.46. *a*) Demuestre que $u_n(z) = 3z + 4z^2/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, converge uniformemente a $3z$ para toda z en el interior de la circunferencia $|z| = 1$.
b) ¿Puede ampliarse la circunferencia del inciso *a*)? Explique.

6.47. *a*) Determine si la sucesión $u_n(z) = nz/(n^2 + z^2)$ [problema 6.35*b*)] converge uniformemente a cero para toda z en el interior de $|z| = 3$. *b*) ¿Es válido el resultado del inciso *a*) para todos los valores finitos de z?

6.48. Demuestre que la serie $1 + az + a^2z^2 + \cdots$ converge uniformemente a $1/(1 - az)$ en el interior y sobre la circunferencia $|z| = R$, donde $R < 1/|a|$.

6.49. Investigue la convergencia *a*) absoluta y *b*) uniforme de la serie

$$\frac{z}{3} + \frac{z(3-z)}{3^2} + \frac{z(3-z)^2}{3^3} + \frac{z(3-z)^3}{3^4} + \cdots$$

6.50. Investigue la convergencia *a*) absoluta y *b*) uniforme de la serie del problema 6.38.

6.51. Investigue la convergencia *a*) absoluta y *b*) uniforme de la serie del problema 6.39.

6.52. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de constantes positivas cuyo límite es cero, y suponga que, para toda z en una región $\mathcal{R}$, $|u_n(z)| \le a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = 0$ uniformemente en $\mathcal{R}$.

6.53. *a*) Demuestre que para toda z finita tal que $\mathrm{Re}\{z^2\} > 0$, la sucesión $u_n(z) = nze^{-nz^2}$ converge a cero, y represente en forma geométrica esta región. *b*) Analice la convergencia uniforme de la sucesión del inciso *a*).

6.54. Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergen absolutamente. Demuestre que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, donde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$ converge absolutamente.

6.55. Suponga que cada una de dos series es absoluta y uniformemente convergente en $\mathcal{R}$. Demuestre que en $\mathcal{R}$ su producto es absoluta y uniformemente convergente.

CRITERIOS ESPECIALES DE CONVERGENCIA

6.56. Pruebe la convergencia de:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}, \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n-1}, \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2-n+2}, \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3}, \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n^3+n+2}}.$$

6.57. Investigue la convergencia de:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}, \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}, \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+|z|}, \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+z}.$$

6.58. Investigue la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ne^{n\pi i/4}}{e^n-1}$.

6.59. Encuentre la región de convergencia de:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}, \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\cdot 3^n}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n, \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}.$$

6.60. Investigue la región de convergencia absoluta de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n(z-i)^n}{4^n(n^2+1)^{5/2}}$.

6.61. Encuentre la región de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi inz}}{(n+1)^{3/2}}$.

6.62. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ diverge aunque el término n-ésimo tienda a cero.

6.63. Sea N un entero positivo y suponga que, para toda $n > N$, $|u_n| > 1/(n \ln n)$. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

6.64. Demuestre la validez *a*) del criterio de la raíz n-ésima [teorema 6.12], *b*) del criterio de la integral [teorema 6.13], de la página 172.

www.FreeLibros.me

6.65. Encuentre el intervalo de convergencia de $1 + 2z + z^2 + 2z^3 + z^4 + 2z^5 + \cdots$.

6.66. Demuestre el criterio de Raabe (teorema 6.14), de la página 172.

6.67. Pruebe la convergencia de: *a*) $\dfrac{1}{2\ln^2 2} + \dfrac{1}{3\ln^2 3} + \dfrac{1}{4\ln^2 4} + \cdots$, *b*) $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1\cdot 4}{5\cdot 8} + \dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{5\cdot 8\cdot 11} + \cdots$,

c) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{2\cdot 7}{5\cdot 10} + \dfrac{2\cdot 7\cdot 12}{5\cdot 10\cdot 15} + \cdots$, *d*) $\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} + \dfrac{\ln 4}{4} + \cdots$.

TEOREMAS SOBRE CONVERGENCIA UNIFORME Y SERIES DE POTENCIAS

6.68. Para las series siguientes, determine la región en la que la serie es uniformemente convergente:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$, *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{n^2}$, *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n}$, *d*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 + |z|^2}$.

6.69. Demuestre el teorema 6.20, de la página 172.

6.70. Enuncie y verifique los teoremas para sucesiones análogos a los teoremas para series 6.18, 6.19 y 6.20, de la página 172.

6.71. *a*) Mediante diferenciación de ambos lados de la identidad

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \qquad |z| < 1$$

encuentre la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ para $|z| < 1$. Justifique todos los pasos.

b) Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ para $|z| < 1$.

6.72. Sea z real y tal que $0 \le z \le 1$, y sea $u_n(z) = nze^{-nz^3}$.

a) Encuentre $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(z)\,dz$, *b*) Encuentre $\displaystyle\int_0^1 \left\{\lim_{n\to\infty} u_n(z)\right\} dz$.

b) Explique por qué las respuestas de los incisos *a*) y *b*) no son iguales [véase el problema 6.53].

6.73. Demuestre el teorema de Abel [teorema 6.24, página 173].

6.74. *a*) Demuestre que $1/(1+z^2) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$ para $|z| < 1$.

b) Si se elige la rama de $f(z) = \tan^{-1} z$ en la que $f(0) = 0$, con el inciso *a*) compruebe que

$$\tan^{-1} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots$$

c) Demuestre que $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$.

6.75. Demuestre el teorema 6.25, de la página 173.

6.76. *a*) Determine $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tal que para toda z en $|z| \le 1$, $Y'(z) = Y(z)$, $Y(0) = 1$. Indique los teoremas empleados y verifique que el resultado sea una solución.

b) ¿Es válido el resultado del inciso *a*) en el exterior de $|z| \le 1$? Justifique su respuesta.

c) Muestre que $Y(z) = e^z$ satisface la ecuación diferencial y la condición del inciso *a*).

d) ¿Puede identificarse la serie del inciso *a*) con e^z? Explique.

6.77. *a*) Dada la ecuación diferencial $Y''(z) + Y(z) = 0$, $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 1$, emplee métodos para series a fin de obtener la expansión de la serie

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

b) ¿Cómo se obtiene una serie correspondiente a $\cos z$?

www.FreeLibros.me

TEOREMA DE TAYLOR

6.78. Obtenga el desarrollo de las funciones siguientes en una serie de Taylor en torno al punto indicado y, en cada caso, determine la región de convergencia.

a) e^{-z}; $z = 0$ *c*) $1/(1+z)$; $z = 1$ *e*) ze^{2z}; $z = -1$
b) $\cos z$; $z = \pi/2$ *d*) $z^3 - 3z^2 + 4z - 2$; $z = 2$

6.79. Suponga que las funciones siguientes se desarrollan en una serie de Taylor en torno al punto indicado. ¿Cuál sería la región de convergencia? No realice la expansión.

a) $\operatorname{sen} z/(z^2+4)$; $z = 0$, *c*) $(z+3)/(z-1)(z-4)$; $z = 2$, *e*) $e^z/z(z-1)$; $z = 4i$, *g*) $\sec \pi z$; $z = 1$
b) $z/(e^z+1)$; $z = 0$, *d*) $e^{-z^2}\operatorname{senh}(z+2)$; $z = 0$, *f*) $z \coth 2z$; $z = 0$.

6.80. Verifique las expansiones 1, 2 y 3 para e^z, sen z y cos z, de las páginas 173 y 174.

6.81. Muestre que $\operatorname{sen} z^2 = z^2 - \dfrac{z^6}{3!} + \dfrac{z^{10}}{5!} - \dfrac{z^{14}}{7!} + \cdots, \quad |z| < \infty.$

6.82. Demuestre que $\tan^{-1} z = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} - \dfrac{z^7}{7} + \cdots, \quad |z| < 1.$

6.83. Muestre que *a*) $\tan z = z + \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{2z^5}{15} + \cdots, \quad |z| < \pi/2,$

b) $\sec z = 1 + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{5z^4}{24} + \cdots, \quad |z| < \pi/2,$ *c*) $\csc z = \dfrac{1}{z} + \dfrac{z}{6} + \dfrac{7z^3}{360} + \cdots, \quad 0 < |z| < \pi$

6.84. Al sustituir z por iz en la expansión del problema 6.82, obtenga el resultado del problema 6.23*c*), de la página 185.

6.85. ¿Cómo se obtiene una serie para *a*) tanh z, *b*) sech z, *c*) csch z a partir de las series del problema 6.83?

6.86. Demuestre la unicidad de la expansión de la serie de Taylor de $f(z)$ en torno a $z = a$.

[*Sugerencia:* Suponga que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n$ y muestre que $c_n = d_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.]

6.87. Demuestre el teorema 6.6 del binomio, de la página 174.

6.88. Suponga que se elige la rama de $\sqrt{1+z^3}$ con el valor 1 para $z = 0$. Muestre que

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^3}} = 1 - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^9 + \cdots \quad |z| < 1$$

6.89. *a*) Elija la rama de $\operatorname{sen}^{-1} z$ en la que se tiene el valor cero para $z = 0$. Muestre que

$$\operatorname{sen}^{-1} z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^7}{7} + \cdots \quad |z| < 1$$

b) Demuestre que el resultado del inciso *a*) es válido para $z = i$.

6.90. *a*) Obtenga el desarrollo de $f(z) = \ln(3 - iz)$ en una serie de potencias de $z - 2i$, al elegir la rama del logaritmo en la que $f(0) = \ln 3$, y *b*) determine la región de convergencia.

TEOREMA DE LAURENT

6.91. Obtenga el desarrollo de $f(z) = 1/(z-3)$ en una serie de Laurent válida para *a*) $|z| < 3$, *b*) $|z| > 3$.

6.92. Obtenga el desarrollo de $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ en una serie de Laurent válida para:

a) $|z| < 1$, *b*) $1 < |z| < 2$, *c*) $|z| > 2$, *d*) $|z-1| > 1$, *e*) $0 < |z-2| < 1$.

www.FreeLibros.me

6.93. Obtenga el desarrollo de $f(z) = 1/z\,(z-2)$ en una serie de Laurent válida para *a*) $0 < |z| < 2$, *b*) $|z| > 2$.

6.94. Encuentre un desarrollo de $f(z) = z/(z^2+1)$ válido para $|z-3| > 2$.

6.95. Encuentre un desarrollo de $f(z) = 1/(z-2)^2$ en una serie de Laurent válido para *a*) $|z| < 2$, *b*) $|z| > 2$.

6.96. Obtenga el desarrollo de las funciones siguientes en una serie de Laurent en torno a $z = 0$, e indique en cada caso el tipo de singularidad.

a) $(1-\cos z)/z$, *b*) e^z/z^3, *c*) $z^{-1}\cosh z^{-1}$, *d*) $z^2 e^{-z^4}$

6.97. Suponga que $\tan z$ se desarrolla en una serie de Laurent en torno a $z = \pi/2$. Muestre que: *a*) la parte principal es $-1/(z-\pi/2)$, *b*) esta serie converge para $0 < |z-\pi/2| < \pi/2$, *c*) $z = \pi/2$ es un polo simple.

6.98. Determine y clasifique todas las singularidades de las funciones:

a) $1/(2\,\text{sen}\,z-1)^2$, *b*) $z/(e^{1/z}-1)$, *c*) $\cos(z^2+z^{-2})$, *d*) $\tan^{-1}(z^2+2z+2)$, *e*) $z/(e^z-1)$.

6.99. *a*) Desarrolle $f(z) = e^{z/(z-2)}$ en una serie de Laurent en torno a $z = 2$ y *b*) determine la región de convergencia de esta serie. *c*) Clasifique las singularidades de $f(z)$.

6.100. Establezca el resultado (6.7), de la página 174, sobre los coeficientes en una serie de Laurent.

6.101. Demuestre que las únicas singularidades de una función racional son polos.

6.102. Demuestre el recíproco del problema 6.101, es decir, si las únicas singularidades de una función son polos, la función debe ser racional.

DESAROLLO DE LAGRANGE

6.103. Muestre que la raíz de la ecuación $z = 1 + \zeta z^p$ que es 1 para $\zeta = 0$, está dada por

$$z = 1 + \zeta + \frac{2p}{2!}\zeta^2 + \frac{(3p)(3p-1)}{3!}\zeta^3 + \frac{(4p)(4p-1)(4p-2)}{4!}\zeta^4 + \cdots$$

6.104. En el problema 6.103, calcule la raíz si $p = 1/2$ y $\zeta = 1$, *a*) mediante una serie y *b*) exactamente. Compare las dos respuestas.

6.105. Con la ecuación $z = \alpha + \frac{1}{2}\,\zeta(z^2-1)$, muestre que

$$\frac{1}{\sqrt{1-2a\zeta+\zeta^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{2^n n!}\frac{d^n}{da^n}(a^2-1)^n$$

6.106. Muestre que el desarrollo de Lagrange sirve para resolver el problema de Kepler de determinar la raíz de $z = a + \zeta\,\text{sen}\,z$ para la cual $z = a$ cuando $\zeta = 0$.

6.107. Demuestre el desarrollo de Lagrange, fórmula 6.11, de la página 176.

CONTINUACIÓN ANALÍTICA

6.108. *a*) Demuestre que

$$F_2(z) = \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n$$

es una continuación analítica de $F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, y muestre gráficamente las regiones de convergencia de la serie.

b) Determine la función representada por todas las continuaciones analíticas de $F_1(z)$.

6.109. Sea $F_1(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{3^n}$.

a) Encuentre una continuación analítica de $F_1(z)$ que converja para $z = 3-4i$.

b) Determine el valor de la continuación analítica del inciso *a*) para $z = 3-4i$.

6.110. Compruebe que la serie $z^{1!} + z^{2!} + z^{3!} + \cdots$ tiene la frontera natural $|z| = 1$.

www.FreeLibros.me

PROBLEMAS DIVERSOS

6.111. *a*) Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ diverge si la constante $p \leq 1$.

b) Verifique que si p es complejo, la serie del inciso *a*) converge si $\text{Re}\{p\} > 1$.

c) Investigue la convergencia o divergencia de la serie del inciso *a*) si $\text{Re}\{p\} \leq 1$.

6.112. Demuestre la convergencia o divergencia:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+i}$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}^{-1}(1/n^3)$ *e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \coth^{-1} n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \operatorname{sen}^2 n}{ie^n + (2-i)n}$ *d*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(i)^n}{n \ln n}$ *f*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

6.113. Para mostrar que $\sum_{-\infty}^{\infty} z^n = 0$, Euler presentó el argumento siguiente:

$$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{1}^{\infty} z^n, \qquad \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots = \sum_{0}^{-\infty} z^n$$

Después, al sumar, $\sum_{-\infty}^{\infty} z^n = 0$. Explique la falacia.

6.114. Demuestre que para $|z-1| < 1$, $\quad z \ln z = (z-1) + \dfrac{(z-1)^2}{1 \cdot 2} - \dfrac{(z-1)^3}{2 \cdot 3} + \dfrac{(z-1)^4}{3 \cdot 4} - \cdots$.

6.115. Obtenga el desarrollo de $\operatorname{sen}^3 z$ en una serie de Maclaurin.

6.116. En la serie $z^2 + \dfrac{z^2}{1+z^2} + \dfrac{z^2}{(1+z^2)^2} + \dfrac{z^2}{(1+z^2)^3} + \cdots$.

a) Muestre que la suma de los n primeros términos es $S_n(z) = 1 + z^2 - 1/(1+z^2)^{n-1}$.

b) Muestre que la suma de la serie es $1 + z^2$ para $z \neq 0$, y 0 para $z = 0$; y por ende, que $z = 0$ es un punto de discontinuidad.

c) Muestre que en la región $|z| \leq \delta$, donde $\delta > 0$, esta serie no es uniformemente convergente.

6.117. Si $F(z) = \dfrac{3z-3}{(2z-1)(z-2)}$, encuentre una serie de Laurent $F(z)$ en torno a $z = 1$ que converja para $\frac{1}{2} < |z-1| < 1$.

6.118. Sea $G(z) = (\tan^{-1} z)/z^4$. *a*) Desarrolle $G(z)$ en una serie de Laurent. *b*) Determine la región de convergencia de la serie del inciso *a*). *c*) Evalúe $\oint_C G(z)\,dz$, donde C es un cuadrado con vértices en $2 \pm 2i$, $-2 \pm 2i$.

6.119. Considere las funciones ze^{1/z^2}, $(\operatorname{sen}^2 z)/z$, $1/z(4-z)$, las cuales tienen singularidades en $z = 0$:

a) dé un desarrollo en una serie de Laurent en torno a $z = 0$ y determine la región de convergencia;

b) indique en cada caso si $z = 0$ es una singularidad removible, una singularidad esencial o un polo;

c) evalúe la integral de la función en torno a la circunferencia $|z| = 2$.

6.120. *a*) Investigue la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$. *b*) ¿Contradice su respuesta al inciso *a*) del problema 6.8?

6.121. *a*) Muestre que la serie siguiente, donde $z = x + iy$, converge absolutamente en la región limitada por $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y = 1$:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{1^2+1} + \frac{\operatorname{sen}^2 z}{2^2+1} + \frac{\operatorname{sen}^3 z}{3^2+1} + \cdots$$

b) Represente en forma gráfica la región del inciso *a*).

6.122. Si $|z| > 0$, demuestre que $\cosh(z + 1/z) = c_0 + c_1(z + 1/z) + c_2(z^2 + 1/z^2) + \cdots$, donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\phi \cosh(2\cos\phi)\,d\phi$$

www.FreeLibros.me

6.123. Si $f(z)$ tiene ceros simples en $1 - i$ y en $1 + i$, polos dobles en $-1 + i$ y en $-1 - i$, pero ningunas otras singularidades finitas, demuestre que la función debe estar dada por

$$f(z) = \kappa \frac{z^2 - 2z + 2}{(z^2 + 2z + 2)^2}$$

donde κ es una constante arbitraria.

6.124. Demuestre que para toda z, $e^z \operatorname{sen} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2} \operatorname{sen}(n\pi/4)}{n!} z^n$.

6.125. Muestre que $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, y justifique todos los pasos. [*Sugerencia:* Use el problema 6.23.]

6.126. Investigue la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{[1 + (n-1)z][1 + nz]}$.

[*Sugerencia:* Descomponga el término n-ésimo en fracciones parciales y muestre que la n-ésima suma parcial es $S_n(z) = 1 - (1/1 + nz)$.]

6.127. Si la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ converge a S, demuestre que la serie reordenada

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3}{2} S.$$

Explique.

[*Sugerencia:* De la primera serie tome $\frac{1}{2}$ y escríbalo como $0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + \cdots$; después sume término por término con la primera serie. Observe que $S = \ln 2$, como se muestra en el problema 6.125.]

6.128. Demuestre que la *serie hipergeométrica*

$$1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)} z^3 + \cdots$$

a) converge absolutamente si $|z| < 1$,

b) diverge para $|z| > 1$,

c) converge absolutamente para $z = 1$ si $\operatorname{Re}\{a + b - c\} < 0$,

d) satisface la ecuación diferencial $z(1 - z)Y'' + \{c - (a + b + 1)z\}Y' - abY = 0$.

6.129. Demuestre que, para $|z| < 1$,

$$(\operatorname{sen}^{-1} z)^2 = z^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{z^4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{z^6}{3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{z^8}{4} + \cdots$$

6.130. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+i}$ diverge.

6.131. Muestre que $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots = 2 \ln 2 - 1$.

6.132. Localice e indique el tipo de todas las singularidades de $\frac{z^6 + 1}{(z-1)^3 (3z+2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{z^2}{z-3}\right)$.

6.133. Utilizando sólo propiedades de las series infinitas, demuestre que

a) $\left\{1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots\right\}\left\{1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \cdots\right\} = \left\{1 + (a+b) + \frac{(a+b)^2}{2!} + \cdots\right\}$

b) $\left\{1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \cdots\right\}^2 + \left\{a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \cdots\right\}^2 = 1$

6.134. Suponga que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge para $|z| < R$ y que $0 \le r < R$. Verifique que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

www.FreeLibros.me

6.135. Con el problema 6.134, demuestre la desigualdad de Cauchy (página 145), a saber,

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

6.136. Suponga que una función tiene seis ceros de orden 4 y cuatro polos de orden 3, 4, 7 y 8, pero no tiene ninguna otra singularidad en el plano finito. Demuestre que la función tiene un polo de orden 2 en $z = \infty$.

6.137. Determine si las funciones siguientes son enteras, meromórficas o ninguna de las dos cosas:

a) $z^2 e^{-z}$, *c*) $(1 - \cos z)/z$, *e*) $z \operatorname{sen}(1/z)$, *g*) $\operatorname{sen} \sqrt{z}/\sqrt{z}$

b) $\cot 2z$, *d*) $\cosh z^2$, *f*) $z + 1/z$, *h*) $\sqrt{\operatorname{sen} z}$

6.138. Sea $-\pi < \theta < \pi$. Demuestre que $\ln(2\cos\theta/2) = \cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta - \frac{1}{4}\cos 4\theta + \cdots$

6.139. *a*) Obtenga el desarrollo de $1/\ln(1 + z)$ en una serie de Laurent en torno a $z = 0$ y *b*) determine la región de convergencia.

6.140. Sea $S(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$. Con las restricciones necesarias, demuestre que

$$\frac{S(z)}{1 - z} = a_0 + (a_0 + a_1)z + (a_0 + a_1 + a_2)z^2 + \cdots$$

6.141. Muestre que la serie siguiente *a*) no es absolutamente convergente, pero *b*) es uniformemente convergente para todos los valores de z.

$$\frac{1}{1 + |z|} - \frac{1}{2 + |z|} + \frac{1}{3 + |z|} - \frac{1}{4 + |z|} + \cdots$$

6.142. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ converge en todos los puntos de $|z| \leq 1$, excepto en $z = 1$.

6.143. Compruebe que la solución de $z = a + \zeta e^z$, que tiene el valor a en $\zeta = 0$, está dada por

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1} e^{na} \zeta^n}{n!}$$

si $|\zeta| < |e^{-(a+1)}|$.

6.144. Encuentre la suma de la serie $1 + \cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos 3\theta}{3!} + \cdots$.

6.145. Sea $F(z)$ analítica en el plano finito y suponga que $F(z)$ tiene periodo 2π, es decir, $F(z + 2\pi) = F(z)$. Demuestre que

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inz} \quad \text{donde } \alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z) e^{-inz}\, dz$$

Esta serie se llama *serie de Fourier* para $F(z)$.

6.146. Demuestre que la serie siguiente es igual a $\pi/4$ si $0 < \theta < \pi$ y a $-\pi/4$ si $-\pi < \theta < 0$:

$$\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\theta + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5\theta + \cdots$$

6.147. Demuestre que $|z| = 1$ es una frontera natural para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{3^n}$.

6.148. Suponga que $f(z)$ es analítica y no idéntica a cero en la región $0 < |z - z_0| < R$, y suponga que $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$. Demuestre que existe un entero positivo n tal que $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, donde $g(z)$ es analítica en z_0 y diferente de cero.

6.149. Suponga que $f(z)$ es analítica en una vecindad agujerada de z_0 y que $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Demuestre que $z = z_0$ es un polo de $f(z)$.

6.150. Explique por qué el enunciado del problema 6.149 no es válido para $f(x) = e^{1/x^2}$, donde x es real.

www.FreeLibros.me

6.151. *a*) Muestre que la función $f(z) = e^{1/z}$ puede tomar cualquier valor excepto cero.
b) Analice la relación entre el resultado del inciso *a*) y el teorema de Casorati-Weierstrass y el teorema de Picard.

6.152. *a*) Determine si la función $g(z) = z^2 - 3z + 2$ puede tomar un valor complejo.
b) ¿Existe alguna relación entre el resultado del inciso *a*) y los teoremas de Casorati-Weierstrass y de Picard? Explique.

6.153. Compruebe el teorema de Casorati-Weierstrass planteado en la página 175 [*Sugerencia:* Aproveche que si $z = a$ es una singularidad esencial de $f(z)$, es también una singularidad esencial de $1/\{f(z) - A\}$.]

6.154. *a*) Demuestre que a lo largo de un rayo a través de $z = 0$, $|z + e^z| \to \infty$.

b) ¿Contradice el resultado del inciso *a*) al teorema de Casorati-Weierstrass?

6.155. *a*) Demuestre que una función entera $f(z)$ puede tomar cualquier valor, con quizás una excepción.

b) Ilustre el resultado del inciso *a*) con $f(z) = e^z$, e indique la excepción en este caso.

c) ¿Qué relación hay entre este resultado y los teoremas de Casorati-Weierstrass y de Picard?

6.156. Demuestre que toda función entera tiene una singularidad al infinito. ¿Qué tipo de singularidad debe ser? Justifique su respuesta.

6.157. Verifique que: *a*) $\dfrac{\ln(1+z)}{1+z} = z - \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)z^2 + \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right)z^3 - \cdots, \quad |z| < 1$

b) $\{\ln(1+z)\}^2 = z^2 - \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{2z^3}{3} + \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right)\dfrac{2z^4}{4} - \cdots, \quad |z| < 1$

6.158. Encuentre la suma de las series siguientes si $|a| < 1$:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} na^n \operatorname{sen} n\theta$, *b*) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^n \operatorname{sen} n\theta$.

6.159. Muestre que $e^{\operatorname{sen} z} = 1 + z + \dfrac{z^2}{2} - \dfrac{z^4}{8} - \dfrac{z^5}{15} + \cdots, \quad |z| < \infty$.

6.160. *a*) Muestre que $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ converge para $|z| \leq 1$.

b) Muestre que la función $F(z)$, definida como la colección de todas las continuaciones analíticas posibles de la serie del inciso *a*), tiene un punto singular en $z = 1$.

c) Concilie los resultados de los incisos *a*) y *b*).

6.161. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ convergente en el interior de un círculo de convergencia de radio R. Existe un teorema que sostiene que la función $F(z)$ definida por la colección de todas las continuaciones posibles de esta serie tiene al menos un punto singular sobre la circunferencia de convergencia. *a*) Ilustre el teorema mediante varios ejemplos. *b*) ¿Puede probar este teorema?

6.162. Muestre que

$$u(r,\ \theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{U(\phi)\, d\phi}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \{a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta\}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(\phi) \cos n\phi\, d\phi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(\phi) \operatorname{sen} n\phi\, d\phi$$

6.163. Sea

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 + B_1 z + \frac{B_2 z^2}{2!} + \frac{B_3 z^3}{3!} + \cdots$$

www.FreeLibros.me

a) Muestre que los números B_n, llamados *números de Bernoulli*, satisfacen la fórmula de recursión $(B+1)^n = B^n$, donde B^k se sustituye formalmente por B_k, después de la expansión. *b*) Con el inciso *a*), o de alguna otra manera, determine $B_1, \ldots, B_6$.

6.164. *a*) Demuestre que $\dfrac{z}{e^z-1} = \dfrac{z}{2}\left(\coth\dfrac{z}{2} - 1\right)$.

b) Con el problema 6.163 y el inciso *a*) muestre que $B_{2k+1} = 0$ si $k = 1, 2, 3, \ldots$.

6.165. Obtenga los desarrollos de las series

a) $\coth z = \dfrac{1}{z} + \dfrac{z}{3} - \dfrac{z^3}{45} + \cdots + \dfrac{B_{2n}(2z)^{2n}}{(2n)!z} + \cdots, \qquad |z| < \pi$

b) $\cot z = \dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{3} - \dfrac{z^3}{45} + \cdots (-1)^n \dfrac{B_{2n}(2z)^{2n}}{(2n)!z} + \cdots, \qquad |z| < \pi$

c) $\tan z = z + \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{2z^5}{15} + \cdots (-1)^{n-1} \dfrac{2(2^{2n}-1)B_{2n}(2z)^{2n-1}}{(2n)!}, \qquad |z| < \pi/2$

d) $\csc z = \dfrac{1}{z} + \dfrac{z}{6} + \dfrac{7z^3}{360} + \cdots (-1)^{n-1} \dfrac{2(2^{2n-1}-1)B_{2n}z^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots, \qquad |z| < \pi$

[*Sugerencia:* Para el inciso *a*) emplee el problema 6.164; para el inciso *b*) sustituya en el inciso *a*) z por iz; para el inciso *c*) use $\tan z = \cot z - 2\cot 2z$; para el inciso *d*) use $\csc z = \cot z + \tan z/2$.]

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

6.37. *a*) $S_n(z) = \{1 - (z/2)^n\}/(2-z)$, y $\lim_{n\to\infty} S_n(z)$ existe si $|z| < 2$, *b*) $S(z) = 1/(2-z)$

6.38. *a*) $|z| < 1$, *b*) 1

6.39. *a*) Para toda z tal que $|z^2+1| > 1$, *b*) $1/z^2$

6.44. *b*) $z/(1-z)^2$, $|z| < 1$

6.45. 4

6.49. *a*) Converge absolutamente si $|z-3| < 3$ o si $z = 0$. *b*) Converge uniformemente para $|z-3| \le R$, donde $0 < R < 3$; no converge uniformemente en ninguna vecindad que contenga $z = 0$.

6.50. *a*) Converge absolutamente si $|z| < 1$. *b*) Converge uniformemente si $|z| \le R$, donde $R < 1$.

6.51. *a*) Converge absolutamente si $|z^2+1| > 1$. *b*) Converge uniformemente si $|z^2+1| \ge R$, donde $R > 1$.

6.53. *b*) No converge uniformemente en ninguna región que contenga $z = 0$.

6.56. *a*) conv., *b*) conv., *c*) div., *d*) conv., *e*) div.

6.57. *a*) Diverge para toda z finita. *b*) Converge para toda z. *c*) Converge para toda z. *d*) Converge para toda z, salvo para $z = -n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

6.58. Conv.

6.59. *a*) $|z+i| \le 1$, *b*) $|(z+1)/(z-1)| \le 3$, *c*) $|z| < \infty$

6.60. Conv. Abs. para $|z-i| \le 4$.

6.61. Converge si $\operatorname{Im} z \ge 0$.

6.65. $|z| < 1$

6.67. *a*) conv., *b*) conv., *c*) div., *d*) div.

6.68. *a*) $|z| \le R$, donde $R < 3$, *b*) $|z-i| \le 1$, *c*) $|z| \ge R$, donde $R > 1$, *d*) toda z.

6.71. *a*) $z/(1-z)^2$ [compare con el problema 6.44], *b*) $z(1+z)/(1-z)^3$

6.72. *a*)$1/2$, *b*) 0

6.76. *a*) $Y(z) = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots$

6.79. *a*) $|z| < 2$, *b*) $|z| < \pi$, *c*) $|z-2| < 1$, *d*) $|z| < \infty$, *e*) $|z-4i| < 4$, *f*) $|z| < \pi/2$, *g*) $|z-1| < 1/2$

6.90. *a*) $\ln 5 - \dfrac{i(z-2i)}{5} + \dfrac{(z-2i)^2}{2\cdot 5^2} + \dfrac{i(z-2i)^3}{3\cdot 5^3} - \dfrac{(z-2i)^4}{4\cdot 5^4} - \cdots$ *b*) $|z-2i| < 5$

6.91. *a*) $-\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}z - \dfrac{1}{27}z^2 - \dfrac{1}{81}z^3 - \cdots$ *b*) $z^{-1} + 3z^{-2} + 9z^{-3} + 27z^{-4} + \cdots$

www.FreeLibros.me

6.92. *a*) $-\frac{1}{2}z-\frac{3}{4}z^2-\frac{7}{8}z^3-\frac{15}{16}z^4-\cdots$ *b*) $\cdots+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{8}z^3+\cdots$

c) $-\frac{1}{2}-\frac{3}{z^2}-\frac{7}{z^3}-\frac{15}{z^4}-\cdots$ *d*) $-(z-1)^{-1}-2(z-1)^{-2}-2(z-1)^{-3}-\cdots$

e) $1-2(z-2)^{-1}-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+(z-2)^4-\cdots$

6.96. *a*) $\frac{z}{2!}-\frac{z^3}{4!}+\frac{z^5}{6!}-\cdots$; singularidad removible *d*) $z^2-z^6+\frac{z^{10}}{2!}-\frac{z^{14}}{3!}+\cdots$; punto ordinario

b) $\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}+\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{4!}+\frac{z^7}{5!}+\cdots$; polo de orden 3 *e*) $z^{3/2}+\frac{z^{5/2}}{3!}+\frac{z^{7/2}}{5!}+\frac{z^{9/2}}{7!}+\cdots$; punto de ramificación

c) $\frac{1}{z}-\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{4!z^5}-\cdots$; singularidad esencial

6.98. *a*) $\pi/6+2m\pi$, $(2m+1)\pi-\pi/6$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$; polos de orden 2

b) $i/2m\pi$, $m=\pm1,\pm2,\ldots$; polos simples, $z=0$; singularidad esencial, $z=\infty$; polo de orden 2

c) $z=0,\infty$; singularidades esenciales

d) $z=-1\pm i$; puntos de ramificación

e) $z=2m\pi i$, $m=\pm1,\pm2,\ldots$; polos simples, $z=0$; singularidad removible, $z=\infty$; singularidad esencial

6.99. *a*) $e\left\{1+2(z-2)^{-1}+\frac{2^2(z-2)^{-2}}{2!}+\frac{2^3(z-2)^{-3}}{3!}+\cdots\right\}$

b) $|z-2|>0$

c) $z=2$; singularidad esencial, $z=\infty$; singularidad removible

6.104. 2.62 a dos decimales.

6.108. *b*) $1/(1-z)$

6.109. *b*) $-3-(9/4)i$

6.112. *a*) div., *b*) conv., *c*) conv., *d*) conv., *e*) div., *f*) conv.

6.115. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-3^{2n-1})z^{2n-1}}{4(2n-1)!}$

6.117. $\cdots-\frac{1}{8}(z-1)^{-4}+\frac{1}{4}(z-1)^{-3}-\frac{1}{2}(z-1)^{-2}+(z-1)^{-1}-1-(z-1)-(z-1)^2-\cdots$

6.118. *a*) $\frac{1}{z^3}-\frac{1}{3z}+\frac{z}{5}-\frac{z^3}{7}+\cdots$ *b*) $|z|>0$ *c*) $-1/3$

6.119. *a*) $z+z^{-1}+\frac{z^{-3}}{2!}+\frac{z^{-5}}{3!}+\cdots$; $|z|>0$, $2z-\frac{2z^3}{3}+\frac{4z^5}{45}-\cdots$; $|z|\geq 0$, $\frac{z^{-1}}{4}+\frac{1}{16}+\frac{z}{64}+\frac{z^2}{256}+\cdots$; $0<|z|<4$
b) singularidad esencial, singularidad removible, polo, *c*) $2\pi i$, 0, $\pi i/2$

6.120. *a*) diverge

6.126. No es uniformemente convergente en ninguna región que comprenda a $z=0$; es uniformemente convergente en una región $|z|\geq\delta$, donde δ es cualquier número positivo.

6.137. *a*) entera, *b*) meromórfica, *c*) entera, *d*) entera, *e*) ninguna de las dos, *f*) meromórfica, *g*) entera, *h*) ninguna de las dos

6.139. *a*) $\frac{1}{z}+\frac{z}{2}-\frac{z}{12}+\frac{z^2}{24}+\frac{89z^3}{720}+\cdots$ *b*) $0<|z|<1$

6.144. $e^{\cos\theta}\cos(\operatorname{sen}\theta)$

6.163. *b*) $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_3=0$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_5=0$, $B_6=\frac{1}{42}$

www.FreeLibros.me

CAPÍTULO 7

El teorema del residuo, cálculo de integrales y series

7.1 RESIDUOS

Sea $f(z)$ unívoca y analítica en el interior y sobre una circunferencia C salvo en el punto $z = a$ elegido como centro de C. Así, como se vio en el capítulo 6, para $f(z)$ existe una serie de Laurent en torno a $z = a$, dada por

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \\ &= a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \tag{7.2}$$

En el caso especial $n = -1$, se tiene, de acuerdo con (7.2),

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1} \tag{7.3}$$

Formalmente, (7.3) se obtiene de (7.1) al integrar término por término y con los resultados (problemas 4.21 y 4.22)

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^p} = \begin{cases} 2\pi i & p = 1 \\ 0 & p = \text{entero} \neq 1 \end{cases} \tag{7.4}$$

Como en (7.3) sólo interviene el coeficiente a_{-1} de (7.1), a a_{-1} se le llama *residuo* de $f(z)$ en $z = a$.

7.2 CÁLCULO DE RESIDUOS

Para obtener el residuo de una función $f(z)$ en $z = a$, de acuerdo con (7.1) puede parecer necesario obtener el desarrollo de $f(z)$ en una serie de Laurent en torno a $z = a$. Sin embargo, cuando $z = a$ sea un polo de orden k, existe una

www.FreeLibros.me

fórmula sencilla para a_{-1} dada por

$$a_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \{(z-a)^k f(z)\} \tag{7.5}$$

Si $k = 1$ (polo simple), la fórmula es aún más sencilla y está dada por

$$a_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) \tag{7.6}$$

que es un caso especial de (7.5) en el que $k = 1$ si se define $0! = 1$.

EJEMPLO 7.1: Si $f(z) = z/(z-1)(z+1)^2$, entonces $z = 1$ y $z = -1$ son polos de orden uno y dos, respectivamente. Utilizando (7.6) y (7.5), con $k = 2$, se tiene,

$$\text{Residuo en } z = 1 \text{ es } \lim_{z \to 1} (z-1) \left\{ \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right\} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Residuo en } z = -1 \text{ es } \lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) \right\} = -\frac{1}{4}$$

Si $z = a$ es una singularidad esencial, el residuo, en algunos casos, se halla con expansiones de series conocidas.

EJEMPLO 7.2: Sea $f(z) = e^{-1/z}$. Así, $z = 0$ es una singularidad esencial y, a partir del desarrollo conocido para e^u con $u = -1/z$, se tiene

$$e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

de donde se ve que el residuo en $z = 0$ es el coeficiente de $1/z$, que es igual a -1.

7.3 EL TEOREMA DEL RESIDUO

Sea $f(z)$ unívoca y analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C, excepto en las singularidades a, b, c,... en el interior de C, las cuales tienen residuos dados por a_{-1}, b_{-1}, c_{-1},... [véase la figura 7-1]. De este modo, el *teorema del residuo* establece que

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i (a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \cdots) \tag{7.7}$$

es decir, la integral de $f(z)$ a lo largo de C es $2\pi i$ veces la suma de los residuos de $f(z)$ en las singularidades contenidas en C. Observe que (7.7) es una generalización de (7.3). El teorema de Cauchy y las fórmulas integrales son casos especiales de este teorema (véase el problema 7.75).

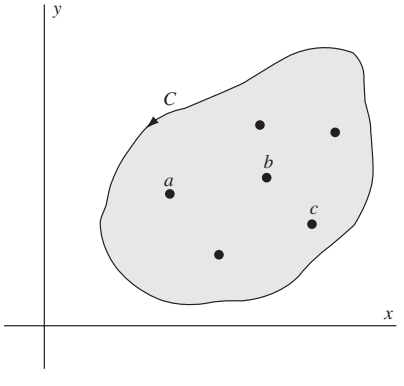


Figura 7-1

www.FreeLibros.me

7.4 CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

Las integrales definidas suelen calcularse con el teorema del residuo junto con una función adecuada $f(z)$ y una trayectoria cerrada adecuada en torno a C, cuya elección suele requerir mucho ingenio. En la práctica, los tipos más comunes son los siguientes.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx$, donde $F(x)$ es una función racional.

   Considere $\oint_C F(z)\,dz$ a lo largo de un contorno C que consta de una recta a lo largo del eje x desde $-R$ hasta $+R$ y del semicírculo Γ sobre el eje x con esa recta como diámetro [figura 7-2]. Así, sea $R \to \infty$. Si $F(x)$ es una función par, con esto se evalúa $\int_0^{\infty} F(x)\,dx$. Véanse los problemas 7.7 a 7.10.

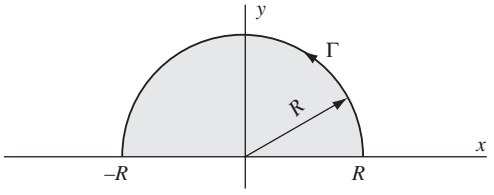


Figura 7-2

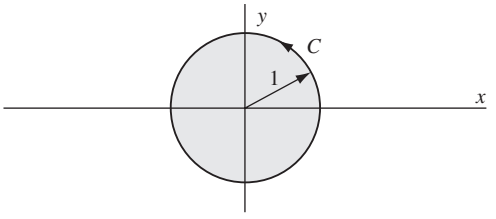


Figura 7-3

2. $\int_0^{2\pi} G(\text{sen}\,\theta,\ \cos\theta)\,d\theta$, donde $G(\text{sen}\,\theta, \cos\theta)$ es una función racional de sen θ y cos θ.

   Sea $z = e^{i\theta}$. Así, sen $\theta = (z - z^{-1})/2i$, cos $\theta = (z + z^{-1})/2$ y $dz = ie^{i\theta}\,d\theta$ o $d\theta = dz/iz$. La integral dada es equivalente a $\oint_C F(z)\,dz$, donde C es el círculo unitario con centro en el origen [figura 7-3]. Véanse los problemas 7.11 a 7.14.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \text{sen}\,mx\end{Bmatrix} dx$, donde $F(x)$ es una función racional.

   Aquí se considera $\oint_C F(z)e^{imz}\,dz$, donde C es el mismo contorno que en el tipo 1. Véanse los problemas 7.15 a 7.17 y 7.37.

4. Integrales de diversa índole en las que se tienen contornos especiales. Véanse los problemas 7.18 a 7.23.

7.5 TEOREMAS ESPECIALES PARA CALCULAR INTEGRALES

Al calcular integrales como las anteriores, de tipo 1 y de tipo 3, suele ser necesario mostrar que $\int_\Gamma F(z)\,dz$ y $\int_\Gamma e^{imz}F(z)\,dz$ tienden a cero cuando $R \to \infty$. Los teoremas siguientes son importantes.

TEOREMA 7.1. Si $|F(z)| \le M/R^k$ para $z = Re^{i\theta}$, donde $k > 1$ y M son constantes, entonces, si Γ es el semicírculo de la figura 7-2,

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma F(z)\,dz = 0$$

Véase el problema 7.7.

www.FreeLibros.me

TEOREMA 7.2. Si $|F(z)| \leq M/R^k$ para $z = Re^{i\theta}$, donde $k > 0$ y M son constantes, y si Γ es el semicírculo de la figura 7-2,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} e^{imz} F(z)\, dz = 0$$

Véase el problema 7.15.

7.6 EL VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY PARA INTEGRALES

Si $F(x)$ es continua en $a \leq x \leq b$, excepto en un punto x_0 tal que $a < x_0 < b$, entonces, si ϵ_1 y ϵ_2 son positivos, se define

$$\int_a^b F(x)\, dx = \lim_{\substack{\epsilon_1\to 0\\ \epsilon_2\to 0}} \left\{ \int_a^{x_0-\epsilon_1} F(x)\, dx + \int_{x_0+\epsilon_2}^{b} F(x)\, dx \right\}$$

En algunos casos este límite no existe para $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$, pero sí existe si se toma $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$. En tal caso,

$$\int_a^b F(x)\, dx = \lim_{\epsilon\to 0} \left\{ \int_a^{x_0-\epsilon} F(x)\, dx + \int_{x_0+\epsilon}^{b} F(x)\, dx \right\}$$

se conoce como *valor principal de Cauchy* de la integral de la izquierda.

EJEMPLO 7.3:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\substack{\epsilon_1\to 0\\ \epsilon_2\to 0}} \left\{ \int_{-1}^{-\epsilon_1} \frac{dx}{x^3} + \int_{\epsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^3} \right\} = \lim_{\substack{\epsilon_1\to 0\\ \epsilon_2\to 0}} \left\{ \frac{1}{2\epsilon_2^2} - \frac{1}{2\epsilon_1^2} \right\}$$

no existe, pero el valor principal de Cauchy con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ sí existe y es igual a cero.

7.7 DIFERENCIACIÓN BAJO EL SIGNO DE INTEGRACIÓN. REGLA DE LEIBNITZ

Un método útil para el cálculo de integrales es el que emplea la *regla de Leibnitz* para la diferenciación bajo el signo de integral. Esta regla sostiene que:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b F(x,\ \alpha)\, dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \alpha}\, dx$$

Esta regla es válida si a y b son constantes, α es un parámetro real tal que $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, donde α_1 y α_2 son constantes y $F(x, \alpha)$ es continua y tiene derivada parcial continua respecto a α para $a \leq x \leq b$, $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$. Esta regla se extiende a casos en que los límites a y b son infinitos o dependen de α.

www.FreeLibros.me

7.8 SUMA DE SERIES

El teorema del residuo sirve para sumar varios tipos de series. Las fórmulas siguientes son válidas con restricciones muy leves para $f(z)$, las cuales suelen satisfacerse siempre que la serie converja. Véanse los problemas 7.24, 7.32 y 7.38.

1. $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = -\{\text{suma de todos los residuos de } \pi \cot \pi z\, f(z) \text{ en todos los polos de } f(z)\}.$
2. $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\{\text{suma de todos los residuos de } \pi \csc \pi z\, f(z) \text{ en todos los polos de } f(z)\}.$
3. $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \{\text{suma de todos los residuos de } \pi \tan \pi z\, f(z) \text{ en todos los polos de } f(z)\}.$
4. $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \{\text{suma de todos los residuos de } \pi \sec \pi z\, f(z) \text{ en todos los polos de } f(z)\}.$

7.9 TEOREMA DEL DESARROLLO DE MITTAG-LEFFLER

1. Suponga que las únicas singularidades de $f(z)$ en el plano finito z son los polos simples $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dados en orden creciente de su valor absoluto.
2. Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots$ los residuos de $f(z)$ en $b_1, b_2, b_3, \ldots$.
3. Sean C_N las circunferencias de radio R_N que no pasan a través de ningún polo y sobre las cuales $|f(z)| < M$, donde M es independiente de N y $R_N \to \infty$ cuando $N \to \infty$.

Así, el teorema del desarrollo de Mittag-Leffler establece que

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right\}$$

7.10 ALGUNOS DESARROLLOS ESPECIALES

1. $\displaystyle\csc z = \frac{1}{z} - 2z\left(\frac{1}{z^2-\pi^2} - \frac{1}{z^2-4\pi^2} + \frac{1}{z^2-9\pi^2} - \cdots\right)$
2. $\displaystyle\sec z = \pi\left(\frac{1}{(\pi/2)^2-z^2} - \frac{3}{(3\pi/2)^2-z^2} + \frac{5}{(5\pi/2)^2-z^2} - \cdots\right)$
3. $\displaystyle\tan z = 2z\left(\frac{1}{(\pi/2)^2-z^2} + \frac{1}{(3\pi/2)^2-z^2} + \frac{1}{(5\pi/2)^2-z^2} + \cdots\right)$
4. $\displaystyle\cot z = \frac{1}{z} + 2z\left(\frac{1}{z^2-\pi^2} + \frac{1}{z^2-4\pi^2} + \frac{1}{z^2-9\pi^2} + \cdots\right)$
5. $\displaystyle\operatorname{csch} z = \frac{1}{z} - 2z\left(\frac{1}{z^2+\pi^2} - \frac{1}{z^2+4\pi^2} + \frac{1}{z^2+9\pi^2} - \cdots\right)$
6. $\displaystyle\operatorname{sech} z = \pi\left(\frac{1}{(\pi/2)^2+z^2} - \frac{3}{(3\pi/2)^2+z^2} + \frac{5}{(5\pi/2)^2+z^2} - \cdots\right)$
7. $\displaystyle\tanh z = 2z\left(\frac{1}{z^2+(\pi/2)^2} + \frac{1}{z^2+(3\pi/2)^2} + \frac{1}{z^2+(5\pi/2)^2} + \cdots\right)$
8. $\displaystyle\coth z = \frac{1}{z} + 2z\left(\frac{1}{z^2+\pi^2} + \frac{1}{z^2+4\pi^2} + \frac{1}{z^2+9\pi^2} + \cdots\right)$

www.FreeLibros.me

PROBLEMAS RESUELTOS

RESIDUOS Y TEOREMA DEL RESIDUO

7.1. Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C excepto en el punto a en el interior de C.

a) Demuestre que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad \text{donde } a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

es decir, $f(z)$ se desarrolla en una serie de Laurent convergente en torno a $z = a$.

b) Demuestre que

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}$$

Solución

a) Esto sigue del problema 6.25 del capítulo 6.

b) Si, en el resultado del inciso *a*) $n = -1$, se tiene

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz, \text{ es decir, } \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}$$

A a_{-1} se le conoce como *residuo* de $f(z)$ en $z = a$.

7.2. Demuestre el *teorema del residuo*. Si $f(z)$ es analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C, excepto en un número finito de puntos $a, b, c, \ldots$ en el interior de C, en los que los residuos son $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \ldots$, respectivamente, entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \cdots)$$

es decir, $2\pi i$ veces la suma de los residuos en todas las singularidades contenidas en C.

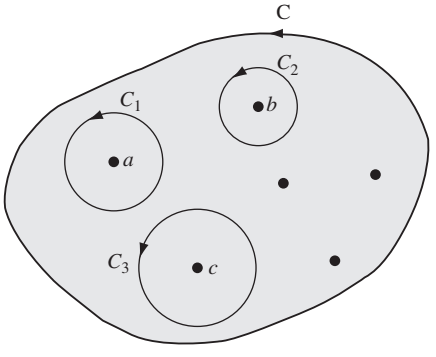


Figura 7-4

Solución

Se trazan las circunferencias $C_1, C_2, C_3, \ldots$ comprendidas en el interior de C y con centros en $a, b, c, \ldots$, respectivamente, como se muestra en la figura 7-4. Esto es posible porque $a, b, c, \ldots$ son puntos interiores. De acuerdo con el teorema 4.5 de la página 118, se tiene

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_3} f(z)\,dz + \cdots \tag{1}$$

Pero, de acuerdo con el problema 7.1,

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}, \qquad \oint_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i b_{-1}, \qquad \oint_{C_3} f(z)\,dz = 2\pi i c_{-1}, \ldots \tag{2}$$

De este modo, de (1) y (2) se obtiene, como se deseaba,

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \cdots) = 2\pi i \text{ (suma de residuos)}$$

www.FreeLibros.me

La prueba dada aquí del teorema del residuo es para regiones simplemente conexas que contengan una cantidad finita de singularidades de $f(z)$. Esta prueba se extiende a regiones con una cantidad infinita de singularidades aisladas y a regiones múltiplemente conexas (véanse los problemas 7.96 y 7.97).

7.3. Sea $f(z)$ analítica en el interior y sobre una curva simple cerrada C, excepto en un polo a de orden m en el interior de C. Demuestre que el residuo de $f(z)$ en a está dado por

$$a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}$$

Solución

Método 1. Suponga que $f(z)$ tiene un polo a de orden m. Así, la serie de Laurent de $f(z)$ es

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots \tag{1}$$

Después, al multiplicar ambos lados por $(z-a)^m$, se tiene

$$(z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + \cdots \tag{2}$$

Esto representa la serie de Taylor en torno a $z = a$ de la función analítica en el lado izquierdo de la igualdad. Se diferencian, respecto a z, ambos lados $m-1$ veces y se obtiene

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\} = (m-1)!a_{-1} + m(m-1)\cdots 2a_0(z-a) + \cdots$$

De este modo, con $z \to a$,

$$\lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\} = (m-1)!\, a_{-1}$$

de donde se obtiene el resultado buscado.

Método 2. El resultado buscado también es consecuencia directa del teorema de Taylor al observar que en el desarrollo (2) el coeficiente de $(z-a)^{m-1}$ es

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}\bigg|_{z=a}$$

Método 3. Véase el el problema 5.28 de la página 161.

7.4. Encuentre el residuo de *a*) $f(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ y *b*) $f(z) = e^z \csc^2 z$ en todos sus polos en el plano finito.

Solución

a) $f(z)$ tiene un polo doble en $z = -1$ y polos simples en $z = \pm 2i$.

Método 1. El residuo en $z = -1$ es

$$\lim_{z\to -1} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z+1)^2 \cdot \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right\} = \lim_{z\to -1} \frac{(z^2+4)(2z-2)-(z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25}$$

El residuo en $z = 2i$ es

$$\lim_{z\to 2i}\left\{(z-2i)\cdot \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)}\right\} = \frac{-4-4i}{(2i+1)^2(4i)} = \frac{7+i}{25}$$

www.FreeLibros.me

El residuo en $z = -2i$ es

$$\lim_{z\to -2i}\left\{(z+2i)\cdot\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)}\right\} = \frac{-4+4i}{(-2i+1)^2(-4i)} = \frac{7-i}{25}$$

Método 2. El residuo en $z = 2i$ es

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 2i}\left\{\frac{(z-2i)(z^2-2z)}{(z+1)^2(z^2+4)}\right\} &= \left\{\lim_{z\to 2i}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2}\right\}\left\{\lim_{z\to 2i}\frac{z-2i}{z^2+4}\right\}\\ &= \frac{-4-4i}{(2i+1)^2}\cdot\lim_{z\to 2i}\frac{1}{2z} = \frac{-4-4i}{(2i+1)^2}\cdot\frac{1}{4i} = \frac{7+i}{25}\end{aligned}$$

con la regla de L'Hôpital. De manera similar, o al sustituir i por $-i$ en el resultado, se obtiene el resultado en $z = -2i$.

b) $f(z) = e^z \csc^2 z = e^z/\operatorname{sen}^2 z$ tiene polos dobles en $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, es decir, $z = m\pi$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Método 1. El residuo en $z = m\pi$ es

$$\lim_{z\to m\pi}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z-m\pi)^2\frac{e^z}{\operatorname{sen}^2 z}\right\} = \lim_{z\to m\pi}\frac{e^z[(z-m\pi)^2\operatorname{sen} z + 2(z-m\pi)\operatorname{sen} z - 2(z-m\pi)^2\cos z]}{\operatorname{sen}^3 z}$$

Al ser $z - m\pi = u$ o $z = u + m\pi$, este límite se escribe

$$\lim_{u\to 0} e^{u+m\pi}\left\{\frac{u^2\operatorname{sen} u + 2u\operatorname{sen} u - 2u^2\cos u}{\operatorname{sen}^3 u}\right\} = e^{m\pi}\left\{\lim_{u\to 0}\frac{u^2\operatorname{sen} u + 2u\operatorname{sen} u - 2u^2\cos u}{\operatorname{sen}^3 u}\right\}$$

El límite entre corchetes se obtiene mediante la regla de L'Hôpital. Pero es más sencillo observar primero que

$$\lim_{u\to 0}\frac{u^3}{\operatorname{sen}^3 u} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{u}{\operatorname{sen} u}\right)^3 = 1$$

y así escribir este límite como

$$e^{m\pi}\lim_{u\to 0}\left(\frac{u^2\operatorname{sen} u + 2u\operatorname{sen} u - 2u^2\cos u}{u^3}\cdot\frac{u^3}{\operatorname{sen}^3 u}\right) = e^{m\pi}\lim_{u\to 0}\frac{u^2\operatorname{sen} u + 2u\operatorname{sen} u - 2u^2\cos u}{u^3} = e^{m\pi}$$

al emplear varias veces la regla de L'Hôpital. Para evaluar este límite, en lugar de esto sirven los desarrollos $\operatorname{sen} u = u - u^3/3! + \cdots$, $\cos u = 1 - u^2/2! + \cdots$.

Método 2 (con la serie de Laurent).

En este método se desarrolla $f(z) = e^z \csc^2 z$ en una serie de Laurent en torno a $z = m\pi$, en donde el coeficiente de $1/(z - m\pi)$ es el residuo buscado. Para facilitar los cálculos, sea $z = u + m\pi$. Así, la función por desarrollar en una serie de Laurent en torno a $u = 0$ es $e^{m\pi+u}\csc^2(m\pi + u) = e^{m\pi}e^u \csc^2 u$. Con los desarrollos de Maclaurin para e^u y $\operatorname{sen} u$, se encuentra, mediante la división larga,

$$\begin{aligned}e^{m\pi}e^u\csc^2 u &= \frac{e^{m\pi}\left(1+u+\dfrac{u^2}{2!}+\dfrac{u^3}{3!}+\cdots\right)}{\left(u-\dfrac{u^3}{3!}+\dfrac{u^5}{5!}-\cdots\right)^2} = \frac{e^{m\pi}\left(1+u+\dfrac{u^2}{2}+\cdots\right)}{u^2\left(1-\dfrac{u^2}{6}+\dfrac{u^4}{120}-\cdots\right)^2}\\ &= \frac{e^{m\pi}\left(1+u+\dfrac{u^2}{2!}+\cdots\right)}{u^2\left(1-\dfrac{u^2}{3}+\dfrac{2u^4}{45}+\cdots\right)} = e^{m\pi}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{6}+\frac{u}{3}+\cdots\right)\end{aligned}$$

de manera que el residuo es $e^{m\pi}$.

www.FreeLibros.me

7.5. Encuentre el residuo de $F(z) = \dfrac{\cot z \coth z}{z^3}$ en $z = 0$.

Solución

Como en el método 2 del problema 7.4*b*), se tiene,

$$F(z) = \frac{\cos z \cosh z}{z^3 \operatorname{sen} z \operatorname{senh} z} = \frac{\left(1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \cdots\right)\left(1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \cdots\right)}{z^3\left(z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \cdots\right)\left(z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \cdots\right)}$$

$$= \frac{\left(1 - \dfrac{z^4}{6} + \cdots\right)}{z^5\left(1 - \dfrac{z^4}{90} + \cdots\right)} = \frac{1}{z^5}\left(1 - \frac{7z^4}{45} + \cdots\right)$$

y, por tanto, el residuo (coeficiente de $1/z$) es $-7/45$.

Otro método. Al resultado también se llega si se halla

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{4!}\frac{d^4}{dz^4}\left\{z^5 \frac{\cos z \cosh z}{z^3 \operatorname{sen} z \operatorname{senh} z}\right\}$$

pero este método es mucho más laborioso que el anterior.

7.6. Calcule $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$ a lo largo de la circunferencia C cuya ecuación es $|z| = 3$.

Solución

El integrando $e^{zt}/\{z^2(z^2+2z+2)\}$ tiene un polo doble en $z = 0$ y dos polos simples en $z = -1 \pm i$ [raíces de $z^2 + 2z + 2 = 0$]. Todos estos polos están en el interior de C.

El residuo en $z = 0$ es

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{z^2 \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\} = \lim_{z\to 0} \frac{(z^2+2z+2)(te^{zt}) - (e^{zt})(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2} = \frac{t-1}{2}$$

El residuo en $z = -1 + i$ es

$$\lim_{z\to -1+i}\left\{[z-(-1+i)]\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\} = \lim_{z\to -1+i}\left\{\frac{e^{zt}}{z^2}\right\}\lim_{z\to -1+i}\left\{\frac{z+1-i}{z^2+2z+2}\right\}$$

$$= \frac{e^{(-1+i)t}}{(-1+i)^2}\cdot\frac{1}{2i} = \frac{e^{(-1+i)t}}{4}$$

El residuo en $z = -1 - i$ es

$$\lim_{z\to -1-i}\left\{[z-(-1-i)]\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\} = \frac{e^{(-1-i)t}}{4}$$

De este modo, de acuerdo con el teorema del residuo,

$$\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz = 2\pi i \text{ (suma de residuos)} = 2\pi i\left\{\frac{t-1}{2} + \frac{e^{(-1+i)t}}{4} + \frac{e^{(-1-i)t}}{4}\right\}$$

$$= 2\pi i\left\{\frac{t-1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\cos t\right\}$$

www.FreeLibros.me

es decir,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz = \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\cos t$$

INTEGRALES DEFINIDAS DEL TIPO $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx$

7.7. Sea $|F(z)| \le M/R^k$ para $z = Re^{i\theta}$, donde $k > 1$ y M son constantes. Demuestre que $\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma F(z)\,dz = 0$, donde Γ es el arco semicircular de radio R de la figura 7-5.

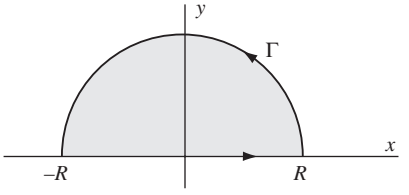


Figura 7-5

Solución

De acuerdo con la propiedad *e*) de la página 112, se tiene

$$\left|\int_\Gamma F(z)\,dz\right| \le \frac{M}{R^k}\cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

pues la longitud del arco $L = \pi R$. De este modo,

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma F(z)\,dz\right| = 0 \text{ y por ende } \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma F(z)\,dz = 0$$

7.8. Demuestre que para $z = Re^{i\theta}$, $|f(z)| \le M/R^k$ $k > 1$ si $f(z) = 1/(z^6+1)$.

Solución

Suponga que $z = Re^{i\theta}$. Entonces,

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{R^6e^{6i\theta}+1}\right| \le \frac{1}{|R^6e^{6i\theta}|-1} = \frac{1}{R^6-1} \le \frac{2}{R^6}$$

donde R es suficientemente grande ($R > 2$, por ejemplo), de manera que $M = 2$, $k = 6$.

Observe que se empleó la desigualdad $|z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|$ con $z_1 = R^6e^{6i\theta}$ y $z_2 = 1$.

7.9. Calcule $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$.

Solución

Considere $\oint_C dz/(z^6+1)$, donde C es el contorno cerrado de la figura 7-5, que consta de la recta de $-R$ a R y del semicírculo Γ, recorrido en sentido positivo (en sentido contrario a las manecillas del reloj).

Como $z^6 + 1 = 0$ cuando $z = e^{\pi i/6}, e^{3\pi i/6}, e^{5\pi i/6}, e^{7\pi i/6}, e^{9\pi i/6}, e^{11\pi i/6}$, estos son polos simples de $1/(z^6+1)$. Sólo los polos $e^{\pi i/6}$, $e^{3\pi i/6}$ y $e^{5\pi i/6}$ están dentro de C. Así, con la regla de L'Hôpital,

$$\text{Residuo en } e^{\pi i/6} = \lim_{z\to e^{\pi i/6}}\left\{(z-e^{\pi i/6})\frac{1}{z^6+1}\right\} = \lim_{z\to e^{\pi i/6}}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-5\pi i/6}$$

$$\text{Residuo en } e^{3\pi i/6} = \lim_{z\to e^{3\pi i/6}}\left\{(z-e^{3\pi i/6})\frac{1}{z^6+1}\right\} = \lim_{z\to e^{3\pi i/6}}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-5\pi i/2}$$

$$\text{Residuo en } e^{5\pi i/6} = \lim_{z\to e^{5\pi i/6}}\left\{(z-e^{5\pi i/6})\frac{1}{z^6+1}\right\} = \lim_{z\to e^{5\pi i/6}}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-25\pi i/6}$$

www.FreeLibros.me

Por tanto,

$$\oint_C \frac{dz}{z^6+1} = 2\pi i\left\{\frac{1}{6}e^{-5\pi i/6} + \frac{1}{6}e^{-5\pi i/2} + \frac{1}{6}e^{-25\pi i/6}\right\} = \frac{2\pi}{3}$$

es decir,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^6+1} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^6+1} = \frac{2\pi}{3} \tag{1}$$

Se toma en ambos lados de (1) el límite cuando $R \to \infty$ y, con los problemas 7.7 y 7.8, se tiene

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^6+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2\pi}{3} \tag{2}$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$$

la integral buscada tiene el valor $\pi/3$.

7.10. Demuestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}$.

Solución

Los polos de $z^2/(z^2+1)^2(z^2+2z+2)$ contenidos en el contorno C de la figura 7-5 son $z = i$ de orden 2 y $z = -1+i$ de orden 1.

El residuo en $z = i$ es

$$\lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2 \frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+2z+2)}\right\} = \frac{9i-12}{100}$$

El residuo en $z = -1+i$ es

$$\lim_{z\to -1+i} (z+1-i)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1-i)(z+1+i)} = \frac{3-4i}{25}$$

De este modo,

$$\oint_C \frac{z^2\, dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = 2\pi i\left\{\frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25}\right\} = \frac{7\pi}{50}$$

o

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} + \int_{\Gamma} \frac{z^2\, dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = \frac{7\pi}{50}$$

Se toma el límite cuando $R \to \infty$ y, al observar que, de acuerdo con el problema 7.7, la segunda integral tiende a cero, se llega al resultado buscado.

www.FreeLibros.me

INTEGRALES DEFINIDAS DEL TIPO $\int_0^{2\pi} G(\text{sen}\,\theta, \cos\theta)\,d\theta$

7.11. Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \text{sen}\,\theta}$.

Solución

Sea $z = e^{i\theta}$. Así, $\text{sen}\,\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i = (z - z^{-1})/2i$, $\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2 = (z + z^{-1})/2$, $dz = iz\,d\theta$, de manera que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \text{sen}\,\theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{3 - 2(z + z^{-1})/2 + (z - z^{-1})/2i} = \oint_C \frac{2\,dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

donde C es la circunferencia de radio unitario y centro en el origen (figura 7-6).

Los polos de $2/\{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i\}$ son los polos simples

$$z = \frac{-6i \pm \sqrt{(6i)^2 - 4(1 - 2i)(-1 - 2i)}}{2(1 - 2i)}$$
$$= \frac{-6i \pm 4i}{2(1 - 2i)} = 2 - i,\ (2 - i)/5$$

Sólo $(2 - i)/5$ está en el interior de C.

El residuo en

$$(2 - i)/5 = \lim_{z \to (2-i)/5} \{z - (2 - i)/5\} \left\{ \frac{2}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} \right\}$$
$$= \lim_{z \to (2-i)/5} \frac{2}{2(1 - 2i)z + 6i} = \frac{1}{2i}$$

de acuerdo con la regla de L'Hôpital.

De este modo,

$$\oint_C \frac{2\,dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} = 2\pi i \left(\frac{1}{2i}\right) = \pi,$$

el valor buscado.

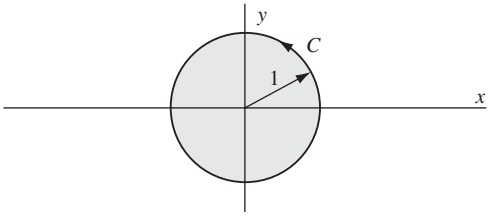


Figura 7-6

7.12. Con $a > |b|$, muestre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\,\text{sen}\,\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

Solución

Sea $z = e^{i\theta}$. Así, $\text{sen}\,\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i = (z - z^{-1})/2i$, $\quad dz = ie^{i\theta}\,d\theta = iz\,d\theta$, de manera que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\,\text{sen}\,\theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{a + b(z - z^{-1})/2i} = \oint_C \frac{2\,dz}{bz^2 + 2aiz - b}$$

donde C es la circunferencia de radio unitario con centro en el origen, como se muestra en la figura 7-6.

Los polos de $2/(bz^2 + 2aiz - b)$ se obtienen al resolver $bz^2 + 2aiz - b = 0$ y están dados por

$$z = \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2 + 4b^2}}{2b} = \frac{-ai \pm \sqrt{a^2 - b^2}\,i}{b}$$
$$= \left\{ \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right\} i,\ \left\{ \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right\} i$$

www.FreeLibros.me

Sólo $\left\{\left(-a+\sqrt{a^2-b^2}\right)/b\right\}i$ está en el interior de C, pues

$$\left|\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}i\right| = \left|\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}\cdot\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{\sqrt{a^2-b^2}+a}\right| = \left|\frac{b}{(\sqrt{a^2-b^2}+a)}\right| < 1$$

cuando $a > |b|$.

El residuo en

$$z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}i = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{2}{bz^2+2aiz-b}$$
$$= \lim_{z\to z_1}\frac{2}{2bz+2ai} = \frac{1}{bz_1+ai} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}i}$$

de acuerdo con la regla de L'Hôpital.

Así,

$$\oint_C \frac{2\,dz}{bz^2+2aiz-b} = 2\pi i\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}i}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

el valor buscado.

7.13. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{12}$.

Solución

Sea $z = e^{i\theta}$. De este modo, $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$, $\cos 3\theta = (e^{3i\theta}+e^{-3i\theta})/2 = (z^3+z^{-3})/2$, $dz = iz\,d\theta$, de manera que

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta = \oint_C \frac{(z^3+z^{-3})/2}{5-4(z+z^{-1})/2}\frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i}\oint_C\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz$$

donde C es el contorno de la figura 7-6.

El integrando tiene un polo de orden 3 en $z=0$ y un polo simple $z=\frac{1}{2}$ en el interior de C.

El residuo en $z=0$ es

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{z^3\cdot\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right\} = \frac{21}{8}$$

El residuo en $z=\frac{1}{2}$ es

$$\lim_{z\to 1/2}\left\{\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right\} = -\frac{65}{24}$$

De esta forma,

$$-\frac{1}{2i}\oint_C\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz = -\frac{1}{2i}(2\pi i)\left\{\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right\} = \frac{\pi}{12}$$ como se buscaba.

7.14. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-3\,\text{sen}\,\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$.

Solución

Con $z = e^{i\theta}$ se tiene $\text{sen}\,\theta = (z-z^{-1})/2i$, $dz = ie^{i\theta}\,d\theta = iz\,d\theta$ y, por tanto,

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-3\,\text{sen}\,\theta)^2} = \oint_C\frac{dz/iz}{\{5-3(z-z^{-1})/2i\}^2} = -\frac{4}{i}\oint_C\frac{z\,dz}{(3z^2-10iz-3)^2}$$

donde C es el contorno de la figura 7-6.

www.FreeLibros.me

El integrando tiene polos de orden 2 en $z = \left(10i \pm \sqrt{-100+36}\right)/6 = (10i \pm 8i)/6 = 3i,\ i/3$. Sólo el polo $i/3$ está en el interior de C.

El residuo en

$$z = i/3 = \lim_{z\to i/3} \frac{d}{dz}\left\{(z-i/3)^2 \cdot \frac{z}{(3z^2-10iz-3)^2}\right\}$$
$$= \lim_{z\to i/3} \frac{d}{dz}\left\{(z-i/3)^2 \cdot \frac{z}{(3z-i)^2(z-3i)^2}\right\} = -\frac{5}{256}$$

Así,

$$-\frac{4}{i}\oint_C \frac{z\,dz}{(3z^2-10iz-3)^2} = -\frac{4}{i}(2\pi i)\left(\frac{-5}{256}\right) = \frac{5\pi}{32}$$

Otro método. De acuerdo con el problema 7.12, para $a > |b|$ se tiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\,\text{sen}\,\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

De este modo, al diferenciar ambos lados respecto a a (considérese b constante) y con la regla de Leibnitz, se tiene

$$\frac{d}{da}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\,\text{sen}\,\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a+b\,\text{sen}\,\theta}\right)d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\,\text{sen}\,\theta)^2}$$
$$= \frac{d}{da}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) = \frac{-2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

es decir

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\,\text{sen}\,\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

Con $a = 5$ y $b = -3$, se tiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\,\text{sen}\,\theta)^2} = \frac{2\pi(5)}{(5^2-3^2)^{3/2}} = \frac{5\pi}{32}$$

INTEGRALES DEFINIDAS DEL TIPO $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \text{sen}\,mx\end{Bmatrix} dx$

7.15. Sea $|F(z)| \le M/R^k$ para $z = Re^{i\theta}$, donde $k > 0$ y M son constantes. Demuestre que

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma e^{imz}F(z)\,dz = 0$$

donde Γ es el arco semicircular de la figura 7-5 y m es una constante positiva.

www.FreeLibros.me

Solución

Sea $z = Re^{i\theta}$. Así, $\int_\Gamma e^{imz}F(z)\,dz = \int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}}F(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}\,d\theta$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}}F(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}\,d\theta\right| &\le \int_0^\pi |e^{imRe^{i\theta}}F(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}|\,d\theta \\
&= \int_0^\pi |e^{imR\cos\theta - mR\,\mathrm{sen}\,\theta}F(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}|\,d\theta \\
&= \int_0^\pi e^{-mR\,\mathrm{sen}\,\theta}|F(Re^{i\theta})|R\,d\theta \\
&\le \frac{M}{R^{k-1}}\int_0^\pi e^{-mR\,\mathrm{sen}\,\theta}d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-mR\,\mathrm{sen}\,\theta}d\theta
\end{aligned}$$

Ahora, $\mathrm{sen}\,\theta \ge 2\theta/\pi$ para $0 \le \theta \le \pi/2$, como se ve de manera geométrica en la figura 7-7, o, de manera analítica, por el problema 7.99.

Así, la última integral es menor o igual a

$$\frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi}d\theta = \frac{\pi M}{mR^k}\left(1 - e^{-mR}\right)$$

Cuando $R \to \infty$, esto tiende a cero, pues m y k son positivos, con lo que se demuestra el resultado deseado.

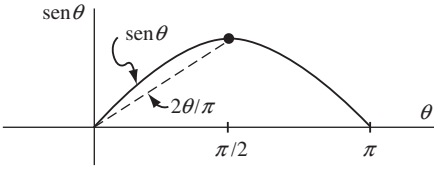


Figura 7-7

7.16. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-m}$, $m > 0$.

Solución

Considere $\oint_C \{e^{imz}/(z^2+1)\}\,dz$, donde C es el contorno de la figura 7-5. El integrando tiene polos simples en $z = \pm i$, pero sólo $z = i$ está en el interior de C.

El residuo en $z = i$ es

$$\lim_{z\to i}\left\{(z-i)\frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}\right\} = \frac{e^{-m}}{2i}$$

De este modo,

$$\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-m}}{2i}\right) = \pi e^{-m}$$

o

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{imz}}{x^2+1}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = \pi e^{-m}$$

www.FreeLibros.me

es decir,

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen} mx}{x^2+1}\,dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = \pi e^{-m}$$

y por ende

$$2\int_{0}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = \pi e^{-m}$$

Se toma el límite cuando $R \to \infty$ y, al mostrar con el problema 7.15 que la integral a lo largo de Γ tiende a cero, se obtiene el resultado buscado.

7.17. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2+2x+5}\,dx.$

Solución

Considere $\oint_C \{ze^{i\pi z}/(z^2+2z+5)\}\,dz$, donde C es el contorno en la figura 7-5. El integrando tiene polos simples en $z = -1 \pm 2i$, pero sólo $z = -1+2i$ está en el interior de C.

El residuo en $z = -1+2i$ es

$$\lim_{z\to -1+2i}\left\{(z+1-2i)\cdot\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}\right\} = (-1+2i)\frac{e^{-i\pi-2\pi}}{4i}$$

Así,

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz = 2\pi i(-1+2i)\left(\frac{e^{-i\pi-2\pi}}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi}$$

o

$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{i\pi x}}{x^2+2x+5}dx + \int_{\Gamma} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz = \frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi}$$

es decir,

$$\int_{-R}^{R} \frac{x\cos \pi x}{x^2+2x+5}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2+2x+5}dx + \int_{\Gamma} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz = \frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi}$$

Se toma el límite cuando $R \to \infty$ y, al mostrar con el problema 7.15 que la integral a lo largo de Γ tiende a cero, esto se convierte en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x}{x^2+2x+5}dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2+2x+5}dx = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi} - i\pi e^{-2\pi}$$

Se igualan las partes reales y las imaginarias,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x}{x^2+2x+5}dx = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2+2x+5}dx = -\pi e^{-2\pi}$$

Por tanto, se obtuvo el valor de una integral más, además de la buscada.

www.FreeLibros.me

INTEGRALES DEFINIDAS DIVERSAS

7.18. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Solución

El método del problema 7.16 lleva a considerar la integral de e^{iz}/z a lo largo del contorno de la figura 7-5. Pero como $z = 0$ está en la trayectoria de integración y no puede integrarse a través de una singularidad, se modifica este contorno evitando $z = 0$, como se muestra en la figura 7-8; el nuevo contorno es el contorno C', que es *ABDEFGHJA*.

Como $z = 0$ está en el exterior de C', se tiene

$$\oint_{C'} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

o

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

Se sustituye x por $-x$ en la primera integral y se combina con la tercera integral, para obtener

$$\int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

o

$$2i\int_{\epsilon}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = -\int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

Si $\epsilon \to 0$ y $R \to \infty$, de acuerdo con el problema 7.15, la segunda integral de la derecha tiende a cero. Si $z = \epsilon e^{i\theta}$ en la primera integral de la derecha, se ve que ésta tiende a

$$-\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\epsilon e^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}}\, i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{0} i e^{i\epsilon e^{i\theta}}\,d\theta = \pi i$$

porque el límite puede tomarse bajo el signo de integral.

Así, se tiene

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} 2i\int_{\epsilon}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi i \qquad \text{o} \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

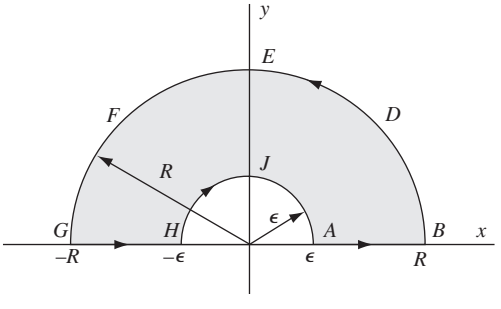


Figura 7-8

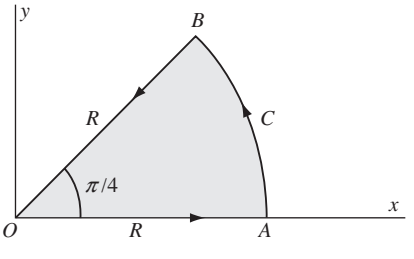


Figura 7-9

www.FreeLibros.me

7.19. Demuestre que

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Solución

Sea C el contorno que se indica en la figura 7-9, donde AB es el arco de un círculo con centro en O y radio R. De acuerdo con el teorema de Cauchy,

$$\oint_C e^{iz^2} dz = 0$$

o

$$\int_{OA} e^{iz^2} dz + \int_{AB} e^{iz^2} dz + \int_{BO} e^{iz^2} dz = 0 \tag{1}$$

Ahora, sobre OA, $z = x$ (desde $x = 0$ hasta $x = R$); sobre AB, $z = Re^{i\theta}$ (desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi/4$); sobre BO, $z = re^{\pi i/4}$ (desde $r = R$ hasta $r = 0$). Por tanto, de acuerdo con (1),

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}\, d\theta + \int_R^0 e^{ir^2 e^{\pi i/2}} e^{\pi i/4}\, dr = 0 \tag{2}$$

es decir,

$$\int_0^R (\cos x^2 + i \operatorname{sen} x^2)\, dx = e^{\pi i/4} \int_0^R e^{-r^2} dr - \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \operatorname{sen} 2\theta} iRe^{i\theta}\, d\theta \tag{3}$$

Ahora se considera el límite de (3) cuando $R \to \infty$. La primera integral de la derecha se convierte en [véase el problema 10.14]

$$e^{\pi i/4} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pi i/4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{4}$$

El valor absoluto de la segunda integral de la derecha en (3) es

$$\left| \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \operatorname{sen} 2\theta} iRe^{i\theta} d\theta \right| \le \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \operatorname{sen} 2\theta} R\, d\theta = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \operatorname{sen} \phi} d\phi$$

$$\le \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-2R^2 \phi/\pi}\, d\phi = \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2})$$

donde se empleó la transformación $2\theta = \phi$ y la desigualdad $\operatorname{sen} \phi \ge 2\phi/\pi$, $0 \le \phi \le \pi/2$ (véase el problema 7.15). Esto muestra que cuando $R \to \infty$, la segunda integral de la derecha en (3) tiende a cero. Así, (3) se convierte en

$$\int_0^\infty (\cos x^2 + i \operatorname{sen} x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

y por ende, al igualar las partes reales y las imaginarias, se tiene, como se buscaba,

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

www.FreeLibros.me

7.20. Muestre que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$, $0 < p < 1$.

Solución

Considere $\oint_C (z^{p-1}/1+z)dz$. Como $z = 0$ es un punto de ramificación, se elige C como el contorno en la figura 7-10, donde el eje x real positivo es la recta de ramificación y donde AB y GH en realidad coinciden con el eje x, pero se muestran separadas para facilitar la explicación.

El integrando tiene el polo simple $z = -1$ en el interior de C.

El residuo en $z = -1 = e^{\pi i}$ es

$$\lim_{z\to -1} (z+1)\frac{z^{p-1}}{1+z} = (e^{\pi i})^{p-1} = e^{(p-1)\pi i}$$

De este modo,

$$\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = 2\pi i e^{(p-i)\pi i}$$

o, al omitir el integrando,

$$\int_{AB} + \int_{BDEFG} + \int_{GH} + \int_{HJA} = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

Por tanto, se tiene

$$\int_\epsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x}dx + \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1} iRe^{i\theta}\,d\theta}{1+Re^{i\theta}} + \int_R^\epsilon \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(\epsilon e^{i\theta})^{p-1} i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta}{1+\epsilon e^{i\theta}} = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

donde para la integral a lo largo de GH se usó $z = xe^{2\pi i}$, pues el argumento de z aumenta 2π al recorrer el círculo $BDEFG$.

Se toma el límite cuando $\epsilon \to 0$ y $R \to \infty$ y, al observar que la segunda y la cuarta integrales tienden a cero, se tiene

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx + \int_\infty^0 \frac{e^{2\pi i(p-1)}x^{p-1}}{1+x}dx = 2\pi e^{(p-1)\pi i}$$

o

$$(1 - e^{2\pi i(p-1)})\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

de manera que

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{2\pi i e^{(p-1)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$$

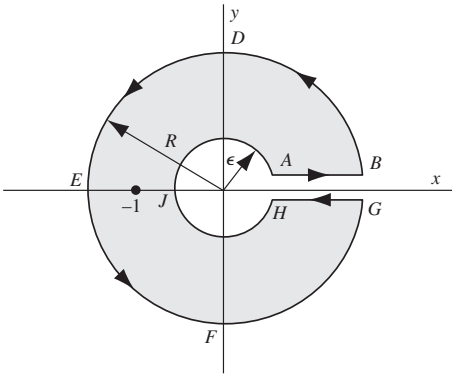


Figura 7-10

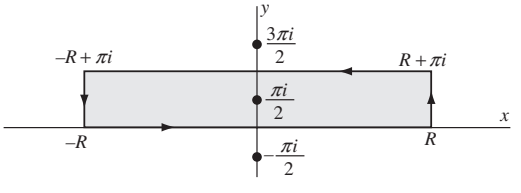


Figura 7-11

www.FreeLibros.me

7.21. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cosh ax}{\cosh x}\,dx = \frac{\pi}{2\cos(\pi a/2)}$, donde $|a| < 1$.

Solución

Considere $\oint_C (e^{az}/\cosh z)\,dz$, donde C es un rectángulo que tiene sus vértices en $-R$, R, $R+\pi i$, $-R+\pi i$ (véase la figura 7-11).

Los polos de $e^{az}/\cosh z$ son simples y se encuentran donde $\cosh z = 0$, es decir, $z = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. El único polo comprendido en C es $\pi i/2$.

El residuo de $e^{az}/\cosh z$ en $z = \pi i/2$ es

$$\lim_{z\to \pi i/2} (z-\pi i/2)\frac{e^{az}}{\cosh z} = \frac{e^{a\pi i/2}}{\operatorname{senh}(\pi i/2)} = \frac{e^{a\pi i/2}}{i\operatorname{sen}(\pi/2)} = -ie^{a\pi i/2}$$

Así, de acuerdo con el teorema del residuo,

$$\oint_C \frac{e^{az}}{\cosh z}\,dz = 2\pi i(-ie^{a\pi i/2}) = 2\pi e^{a\pi i/2}$$

Esto se escribe

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\,dx + \int_0^\pi \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}\,i\,dy + \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+\pi i)}}{\cosh(x+\pi i)}\,dx + \int_\pi^0 \frac{e^{a(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)}\,i\,dy = 2\pi e^{a\pi i/2} \tag{1}$$

Cuando $R\to\infty$, las integrales segunda y cuarta del lado izquierdo tienden a cero. Para mostrar esto, considere la segunda integral. Como

$$|\cosh(R+iy)| = \left|\frac{e^{R+iy}+e^{-R-iy}}{2}\right| \ge \frac{1}{2}\{|e^{R+iy}| - |e^{-R-iy}|\} = \frac{1}{2}(e^R - e^{-R}) \ge \frac{1}{4}e^R$$

se tiene

$$\left|\int_0^\pi \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}\,i\,dy\right| \le \int_0^\pi \frac{e^{aR}}{e^{R/4}}\,dy = 4\pi e^{(a-1)R}$$

y el resultado sigue al observar que el lado derecho tiende a cero cuando $R\to\infty$ porque $|a|<1$. De manera similar, se muestra que en (1) la cuarta integral de la izquierda tiende a cero cuando $R\to\infty$. Por tanto, (1) se convierte en

$$\lim_{R\to\infty}\left\{\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\,dx + e^{a\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\,dx\right\} = 2\pi e^{a\pi i/2}$$

porque $\cosh(x+\pi i) = -\cosh x$. Así,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\,dx = \frac{2\pi e^{a\pi i/2}}{1+e^{a\pi i}} = \frac{2\pi}{e^{a\pi i/2}+e^{-a\pi i/2}} = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}$$

www.FreeLibros.me

Ahora

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax}}{\cosh x}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x}dx = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}$$

De este modo, al sustituir x por $-x$ en la primera integral, se tiene

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\cosh x}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x}dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x}dx = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}$$

de donde se llega al resultado buscado.

7.22. Demuestre que $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx = \pi \ln 2.$

Solución

Considere $\oint_C \{\ln(z+i)/z^2+1\}\, dz$ a lo largo del contorno C que consta del eje real desde $-R$ hasta R y el semicírculo Γ de radio R (véase la figura 7-12)

El único polo de $\ln(z+i)/(z^2+1)$ en el interior de C es el polo simple $z = i$, y el residuo es

$$\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\ln(z+i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{\ln(2i)}{2i}$$

Por tanto, de acuerdo con el teorema del residuo,

$$\oint_C \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}dz = 2\pi i\left\{\frac{\ln(2i)}{2i}\right\} = \pi\ln(2i) = \pi\ln 2 + \frac{1}{2}\pi^2 i \tag{1}$$

al escribir $\ln(2i) = \ln 2 + \ln i = \ln 2 + \ln e^{\pi i/2} = \ln 2 + \pi i/2$ con los valores principales del logaritmo. El resultado se escribe

$$\int_{-R}^{R} \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}dx + \int_{\Gamma} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}dz = \pi\ln 2 + \frac{1}{2}\pi^2 i$$

o

$$\int_{-R}^{0} \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}dx + \int_{0}^{R} \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}dx + \int_{\Gamma} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}dz = \pi\ln 2 + \frac{1}{2}\pi^2 i$$

Se sustituye x por $-x$ en la primera integral y esto se escribe

$$\int_{0}^{R} \frac{\ln(i-x)}{x^2+1}dx + \int_{0}^{R} \frac{\ln(i+x)}{x^2+1}dx + \int_{\Gamma} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}dz = \pi\ln 2 + \frac{1}{2}\pi^2 i$$

o, como $\ln(i-x) + \ln(i+x) = \ln(i^2 - x^2) = \ln(x^2+1) + \pi i$,

$$\int_{0}^{R} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx + \int_{0}^{R} \frac{\pi i}{x^2+1}dx + \int_{\Gamma} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}dz = \pi\ln 2 + \frac{1}{2}\pi^2 i \tag{2}$$

www.FreeLibros.me

Cuando $R \to \infty$, puede mostrarse que la integral a lo largo de Γ tiende a cero (véase el problema 7.101). Por tanto, al tomar las partes reales, se encuentra que, como se buscaba,

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx = \int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx = \pi \ln 2$$

7.23. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x\,dx = -\frac{1}{2}\pi \ln 2.$

Solución

Con $x = \tan\theta$ en el resultado del problema 7.22, se encuentra

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\tan^2\theta+1)}{\tan^2\theta+1}\sec^2\theta\,d\theta = -2\int_0^{\pi/2} \ln\cos\theta\,d\theta = \pi\ln 2$$

de donde

$$\int_0^{\pi/2} \ln\cos\theta\,d\theta = -\frac{1}{2}\pi\ln 2 \tag{1}$$

que establece una parte del resultado buscado. Sea $\theta = \pi/2 - \phi$ en (1) y se encuentra

$$\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen}\phi\,d\phi = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$$

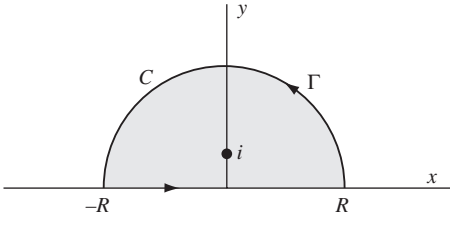


Figura 7-12

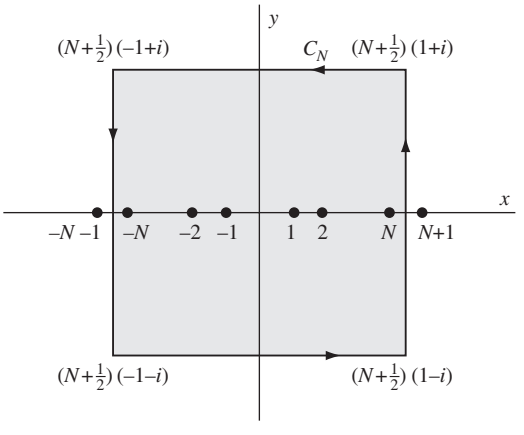


Figura 7-13

SUMA DE SERIES

7.24. Sea C_N un cuadrado con vértices en

$$\left(N+\frac{1}{2}\right)(1+i), \quad \left(N+\frac{1}{2}\right)(-1+i), \quad \left(N+\frac{1}{2}\right)(-1-i), \quad \left(N+\frac{1}{2}\right)(1-i)$$

como en la figura 7-13. Demuestre que sobre C_N, $|\cot \pi z| < A$, donde A es una constante.

www.FreeLibros.me

Solución

Se consideran las partes de C_N que están en las regiones $y > \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$ y $y < -\frac{1}{2}$.

Caso 1: $y > \frac{1}{2}$. En este caso, si $z = x + iy$,

$$|\cot \pi z| = \left|\frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}\right| = \left|\frac{e^{\pi ix-\pi y} + e^{-\pi ix+\pi y}}{e^{\pi ix-\pi y} - e^{-\pi ix+\pi y}}\right|$$

$$\le \frac{|e^{\pi ix-\pi y}| + |e^{-\pi ix+\pi y}|}{|e^{-\pi ix+\pi y}| - |e^{\pi ix-\pi y}|} = \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \le \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = A_1$$

Caso 2: $y < -\frac{1}{2}$. Aquí, como en el caso 1,

$$|\cot \pi z| \le \frac{|e^{\pi ix-\pi y}| + |e^{-\pi ix+\pi y}|}{|e^{\pi ix-\pi y}| - |e^{-\pi ix+\pi y}|} = \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} = \frac{1 + e^{2\pi y}}{1 - e^{2\pi y}} \le \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = A_1$$

Caso 3: $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$. Considérese $z = N + \frac{1}{2} + iy$. Así,

$$|\cot \pi z| = |\cot \pi(N + \tfrac{1}{2} + iy)| = |\cot(\pi/2 + \pi iy)| = |\tanh \pi y| \le \tanh(\pi/2) = A_2$$

Si $z = -N - \frac{1}{2} + iy$, se tiene, de manera similar,

$$|\cot \pi z| = |\cot \pi(-N - \tfrac{1}{2} + iy)| = |\tanh \pi y| \le \tanh(\pi/2) = A_2$$

Por tanto, si se elige A como un número mayor que el mayor de A_1 y A_2, se tiene $|\cot \pi z| < A$ sobre C_N, donde A es independiente de N. Es interesante observar que, en realidad, se tiene $|\cot \pi z| \le A_1 = \coth(\pi/2)$, pues $A_2 < A_1$.

7.25. Sea $f(z)$ tal que a lo largo de la trayectoria C_N de la figura 7-13, $|f(z)| \le M/|z|^k$, donde $k > 1$ y M son constantes independientes de N. Demuestre que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = -\{\text{suma de los residuos de } \pi \cot \pi z f(z) \text{ en los polos de } f(z)\}$$

Solución

Caso 1: $f(z)$ tiene una cantidad finita de polos.

En este caso, N puede elegirse lo bastante grande para que la trayectoria C_N de la figura 7-13 comprenda todos los polos de $f(z)$. Los polos de $\cot \pi z$ son polos simples y se presentan en $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

El residuo de $\pi \cot \pi z f(z)$ en $z = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, es

$$\lim_{z \to n} (z - n)\pi \cot \pi z f(z) = \lim_{z \to n} \pi\left(\frac{z - n}{\operatorname{sen} \pi z}\right) \cos \pi z f(z) = f(n)$$

con la regla de L'Hôpital. Aquí se supuso que $f(z)$ no tiene polos en $z = n$, pues, de ser así, la serie dada divergiría.

De acuerdo con el teorema del residuo,

$$\oint_{C_N} \pi \cot \pi z f(z)\, dz = \sum_{n=-N}^{N} f(n) + S \tag{1}$$

donde S es la suma de los residuos de $\pi \cot \pi z f(z)$ en los polos de $f(z)$. De acuerdo con el problema 7.24 y con el supuesto para $f(z)$, se tiene

$$\left|\oint_{C_N} \pi \cot \pi z f(z)\, dz\right| \le \frac{\pi A M}{N^k}(8N + 4)$$

www.FreeLibros.me

pues la longitud de la trayectoria C_N es $8N + 4$. Así, al tomar el límite cuando $N \to \infty$, se ve que

$$\lim_{N\to\infty} \oint_{C_N} \pi \cot \pi z f(z)\, dz = 0 \tag{2}$$

Por tanto, de acuerdo con (1), se tiene, como se buscaba,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = -S \tag{3}$$

Caso 2: $f(z)$ tiene una cantidad infinita de polos.

Si $f(z)$ tiene una cantidad infinita de polos, el resultado buscado se obtiene mediante un procedimiento adecuado de límite. Véase el problema 7.103.

7.26. Demuestre que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a$, donde $a > 0$.

Solución

Sea $f(z) = 1/(z^2 + a^2)$, la cual tiene polos simples en $z = \pm ai$.

El residuo de $\pi \cot \pi z/(z^2 + a^2)$ en $z = ai$ es

$$\lim_{z\to ai} (z - ai) \frac{\pi \cot \pi z}{(z - ai)(z + ai)} = \frac{\pi \cot \pi ai}{2ai} = -\frac{\pi}{2a} \coth \pi a$$

De manera similar, el residuo en $z = -ai$ es $(-\pi/2a) \coth \pi a$, y la suma de los residuos es $-(\pi/a) \coth \pi a$. Así, de acuerdo con el problema 7.25,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\,(\text{suma de residuos}) = \frac{\pi}{a} \coth \pi a$$

7.27. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth \pi a - \frac{1}{2a^2}$, donde $a > 0$.

Solución

El resultado del problema 7.26 se escribe en la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a$$

o

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a$$

de donde se obtiene el resultado buscado.

www.FreeLibros.me

7.28. Demuestre que $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$.

Solución

Se tiene

$$F(z)=\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}=\frac{\pi\cos\pi z}{z^2\operatorname{sen}\pi z}=\frac{\left(1-\dfrac{\pi^2z^2}{2!}+\dfrac{\pi^4z^4}{4!}-\cdots\right)}{z^3\left(1-\dfrac{\pi^2z^2}{3!}+\dfrac{\pi^4z^4}{5!}-\cdots\right)}$$

$$=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{\pi^2z^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{\pi^2z^2}{3!}+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{\pi^2z^2}{3}+\cdots\right)$$

de manera que el residuo en $z=0$ es $-\pi^{2/3}$.

De este modo, como en los problemas 7.26 y 7.27,

$$\oint_{C_N}\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\,dz=\sum_{n=-N}^{-1}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{3}=2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{3}$$

Se toma el límite cuando $N\to\infty$ y se tiene, debido a que el lado izquierdo tiende a cero,

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{3}=0\quad\text{o}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Otro método. En el resultado del problema 7.27, se toma el límite cuando $a\to 0$. Así, con la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{a\to 0}\frac{\pi a\coth\pi a-1}{2a^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

7.29. Suponga que $f(z)$ satisface las condiciones dadas para el problema 7.25. Verifique que

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^nf(n)=-\{\text{suma de los residuos de }\pi\csc\pi z\,f(z)\text{ en los polos de }f(z)\}$$

Solución

Se procede de manera similar a la del problema 7.25. Los polos de $\csc\pi z$ son simples y se encuentran en $z=0$, $\pm1,\pm2,\ldots$.

El residuo de $\pi\csc\pi z\,f(z)$ en $z=n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ es

$$\lim_{z\to n}(z-n)\pi\csc\pi z\,f(z)=\lim_{z\to n}\pi\left(\frac{z-n}{\operatorname{sen}\pi z}\right)f(z)=(-1)^nf(n)$$

De acuerdo con el teorema del residuo,

$$\oint_{C_N}\pi\csc\pi z\,f(z)\,dz=\sum_{n=-N}^{N}(-1)^nf(n)+S \tag{1}$$

donde S es la suma de los residuos de $\pi\csc\pi z\,f(z)$ en los polos de $f(z)$.

www.FreeLibros.me

Con $N \to \infty$, la integral del lado derecho de (1) tiende a cero (problema 7.106), de manera que, como se buscaba, (1) se convierte en

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -S \tag{2}$$

7.30. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$, donde a es real y diferente de $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Solución

Sea $f(z) = 1/(z+a)^2$, función que tiene un polo doble en $z = -a$.

El residuo de $\pi \csc \pi z/(z+a)^2$ en $z = -a$ es

$$\lim_{z \to -a} \frac{d}{dz}\left\{(z+a)^2 \cdot \frac{\pi \csc \pi z}{(z+a)^2}\right\} = -\pi^2 \csc \pi a \cot \pi a$$

Así, de acuerdo con el problema 7.29,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = -\,(\text{suma de residuos}) = \pi^2 \csc \pi a \cot \pi a = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$$

7.31. Suponga que $a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Demuestre que

$$\frac{a^2+1}{(a^2-1)^2} - \frac{a^2+4}{(a^2-4)^2} + \frac{a^2+9}{(a^2-9)^2} - \cdots = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi^2 \cos \pi a}{2 \operatorname{sen}^2 \pi a}$$

Solución

El resultado del problema 7.30 se escribe en la forma

$$\frac{1}{a^2} - \left\{\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a-1)^2}\right\} + \left\{\frac{1}{(a+2)^2} + \frac{1}{(a-2)^2}\right\} + \cdots = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$$

o

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2(a^2+1)}{(a^2-1)^2} + \frac{2(a^2+4)}{(a^2-4)^2} - \frac{2(a^2+9)}{(a^2-9)^2} + \cdots = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$$

de donde se obtiene el resultado buscado. Observe que la agrupación de los términos de la serie infinita es posible porque la serie es absolutamente convergente.

7.32. Demuestre que $\dfrac{1}{1^3} - \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{5^3} - \dfrac{1}{7^3} + \cdots = \dfrac{\pi^3}{32}$.

Solución

Se tiene

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{\pi \sec \pi z}{z^3} = \frac{\pi}{z^3 \cos \pi z} = \frac{\pi}{z^3(1 - \pi^2 z^2/2! + \cdots)} \\ &= \frac{\pi}{z^3}\left(1 + \frac{\pi^2 z^2}{2} + \cdots\right) = \frac{\pi}{z^3} + \frac{\pi^3}{2z} + \cdots \end{aligned}$$

de manera que el residuo en $z = 0$ es $\pi^3/2$.

www.FreeLibros.me

El residuo de $F(z)$ en $z = n + \frac{1}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ [que son los polos simples de πz] es

$$\lim_{z \to n+1/2} \left\{ z - \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \right\} \frac{\pi}{z^3 \cos \pi z} = \frac{\pi}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^3} \lim_{z \to n+1/2} \frac{z - \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\cos \pi z} = \frac{-(-1)^n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^3}$$

Si C_N es un cuadrado con vértices en $N(1 + i)$, $N(1 - i)$, $N(-1 + i)$, $N(-1 - i)$, entonces

$$\oint_{C_N} \frac{\pi \sec \pi z}{z^3} dz = -\sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{\pi^3}{2} = -8 \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} + \frac{\pi^3}{2}$$

y como la integral del lado derecho tiende a cero cuando $N \to \infty$, se tiene

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 2\left\{ \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots \right\} = \frac{\pi^3}{16}$$

de donde se obtiene el resultado buscado.

TEOREMA DEL DESARROLLO DE MITTAG-LEFFLER

7.33. Demuestre el teorema del desarrollo de Mittag-Leffler (página 209).

Solución

Sea $f(z)$ una función con polos en $z = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, y suponga que $z = \zeta$ no es un polo de $f(z)$. Así, la función $f(z)/z - \zeta$ tiene polos en $z = a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y en ζ.

El residuo de $f(z)/z - \zeta$ en $z = a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es

$$\lim_{z \to a_n} (z - a_n) \frac{f(z)}{z - \zeta} = \frac{b_n}{a_n - \zeta}$$

El residuo de $f(z)/z - \zeta$ en $z = \zeta$ es

$$\lim_{z \to \zeta} (z - \zeta) \frac{f(z)}{z - \zeta} = f(\zeta)$$

Entonces, de acuerdo con el teorema del residuo,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) + \sum_n \frac{b_n}{a_n - \zeta} \tag{1}$$

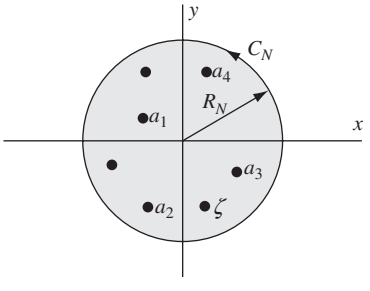


Figura 7-14

donde la última suma se toma sobre todos los polos en el interior de la circunferencia C_N de radio R_N (figura 7-14).

Suponga que $f(z)$ es analítica en $z = 0$. Así, con $\zeta = 0$ en (1), se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) + \sum_n \frac{b_n}{a_n} \tag{2}$$

Se resta (2) de (1) y se obtiene

$$f(\zeta) - f(0) + \sum_n b_n \left(\frac{1}{a_n - \zeta} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} f(z) \left\{ \frac{1}{z - \zeta} - \frac{1}{z} \right\} dz$$

$$= \frac{\zeta}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z(z - \zeta)} dz \tag{3}$$

www.FreeLibros.me

Ahora, como $|z-\zeta| \geq |z| - |\zeta| = R_N - |\zeta|$ para z en C_N, se tiene, si $|f(z)| \leq M$,

$$\left| \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z(z-\zeta)} dz \right| \leq \frac{M \cdot 2\pi R_N}{R_N(R_N - |\zeta|)}$$

Cuando $N \to \infty$ y por ende $R_N \to \infty$, la integral del lado izquierdo tiende a cero, es decir,

$$\lim_{N\to\infty} \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z(z-\zeta)} dz = 0$$

Por tanto, de (3), con $N \to \infty$, se tiene, como se deseaba,

$$f(\zeta) = f(0) + \sum_n b_n \left(\frac{1}{\zeta - a_n} + \frac{1}{a_n} \right)$$

el resultado de la página 209 al sustituir ζ por z.

7.34. Demuestre que $\cot z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right)$, donde la suma se extiende sobre $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Solución

Considere la función

$$f(z) = \cot z - \frac{1}{z} = \frac{z\cos z - \operatorname{sen} z}{z \operatorname{sen} z}$$

Así, $f(z)$ tiene polos simples en $z = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, y en estos polos el residuo es

$$\lim_{z\to n\pi} (z - n\pi) \left(\frac{z\cos z - \operatorname{sen} z}{z \operatorname{sen} z} \right) = \lim_{z\to n\pi} \left(\frac{z - n\pi}{\operatorname{sen} z} \right) \lim_{z\to n\pi} \left(\frac{z\cos z - \operatorname{sen} z}{z} \right) = 1$$

En $z = 0$, $f(z)$ tiene una singularidad removible porque

$$\lim_{z\to 0} \left(\cot z - \frac{1}{z} \right) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{z\cos z - \operatorname{sen} z}{z \operatorname{sen} z} \right) = 0$$

de acuerdo con la regla de L'Hôpital. Por tanto, se define $f(0) = 0$.

De acuerdo con el problema 7.110, se sigue que la función $f(z)$ está acotada sobre los círculos C_N cuyo centro está en el origen y cuyo radio es $R_N = (N + \frac{1}{2})\pi$. Por tanto, de acuerdo con el problema 7.33,

$$\cot z - \frac{1}{z} = \sum_n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right)$$

de donde se obtiene el resultado buscado.

www.FreeLibros.me

7.35. Demuestre que $\cot z = \dfrac{1}{z} + 2z\left\{\dfrac{1}{z^2-\pi^2} + \dfrac{1}{z^2-4\pi^2} + \cdots\right\}$.

Solución

El resultado del problema 7.34 se escribe en la forma

$$\begin{aligned}
\cot z &= \frac{1}{z} + \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=-N}^{-1}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right) + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{z} + \lim_{N\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{z+\pi}+\frac{1}{z-\pi}\right) + \left(\frac{1}{z+2\pi}+\frac{1}{z-2\pi}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{z+N\pi}+\frac{1}{z-N\pi}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{z} + \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{2z}{z^2-\pi^2} + \frac{2z}{z^2-4\pi^2} + \cdots + \frac{2z}{z^2-N^2\pi^2}\right\}\\
&= \frac{1}{z} + 2z\left\{\frac{1}{z^2-\pi^2} + \frac{1}{z^2-4\pi^2} + \cdots\right\}
\end{aligned}$$

PROBLEMAS DIVERSOS

7.36. Calcule $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}}\,dz$, donde a y t son constantes positivas.

Solución

El integrando tiene un punto de ramificación en $z=-1$. Como recta de ramificación se tomará la parte del eje real que está a la izquierda de $z=-1$. Como esta recta de ramificación no puede cruzarse, se considera

$$\oint_C \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}}\,dz$$

donde C es el contorno $ABDEFGHJKA$, que se muestra en la figura 7-15. En esta figura, aunque en realidad EF y HJ se encuentran sobre el eje x, se representan separadas para facilitar la explicación; asimismo, FGH es una circunferencia de radio ϵ y BDE y JKA representan arcos de una circunferencia de radio R.

Como $e^{zt}/\sqrt{z+1}$ es analítica en el interior de C y sobre ella, de acuerdo con el teorema de Cauchy se tiene

$$\oint_C \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}}\,dz = 0 \tag{1}$$

Se omite el integrando y esto se escribe como

$$\int_{AB} + \int_{BDE} + \int_{EF} + \int_{FGH} + \int_{HJ} + \int_{JKA} = 0 \tag{2}$$

Ahora, sobre BDE y JKA, $z = Re^{i\theta}$, donde θ va de θ_0 a π y de π a $2\pi-\theta_0$, respectivamente.

Sobre EF, $z+1 = ue^{\pi i}$, $\sqrt{z+1} = \sqrt{u}e^{\pi i/2} = i\sqrt{u}$, y sobre HJ, $z+1 = ue^{-\pi i}$, $\sqrt{z+1} = \sqrt{u}e^{-\pi i/2} = -i\sqrt{u}$. En ambos casos, $z = -u-1$, $dz = -du$, donde u varía de $R-1$ a ϵ a lo largo de EF y de ϵ a $R-1$ a lo largo de HJ.

www.FreeLibros.me

Sobre FGH, $z+1=\epsilon e^{i\phi}$, donde ϕ va de $-\pi$ a π. Por tanto, (2) se escribe

$$\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}}dz+\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{e^{Re^{i\theta}t}}{\sqrt{Re^{i\theta}+1}}iRe^{i\theta}d\theta+\int_{R-1}^{\epsilon}\frac{e^{-(u+1)t}(-du)}{i\sqrt{u}}$$
$$+\int_{\pi}^{-\pi}\frac{e^{(\epsilon e^{i\phi}-1)t}}{\sqrt{\epsilon e^{i\phi}+1}}i\epsilon e^{i\phi}\,d\phi+\int_{\epsilon}^{R-1}\frac{e^{-(u+1)t}(-du)}{-i\sqrt{u}}$$
$$+\int_{\pi}^{2\pi-\theta_0}\frac{e^{Re^{i\theta}t}}{\sqrt{Re^{i\theta}+1}}iRe^{i\theta}d\theta=0 \tag{3}$$

Ahora se toma el límite cuando $R\to\infty$ (y $T=\sqrt{R^2-a^2}\to\infty$) y $\epsilon\to 0$. Puede mostrarse (véase el problema 7.111) que las integrales segunda, cuarta y sexta tienden a cero. Por tanto, se tiene

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}}dz=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}2i\int_{\epsilon}^{R-1}\frac{e^{-(n+1)t}}{\sqrt{u}}du=2i\int_0^{\infty}\frac{e^{-(u+1)t}}{\sqrt{u}}du$$

o, con $u=v^2$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}}dz=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(u+1)t}}{\sqrt{u}}du=\frac{2e^{-t}}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-v^2t}\,dv=\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$$

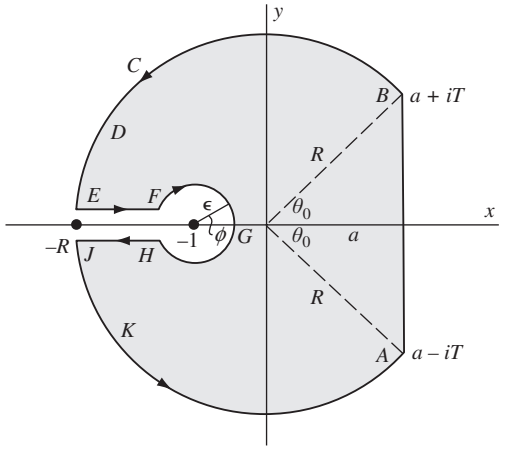


Figura 7-15

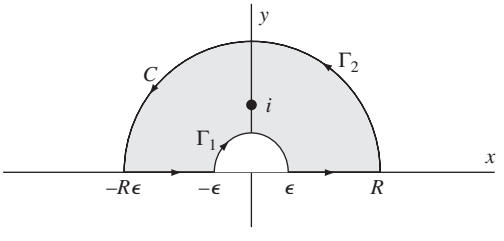


Figura 7-16

7.37. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{(\ln u)^2}{u^2+1}du=\frac{\pi^3}{8}$.

Solución

Sea C la curva cerrada de la figura 7-16, donde Γ_1 y Γ_2 son semicírculos de radios ϵ y R, respectivamente, con centros en el origen. Considere

$$\oint_C\frac{(\ln z)^2}{z^2+1}\,dz$$

www.FreeLibros.me

Como el integrando tiene un polo simple en $z = i$ en el interior de C y como el residuo en este polo es

$$\lim_{z\to i}(z-i)\frac{(\ln z)^2}{(z-i)(z+i)} = \frac{(\ln i)^2}{2i} = \frac{(\pi i/2)^2}{2i} = \frac{-\pi^2}{8i}$$

de acuerdo con el teorema del residuo,

$$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\frac{-\pi^2}{8i}\right) = \frac{-\pi^3}{4} \tag{1}$$

Ahora,

$$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{z^2+1}dz = \int_{-R}^{-\epsilon}\frac{(\ln z)^2}{z^2+1}dz + \int_{\Gamma_1}\frac{(\ln z)^2}{z^2+1}dz + \int_{\epsilon}^{R}\frac{(\ln z)^2}{z^2+1}dz + \int_{\Gamma_2}\frac{(\ln z)^2}{z^2+1}dz \tag{2}$$

En la primera integral de la derecha, sea $z = -u$ de manera que $\ln z = \ln(-u) = \ln u + \ln(-1) = \ln u + \pi i$ y $dz = -du$. Asimismo, en la tercera integral de la derecha sea $z = u$ (de manera que $dz = du$ y $\ln z = \ln u$). Así, con (1), se tiene

$$\int_{\epsilon}^{R}\frac{(\ln u+\pi i)^2}{u^2+1}du + \int_{\Gamma_1}\frac{(\ln z)^2}{z^2+1}dz + \int_{\epsilon}^{R}\frac{(\ln u)^2}{u^2+1}du + \int_{\Gamma_2}\frac{(\ln z)^2}{z^2+1}dz = \frac{-\pi^3}{4}$$

Ahora, sea $\epsilon \to 0$ y $R \to \infty$. Como las integrales en torno a Γ_1 y Γ_2 tienden a cero, se tiene

$$\int_0^{\infty}\frac{(\ln u+\pi i)^2}{u^2+1}du + \int_0^{\infty}\frac{(\ln u)^2}{u^2+1}du = \frac{-\pi^3}{4}$$

o

$$2\int_0^{\infty}\frac{(\ln u)^2}{u^2+1}du + 2\pi i\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}du - \pi^2\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+1} = \frac{-\pi^3}{4}$$

Se aprovecha que $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}u\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$,

$$2\int_0^{\infty}\frac{(\ln u)^2}{u^2+1}du + 2\pi i\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}du = \frac{\pi^3}{4}$$

Al igualar las partes reales y las imaginarias, se encuentra

$$\int_0^{\infty}\frac{(\ln u)^2}{u^2+1}du = \frac{\pi^3}{8}, \qquad \int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}du = 0$$

donde, además del resultado buscado, se obtiene la segunda integral.

www.FreeLibros.me

7.38. Demuestre que

$$\frac{\coth \pi}{1^3} + \frac{\coth 2\pi}{2^3} + \frac{\coth 3\pi}{3^3} + \cdots = \frac{7\pi^3}{180}$$

Solución

Considere

$$\oint_{C_N} \frac{\pi \cot \pi z \coth \pi z}{z^3}\, dz$$

a lo largo del cuadrado C_N de la figura 7-17. Los polos del integrando están en: $z = 0$ (polo de orden 5); $z = \pm 1, \pm 2, \ldots$ (polos simples); $z = \pm i, \pm 2i, \ldots$ (polos simples).

De acuerdo con el problema 7.5 (al sustituir z por πz) se ve que:

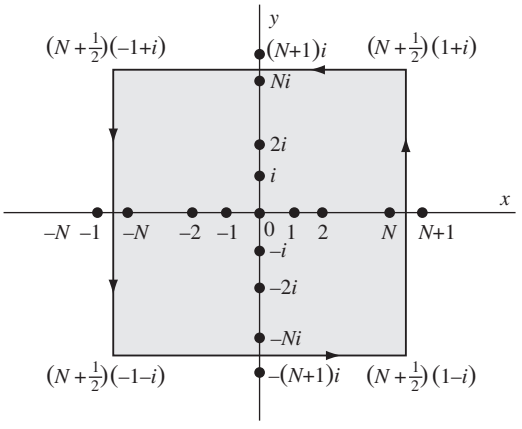


Figura 7-17

El residuo en $z = 0$ es $\dfrac{-7\pi^3}{45}$.

El residuo en $z = n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) es

$$\lim_{z \to n} \left\{ \frac{(z-n)}{\operatorname{sen} \pi z} \cdot \frac{\pi \cos \pi z \coth \pi z}{z^3} \right\} = \frac{\coth n\pi}{n^3}$$

El residuo en $z = ni$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) es

$$\lim_{z \to ni} \left\{ \frac{(z-ni)}{\operatorname{senh} \pi z} \cdot \frac{\pi \cot \pi z \cosh \pi z}{z^3} \right\} = \frac{\coth n\pi}{n^3}$$

Así, de acuerdo con el teorema del residuo,

$$\oint_{C_N} \frac{\pi \cot \pi z \coth \pi z}{z^3}\, dz = \frac{-7\pi^3}{45} + 4 \sum_{n=1}^{N} \frac{\coth n\pi}{n^3}$$

Se toma el límite cuando $N \to \infty$ y se encuentra, como en el problema 7.25, que la integral del lado izquierdo tiende a cero, con lo que se llega al resultado deseado.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

RESIDUOS Y TEOREMA DEL RESIDUO

7.39. En cada una de las funciones siguientes, determine los polos y los residuos en los polos:

a) $\dfrac{2z+1}{z^2 - z - 2}$, *b)* $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$, *c)* $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2}$, *d)* $\operatorname{sech} z$, *e)* $\cot z$.

7.40. Demuestre que $\displaystyle\oint_C \frac{\cosh z}{z^3}\, dz = \pi i$ si C es el cuadrado con vértices en $\pm 2 \pm 2i$.

7.41. Muestre que el residuo de $(\csc z \operatorname{csch} z)/z^3$ en $z = 0$ es $-1/60$.

7.42. Evalúe $\displaystyle\oint_C \frac{e^z\, dz}{\cosh z}$ a lo largo de la circunferencia C definida por $|z| = 5$.

7.43. Encuentre los ceros y los polos de $f(z) = \dfrac{z^2 + 4}{z^3 + 2z^2 + 2z}$, y determine los residuos en los polos.

7.44. Evalúe $\displaystyle\oint_C e^{-1/z} \operatorname{sen}(1/z)\, dz$, donde C es la circunferencia $|z| = 1$.

www.FreeLibros.me

7.45. Sea C el cuadrado limitado por $x = \pm 2$, $y = \pm 2$. Evalúe $\oint_C \frac{\operatorname{senh} 3z}{(z - \pi i/4)^3} dz$.

7.46. Evalúe $\oint_C \frac{2z^2 + 5}{(z+2)^3(z^2+4)z^2} dz$, donde C es *a*) $|z - 2i| = 6$, *b*) el cuadrado con vértices en $1 + i,\ 2 + i,\ 2 + 2i,\ 1 + 2i$.

7.47. Evalúe $\oint_C \frac{2 + 3 \operatorname{sen} \pi z}{z(z-1)^2} dz$, donde C es un cuadrado con vértices en $3 + 3i$, $3 - 3i$, $-3 + 3i$, $-3 - 3i$.

7.48. Evalúe $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z(z^2+1)} dz$, $t > 0$ a lo largo del cuadrado con vértices en $2 + 2i$, $-2 + 2i$, $-2 - 2i$, $2 - 2i$.

INTEGRALES DEFINIDAS

7.49. Demuestre que $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

7.50. Calcule $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$.

7.51. Calcule $\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{5 - 3\cos\theta} d\theta$.

7.52. Calcule $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$.

7.53. Demuestre que $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4\cos 2\theta} d\theta = \frac{3\pi}{8}$.

7.54. Demuestre que si $m > 0$, $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}$.

7.55. *a*) Encuentre el residuo de $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}$ en $z = i$. *b*) Calcule $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^5} dx$.

7.56. Dado $a^2 > b^2 + c^2$, verifique que $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta + c \operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}$.

7.57. Demuestre que $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{(5 - 3\cos\theta)^4} d\theta = \frac{135\pi}{16\,384}$.

7.58. Calcule $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

7.59. Calcule $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}$.

7.60. Verifique que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

7.61. Analice la validez de la solución siguiente al problema 7.19. Sea $u = (1+i)x/\sqrt{2}$ en la fórmula $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ para obtener $\int_0^\infty e^{-ix^2} dx = \frac{1}{2}(1-i)\sqrt{\pi/2}$, de donde $\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$ al igualar partes reales e imaginarias.

7.62. Demuestre que $\int_0^\infty \frac{\cos 2\pi x}{x^4 + x^2 + 1} dx = \frac{-\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\pi/\sqrt{3}}$.

SUMA DE SERIES

7.63. Demuestre que $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}\coth\pi + \frac{\pi^2}{4}\operatorname{csch}^2\pi - \frac{1}{2}$.

7.64. Demuestre que *a*) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, *b*) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

7.65. Demuestre que $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1} n \operatorname{sen} n\theta}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{senh} \alpha\theta}{\operatorname{senh} \alpha\pi}$, $-\pi < \theta < \pi$.

7.66. Demuestre que $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$.

www.FreeLibros.me

7.67. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4+4a^4} = \frac{\pi}{4a^3}\left\{\frac{\operatorname{senh} 2\pi a + \operatorname{sen} 2\pi a}{\cosh 2\pi a - \cos 2\pi a}\right\}$.

7.68. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m^2+a^2)(n^2+b^2)} = \frac{\pi^2}{ab}\coth \pi a \coth \pi b$.

TEOREMA DEL DESARROLLO DE MITTAG-LEFFLER

7.69. Demuestre que $\csc z = \dfrac{1}{z} - 2z\left(\dfrac{1}{z^2-\pi^2} - \dfrac{1}{z^2-4\pi^2} + \dfrac{1}{z^2-9\pi^2} - \cdots\right)$.

7.70. Demuestre que $\operatorname{sech} z = \pi\left(\dfrac{1}{(\pi/2)^2+z^2} - \dfrac{3}{(3\pi/2)^2+z^2} + \dfrac{5}{(5\pi/2)^2+z^2} - \cdots\right)$.

7.71. *a*) Demuestre que $\tan z = 2z\left(\dfrac{1}{(\pi/2)^2-z^2} + \dfrac{1}{(3\pi/2)^2-z^2} + \dfrac{1}{(5\pi/2)^2-z^2} + \cdots\right)$.

b) Con el resultado del inciso *a*) demuestre que $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots = \dfrac{\pi^2}{8}$.

7.72. Verifique los desarrollos *a*) 2, *b*) 4, *c*) 5, *d*) 7, *e*) 8 de la página 209.

7.73. Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+4k^2\pi^2} = \frac{1}{2z}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{e^z-1}\right\}$.

7.74. Demuestre que $\dfrac{1}{1^4}+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{5^4}+\dfrac{1}{7^4}+\cdots = \dfrac{\pi^4}{96}$.

PROBLEMAS MISCELÁNEOS

7.75. Verifique que el teorema de Cauchy y las fórmulas integrales se obtienen como casos especiales del teorema del residuo.

7.76. Demuestre que la suma de los residuos de la función $\dfrac{2z^5-4z^2+5}{3z^6-8z+10}$ en todos sus polos es $2/3$.

7.77. Sea n un número positivo. Demuestre que $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta - \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 2\pi/n!$.

7.78. Calcule $\oint_C z^3 e^{1/z}\,dz$ a lo largo de la circunferencia C cuya ecuación es $|z-1| = 4$.

7.79. Verifique que en condiciones adecuadas a la función:

a) $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta = 2\pi f(0)$, *b*) $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos\theta\,d\theta = -\pi f'(0)$.

7.80. Demuestre que: *a*) $\int_0^{2\pi}\cos(\cos\theta)\cosh(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 2\pi$, *b*) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\operatorname{sen}\theta)\cos\theta\,d\theta = \pi$.

7.81. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{e^{2\pi x}-1}\,dx = \frac{1}{4}\coth\frac{a}{2} - \frac{1}{2a}$.

[*Sugerencia:* Integre $e^{aiz}/(e^{2\pi z}-1)$ a lo largo de un rectángulo con vértices en 0, R, $R+i$, i y haga que $R\to\infty$.]

7.82. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2\operatorname{senh}\pi a}$.

7.83. Dadas las constantes positivas a, p y t, demuestre que $\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{z^2+p^2}\,dz = \frac{\operatorname{sen} pt}{p}$.

7.84. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi\ln a}{2a}$.

www.FreeLibros.me

7.85. Suponga que $-\pi < a < \pi$. Verifique que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\frac{\operatorname{senh} ax}{\operatorname{senh} \pi x}dx = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a + \cosh \lambda}$.

7.86. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(4x^2+\pi^2)\cosh x} = \frac{\ln 2}{2\pi}$.

7.87. Demuestre que *a)* $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^4+1}dx = \frac{-\pi^2\sqrt{2}}{16}$, *b)* $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{(\ln x)^2}{x^4+1}dx = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{64}$.

[*Sugerencia:* Considere $\displaystyle\oint_C \frac{(\ln z)^2}{z^4+1}dz$ a lo largo de una semicircunferencia con una indentación adecuada en $z = 0$.]

7.88. Calcule $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx$.

7.89. Demuestre que si $|a| < 1$ y $b > 0$, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{senh} ax}{\operatorname{senh} x}\cos bx\, dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} a\pi}{\cos a\pi + \cosh b\pi}\right)$.

7.90. Demuestre que si $-1 < p < 1$, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos px}{\cosh x}dx = \frac{\pi}{2\cosh(p\pi/2)}$.

7.91. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi\ln 2}{2}$.

7.92. Suponga que $\alpha > 0$ y que $-\pi/2 < \beta < \pi/2$. Demuestre que

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2\cos\beta}\cos(\alpha x^2 \operatorname{sen}\beta)\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha}\cos(\beta/2)$.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2\cos\beta}\operatorname{sen}(\alpha x^2 \operatorname{sen}\beta)\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha}\operatorname{sen}(\beta/2)$.

7.93. Demuestre que $\csc^2 z = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}$.

7.94. Suponga que a y p son reales tales que $0 < |p| < 1$ y $0 < |\alpha| < z$. Demuestre que

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{-p}\, dx}{x^2+2x\cos\alpha+1} = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} p\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)$$

7.95. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. [Considere el contorno de la figura 7-18.]

7.96. Demuestre el teorema del residuo para regiones múltiplemente conexas.

7.97. Encuentre las condiciones suficientes en las cuales el teorema del residuo (problema 7.2) es válido si C contiene una cantidad infinita de singularidades aisladas.

7.98. Sea C una circunferencia con ecuación $|z| = 4$. Determine el valor de la integral

$$\oint_C z^2\csc\frac{1}{z}dz$$

si existe.

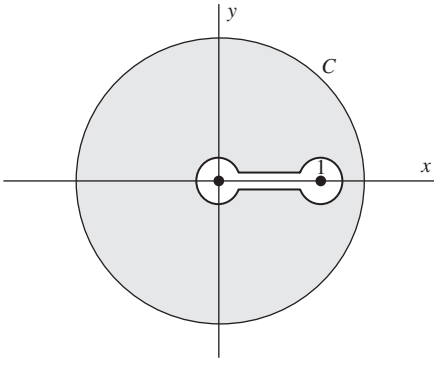


Figura 7-18

www.FreeLibros.me

7.99. Dé una prueba analítica de que sen $\theta \geq 2\theta/\pi$ para $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

[*Sugerencia:* Considere la derivada de $(\text{sen}\,\theta)/\theta$, y muestre que es una función decreciente.]

7.100. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\text{senh}\,\pi x}\,dx = \frac{1}{4}$.

7.101. Verifique que en la ecuación (2) del problema 7.22 la integral a lo largo de Γ tiende a cero cuando $R \to \infty$.

7.102. *a*) Suponga que r es real. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos\theta + r^2)\,d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| \leq 1 \\ \pi \ln r^2 & \text{si } |r| \geq 1 \end{cases}$.

b) Con el resultado del inciso *a*) calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln \text{sen}\,\theta\,d\theta$ (véase el problema 7.23).

7.103. Termine la prueba del caso 2 en el problema 7.25.

7.104. Sea $0 < p < 1$. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-p}}{x-1}\,dx = \pi \cot p\pi$, en el sentido del valor principal de Cauchy.

7.105. Muestre que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\tanh\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)$.

7.106. Verifique que cuando $N \to \infty$, la integral en el lado izquierdo de (1) en el problema 7.29 tiende a cero.

7.107. Demuestre que $\displaystyle\frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots = \frac{5\pi^5}{1\,536}$.

7.108. Demuestre los resultados de la página 209 para *a*) $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2n+1}{2}\right)$ y *b*) $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right)$.

7.109. Dado $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Compruebe que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \,\text{sen}\,n\theta}{n^3} = \frac{\theta(\pi-\theta)(\pi+\theta)}{12}$.

7.110. Demuestre que la función $\cot z - 1/z$ del problema 7.34 es acotada sobre las circunferencias C_N.

7.111. Muestre que en la ecuación (3) del problema 7.36, las integrales segunda, cuarta y sexta tienden a cero cuando $\epsilon \to 0$ y $R \to \infty$.

7.112. Demuestre que $\displaystyle\frac{1}{\cosh(\pi/2)} - \frac{1}{3\cosh(3\pi/2)} + \frac{1}{5\cosh(5\pi/2)} - \cdots = \frac{\pi}{8}$.

7.113. Demuestre que $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$, donde a y t son constantes positivas arbitrarias.

7.114. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n\pi}{n^7} = \frac{19\pi^7}{56\,700}$.

7.115. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)\cosh \pi x} = \frac{4-\pi}{2}$.

7.116. Demuestre que $\displaystyle\frac{1}{1^3 \,\text{senh}\,\pi} - \frac{1}{2^3 \,\text{senh}\,2\pi} + \frac{1}{3^3 \,\text{senh}\,3\pi} - \cdots = \frac{\pi^3}{360}$.

7.117. Demuestre que si a y t son constantes positivas,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt}\cot^{-1} z\,dz = \frac{\text{sen}\,t}{t}$$

www.FreeLibros.me

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

7.39. *a*) $z = -1, 2; 1/3, 5/3$, *b*) $z = 1; 4$, *c*) , $z = 0; 1$

d) $z = \frac{1}{2}(2k+1)\pi i$; $(-1)^{k+1}i$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *e*) $z = k\pi i$; 0 donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7.42. $8\pi i$

7.43. Ceros: $z = \pm 2i$, residuo: en $z = 0$ es 2, residuo: en $za = -1 + i$ es $-\frac{1}{2}(1 - 3i)$, residuo: en $z = -1 - i$ es $-\frac{1}{2}(1 + 3i)$

7.44. $2\pi i$

7.45. $-9\pi\sqrt{2}/2$

7.47. $-6\pi i$

7.48. $1 - \cos t$

7.50. $5\pi/288$

7.51. 0

7.58. $\pi\sqrt{3}/6$

7.59. $\pi/2$

7.78. $1/24$

7.88. $-\pi/4$

www.FreeLibros.me

CAPÍTULO 8

Aplicación conforme

8.1 TRANSFORMACIONES O APLICACIONES

El conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned} \tag{8.1}$$

define, en general, una *transformación* o *aplicación*, que define una correspondencia entre puntos del plano uv y puntos del plano xy. A las ecuaciones (8.1) se les llama *ecuaciones de transformación.* Si a cada punto del plano uv le corresponde uno y sólo un punto del plano xy, y viceversa, se habla de una transformación o aplicación *uno a uno* (*o inyectiva*). En ese caso, un conjunto de puntos del plano xy (como una curva o una región) es *llevado* a un conjunto de puntos en el plano uv (una curva o región) y a la inversa. Los correspondientes conjuntos de puntos en estos dos planos se conocen como *imágenes* del otro.

8.2 JACOBIANO DE UNA TRANSFORMACIÓN

Con la transformación (8.1), una región $\mathcal{R}$ del plano xy es, en general, llevada a una región $\mathcal{R}'$ del plano uv. Así, si ΔA_{xy} y ΔA_{uv} denotan, respectivamente, las áreas de estas regiones, puede mostrarse que si u y v son continuamente diferenciables,

$$\lim \frac{\Delta A_{uv}}{\Delta A_{xy}} = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| \tag{8.2}$$

donde lím denota el límite cuando ΔA_{xy} (o ΔA_{uv}) tiende a cero y donde el determinante

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{8.3}$$

se conoce como el *jacobiano de la transformación* (8.1).

Si de (1) se despejan x y y en términos de u y v, se obtiene la transformación $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, la cual suele conocerse como *transformación inversa* correspondiente a (8.1). Si x y y son univaluadas y continuamente diferenciables, el jacobiano de esta transformación es $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ y puede mostrarse que es igual al recíproco de $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ (véase el problema 8.7). Por tanto, si en una región un jacobiano es distinto de cero, también el otro jacobiano será distinto de cero.

Al contrario, puede mostrarse que si u y v son continuamente diferenciables en una región $\mathcal{R}$ y si el jacobiano $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ no es cero en $\mathcal{R}$, la transformación (8.1) es uno a uno.

www.FreeLibros.me

8.3 FUNCIONES DE APLICACIONES COMPLEJAS

Un caso de especial interés ocurre cuando u y v son reales y son las partes real e imaginaria de una función analítica de una variable compleja $z = x + iy$, es decir, $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$. En tal caso, el jacobiano de la transformación está dado por

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2 \tag{8.4}$$

(véase el problema 8.5). Se sigue que la transformación es uno a uno en las regiones en las que $f'(z) \neq 0$. A los puntos en los que $f'(z) = 0$ se les llama *puntos críticos.*

8.4 APLICACIONES CONFORMES

Suponga que, con la transformación (8.1), el punto (x_0, y_0) del plano xy es llevado al punto (u_0, v_0) del plano uv (figuras 8-1 y 8-2), y las curvas C_1 y C_2 [que se intersecan en (x_0, y_0)] se llevan, respectivamente, a las curvas C_1' y C_2' [que se intersecan en (u_0, v_0)]. Así, si la transformación es tal que el ángulo en (x_0, y_0) entre C_1 y C_2 es igual al ángulo en (u_0, v_0) entre C_1' y C_2', tanto en magnitud como en sentido, se dice que la transformación o la aplicación es *conforme* en (x_0, y_0). Una aplicación que conserva las magnitudes de los ángulos pero no necesariamente su sentido se llama *isogonal.*

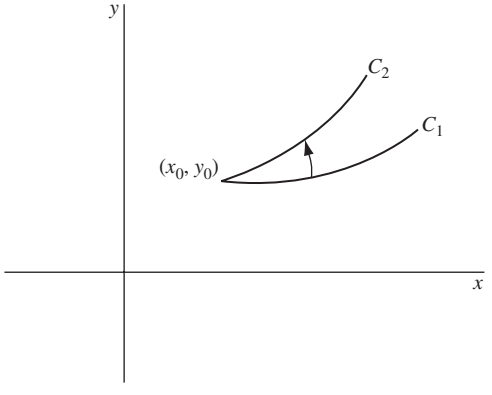


Figura 8-1

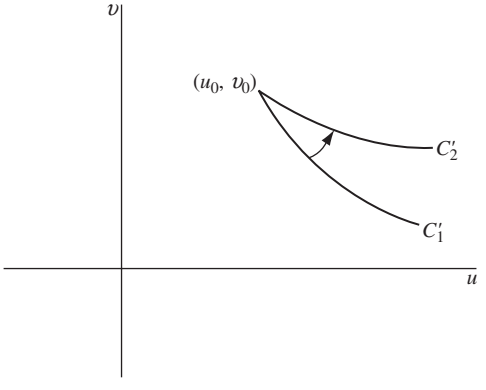


Figura 8-2

El teorema siguiente es fundamental.

TEOREMA 8.1: Si $f(z)$ es analítica y $f'(z) \neq 0$ en una región $\mathcal{R}$, la aplicación $w = f(x)$ es conforme en todos los puntos de $\mathcal{R}$.

En una transformación o aplicación conforme, las figuras pequeñas en la vecindad de un punto z_0 del plano z se llevan a figuras pequeñas similares en el plano w y se aumentan (o reducen) en una cantidad dada por $|f'(z_0)|^2$, llamada *factor de magnificación del área* o sólo *factor de magnificación.* Las distancias cortas en el plano z en la vecindad de z_0 se aumentan (o reducen) en el plano w en una cantidad dada aproximadamente por $|f'(z_0)|$, llamada *factor de aumento lineal.* Las figuras grandes en el plano z por lo general se llevan a figuras en el plano w que están lejos de ser semejantes.

8.5 TEOREMA DE LA APLICACIÓN DE RIEMANN

Sea C (figura 8-3) una curva simple cerrada en el plano z que constituye la frontera de una región $\mathcal{R}$ conexa simple. Sea C' (figura 8-4) una circunferencia de radio uno, con centro en el origen [el *círculo unitario*], que constituye la frontera de una región $\mathcal{R}'$ en el plano w. A la región $\mathcal{R}'$ se le suele llamar *disco unitario.* Así, el *teorema de la apli-*

www.FreeLibros.me

cación de Riemann sostiene que existe una función $w = f(z)$, analítica en $\mathcal{R}$, que lleva cada punto de $\mathcal{R}$ a un punto correspondiente en $\mathcal{R}'$ y cada punto de C a un punto correspondiente de C', la correspondencia es uno a uno y sobre (inyectiva y suprayectiva), es decir, todo punto de $\mathcal{R}'$ es la imagen de exactamente un punto de $\mathcal{R}$.

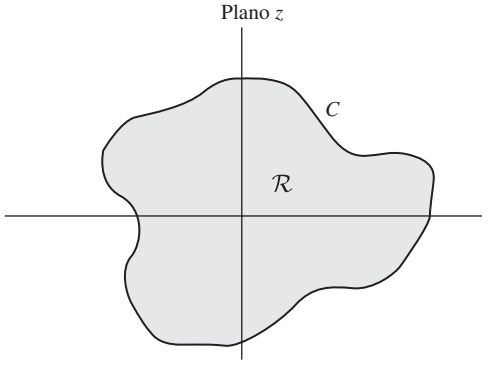


Figura 8-3

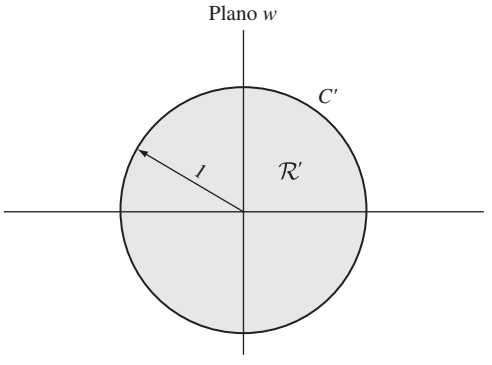


Figura 8-4

Esta función $f(z)$ tiene tres constantes reales arbitrarias, que se determinan al hacer que el centro de C' corresponda a algún punto dado de $\mathcal{R}$ y que un punto sobre C' corresponda a un punto dado sobre C. Hay que observar que aunque el teorema del mapeo de Riemann demuestra la *existencia* de esta función, en realidad no produce esta función.

El teorema de la aplicación de Riemann se extiende al caso en el que una región limitada por dos curvas simples cerradas, una dentro de la otra, se lleva a una región limitada por dos circunferencias concéntricas. Además, toda región simplemente conexa que no sea todo el plano x-y se lleva de manera conforme a un disco unitario. Por ejemplo, el semiplano superior se lleva, de manera conforme, al disco unitario (véase la sección 8.11).

8.6 PUNTOS FIJOS O INVARIANTES DE UNA TRANSFORMACIÓN

Suponga que el plano w se superpone al plano z de manera que los ejes coordenados coincidan y que, esencialmente, hay un solo plano. Así, la transformación $w = f(z)$ se entiende como llevar ciertos puntos del plano a otros puntos. Los puntos en los que $z = f(z)$ se conocen como *puntos fijos* o *puntos invariantes* de la transformación.

EJEMPLO 8.1. Los puntos fijos o invariantes de la transformación $w = z^2$ son las soluciones de $z^2 = z$, es decir, $z = 0, 1$.

8.7 ALGUNAS TRANSFORMACIONES GENERALES

A continuación, α, β son constantes complejas dadas, y a y θ_0 son constantes reales.

1. **Traslación.** $w = z + \beta$
   Mediante esta transformación, las figuras del plano z se *desplazan* o *trasladan* en dirección del vector β.

2. **Rotación.** $w = e^{i\theta_0} z$
   Mediante esta transformación, las figuras del plano z se rotan un ángulo θ_0. Si $\theta_0 > 0$, la rotación es en sentido contrario a las manecillas del reloj, y si $\theta_0 < 0$, la rotación es en sentido de las manecillas del reloj.

www.FreeLibros.me

3. **Estiramiento/elongación.** $w = az$
   Mediante esta transformación, las figuras del plano z se alargan/elongan (o contraen/encogen) en la dirección de z si $a > 1$ (o $0 < a < 1$). La contracción se considera un caso especial del estiramiento.

4. **Inversión.** $w = 1/z$

8.8 TRANSFORMACIONES SUCESIVAS

Si $w = f_1(\zeta)$ lleva la región $\mathcal{R}_\zeta$ del plano ζ a la región $\mathcal{R}_w$ del plano w y $\zeta = f_2(z)$ lleva la región $\mathcal{R}_z$ del plano z a la región $\mathcal{R}_\zeta$, entonces $w = f_1[f_2(z)]$ lleva $\mathcal{R}_z$ a $\mathcal{R}_w$. Las funciones f_1 y f_2 definen *transformaciones sucesivas* de un plano a otro, las cuales equivalen a una sola transformación. Estas ideas se generalizan fácilmente.

8.9 TRANSFORMACIÓN LINEAL

La transformación

$$w = \alpha z + \beta \tag{8.5}$$

donde α y β son constantes complejas dadas, se conoce como *transformación lineal.* Con $\alpha = ae^{i\theta_0}$, se ve que una transformación lineal es una combinación de las transformaciones de traslación, rotación y estiramiento.

8.10 TRANSFORMACIÓN BILINEAL O FRACCIONARIA

La transformación

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \tag{8.6}$$

se conoce como *transformación bilineal* o *fraccionaria.* Esta transformación se considera una combinación de las transformaciones de traslación, rotación, estiramiento e inversión.

La transformación (8.6) tiene la propiedad de que un círculo en el plano z se lleva a un círculo en el plano w, donde por círculos se entiende también círculos de radio infinito que son líneas rectas. Véanse los problemas 8.14 y 8.15.

Esta transformación lleva tres puntos distintos cualesquiera del plano z a tres puntos distintos del plano w, uno de los cuales puede estar al infinito.

Si z_1, z_2, z_3, z_4 son distintos, la cantidad

$$\frac{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)} \tag{8.7}$$

se conoce como *cociente cruzado* de z_1, z_2, z_3, z_4. Este cociente es invariante con una transformación bilineal, propiedad con que se obtienen transformaciones bilineales específicas que lleven tres puntos a otros tres puntos.

www.FreeLibros.me

8.11 APLICACIÓN DE UN SEMIPLANO SOBRE UN CÍRCULO

Sea z_0 un punto P en el semiplano superior del plano z, denotado $\mathcal{R}$ en la figura 8-5. Así, la transformación

$$w = e^{i\theta_0}\left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\right) \tag{8.8}$$

lleva este semiplano superior en forma uno a uno (inyectiva) sobre la región $\mathcal{R}'$, que es la circunferencia unitaria $|w| = 1$. Todos los puntos del eje x se llevan a la frontera del círculo. La constante θ_0 se determina al hacer que un punto determinado del eje x corresponda a un punto dado sobre la circunferencia.

En las figuras siguientes se emplea la convención de los puntos, A, B, C, etc., del plano z que correspondan a puntos A', B', C', etc. (A "*prima*", B "*prima*", C "*prima*", etc.), del plano w. Además, en el caso de puntos al infinito, esto se indica mediante una flecha, como en los puntos A y F en la figura 8-5, los cuales corresponden, respectivamente, a los puntos A' y F' (el mismo punto) de la figura 8-6. A medida que el punto z se mueve sobre la frontera de $\mathcal{R}$ [es decir, el eje real] desde $-\infty$ (punto A) hasta $+\infty$ (punto F), w se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj a lo largo de la circunferencia unitaria desde A' de vuelta a A'.

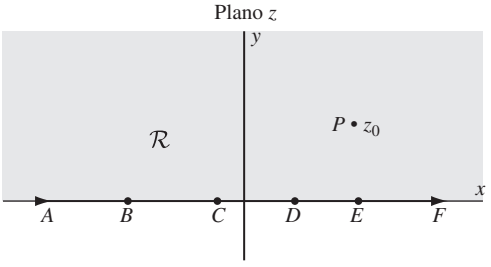


Figura 8-5

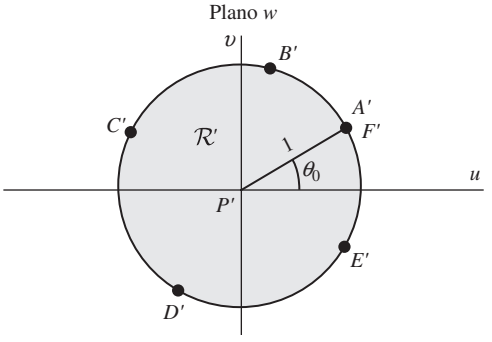


Figura 8-6

8.12 TRANSFORMACIÓN DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

Considere un polígono [figura 8-7] en el plano w con vértices en $w_1, w_2, \ldots, w_n$, cuyos ángulos interiores correspondientes sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, respectivamente. Los puntos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sean, respectivamente, las imágenes de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre el eje real del plano z [figura 8-8].

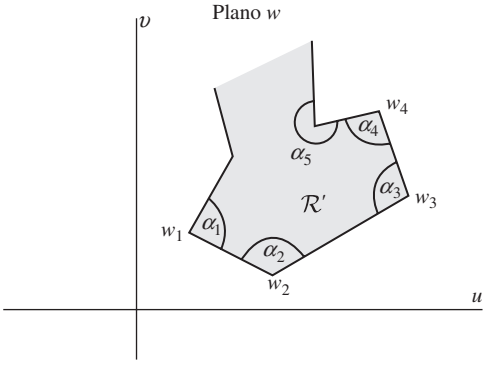


Figura 8-7

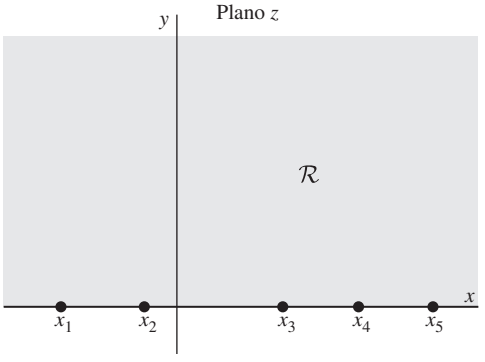


Figura 8-8

www.FreeLibros.me

Una transformación que lleva el semiplano superior $\mathcal{R}$ del plano z sobre el interior $\mathcal{R}'$ del polígono en el plano w, y el eje real sobre la frontera del polígono, está dada por

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \cdots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} \tag{8.9}$$

o

$$w = A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \cdots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} dz + B \tag{8.10}$$

donde A y B son constantes complejas.

Hay que observar lo siguiente:

1. Tres de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pueden elegirse como se desee.
2. Las constantes A y B determinan el tamaño, orientación y posición del polígono.
3. Es conveniente elegir un punto al infinito, por ejemplo, x_n, en cuyo caso, en las expresiones (8.9) y (8.10) el último factor no está presente.
4. Los polígonos abiertos infinitos se consideran casos límites de los polígonos cerrados.

8.13 TRANSFORMACIONES DE FRONTERAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Supóngase que en el plano z una curva C [figura 8-9], que puede ser cerrada o no, tiene como ecuaciones paramétricas

$$x = F(t), \quad y = G(t) \tag{8.11}$$

donde F y G se suponen continuamente diferenciables. Así, la transformación

$$z = F(w) + iG(w) \tag{8.12}$$

lleva el eje real C' [figura 8-10] del plano w sobre la curva C.

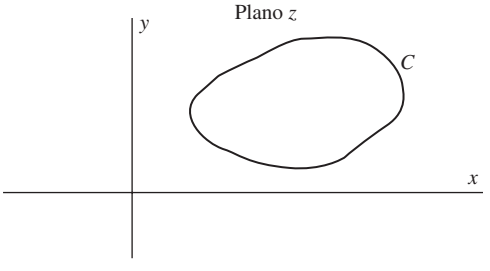


Figura 8-9

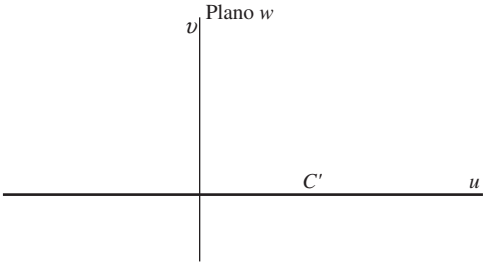


Figura 8-10

8.14 ALGUNAS TRANSFORMACIONES ESPECIALES

Como referencia se presentan a continuación algunas transformaciones útiles en la práctica. Se presentan por separado las transformaciones que llevan la región dada $\mathcal{R}$ del plano w o del plano z sobre el semiplano superior del plano w o del plano z, el círculo unitario en el plano z o en el plano w, según la transformación más sencilla. Como se vio, existe una transformación [ecuación (8.8)] que lleva el semiplano superior sobre el círculo unitario.

www.FreeLibros.me

A. Transformaciones sobre/en el semiplano superior

A-1 Sector infinito de ángulo π/m $\qquad w = z^m,\ m \geq 1/2$

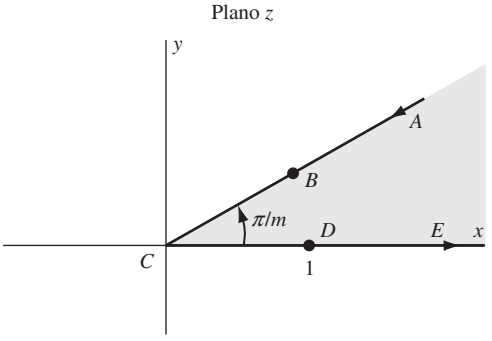


Figura 8-11

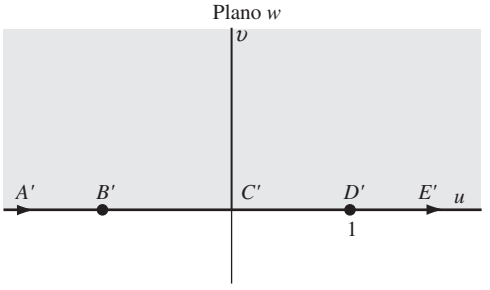


Figura 8-12

A-2 Banda infinita de anchura a $\qquad w = e^{\pi z/a}$

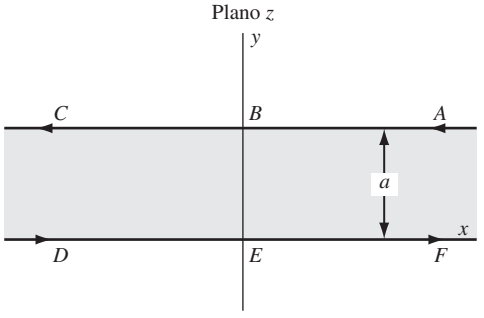


Figura 8-13

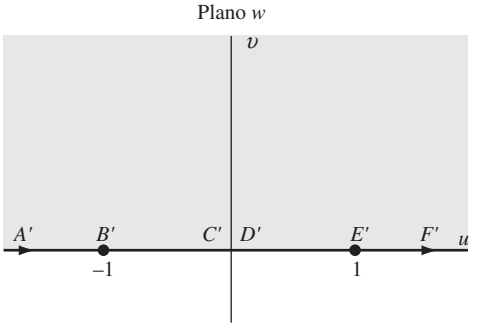


Figura 8-14

A-3 Banda semiinfinita de anchura a $\qquad w = \operatorname{sen}\dfrac{\pi z}{a}$

a)

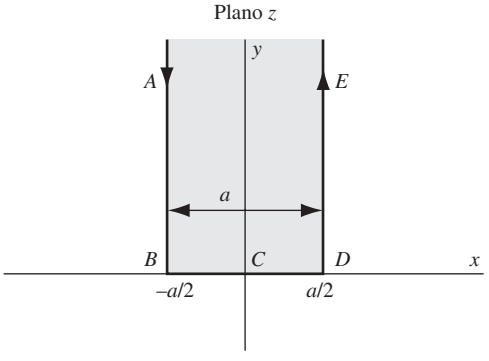


Figura 8-15

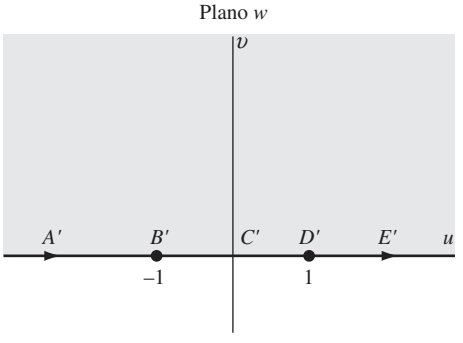


Figura 8-16

www.FreeLibros.me

b) $$w = \cos\frac{\pi z}{a}$$

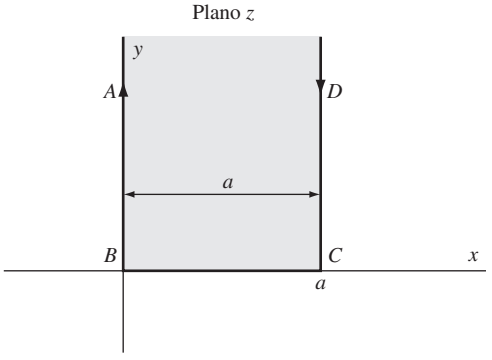


Figura 8-17

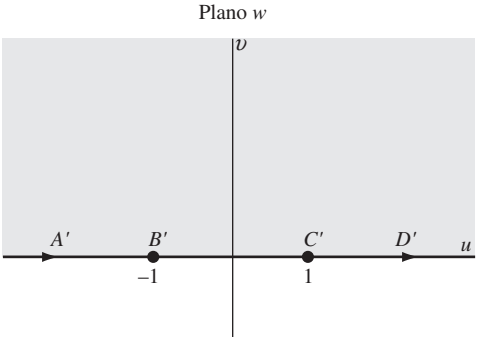


Figura 8-18

c) $$w = \cosh\frac{\pi z}{a}$$

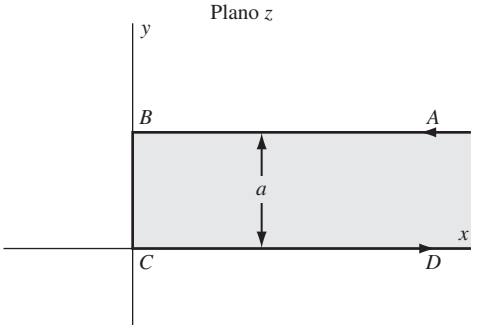


Figura 8-19

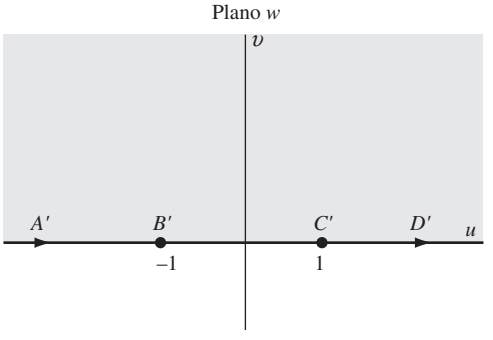


Figura 8-20

A-4 Semiplano con semicírculo eliminado $$w = \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

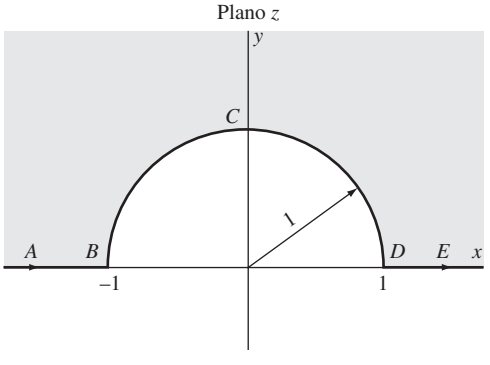


Figura 8-21

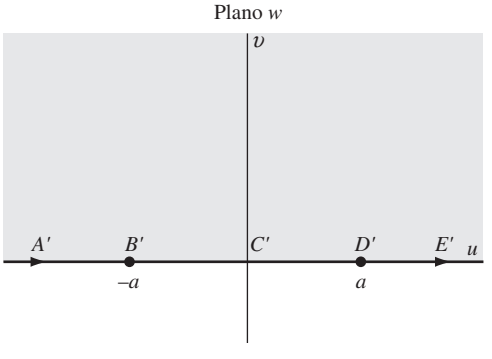


Figura 8-22

www.FreeLibros.me

A-5 Semicírculo $$w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

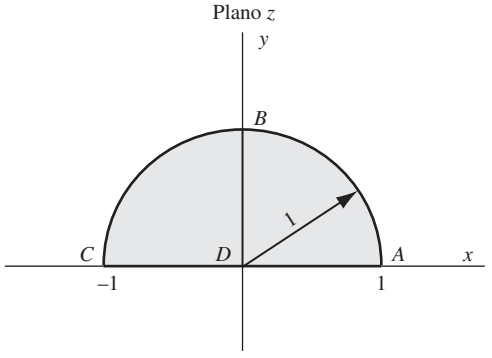


Figura 8-23

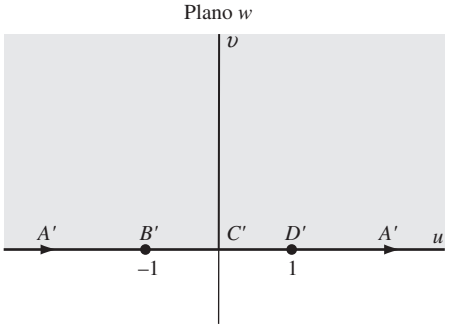


Figura 8-24

A-6 Sector de un círculo $$w = \left(\frac{1+z^m}{1-z^m}\right)^2,\ m \geq \frac{1}{2}$$

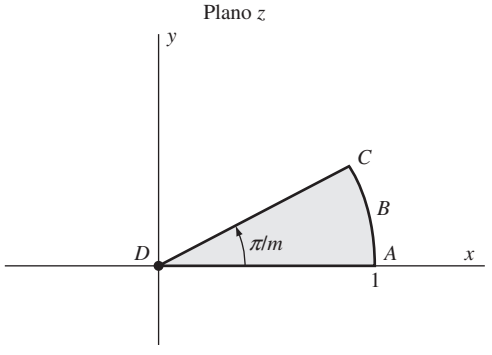


Figura 8-25

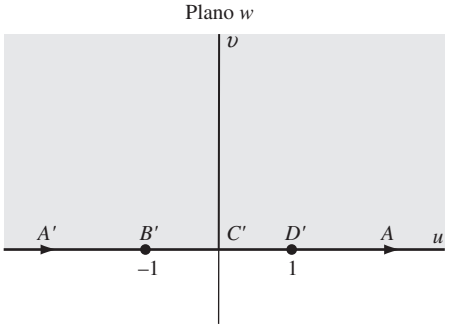


Figura 8-26

A-7 Región en forma de lente con ángulo π/m
[ABC y CDA son arcos circulares] $$w = e^{2mi\cot^{-1}p}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m,\ m \geq 2$$

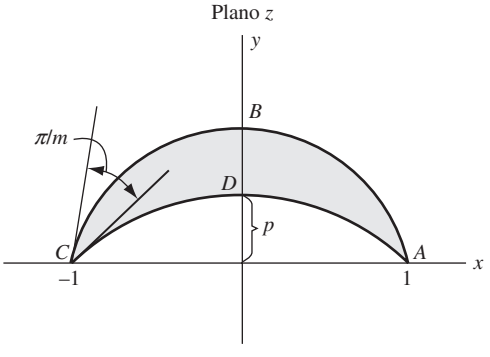


Figura 8-27

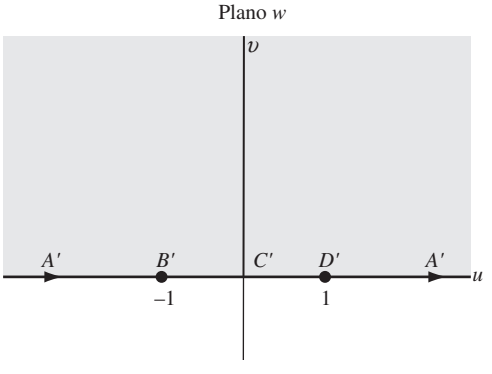


Figura 8-28

www.FreeLibros.me

A-8 Semiplano con círculo eliminado $w = \coth(\pi/z)$

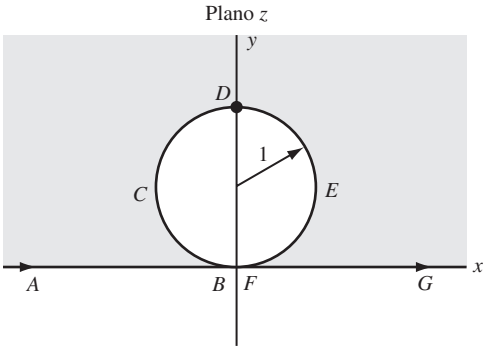


Figura 8-29

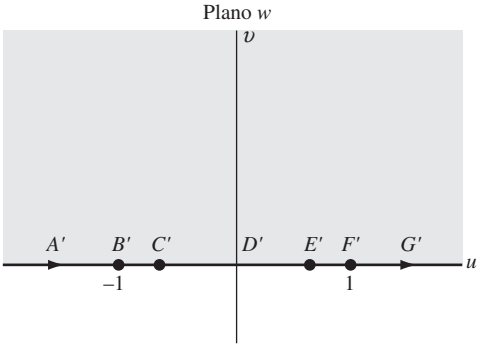


Figura 8-30

A-9 Exterior de una parábola $y^2 = 4p(p - x)$ $w = i(\sqrt{z} - \sqrt{p})$

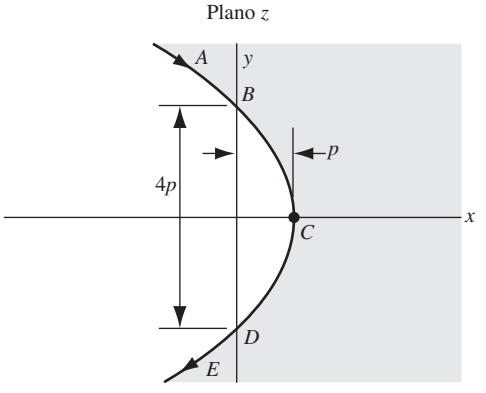


Figura 8-31

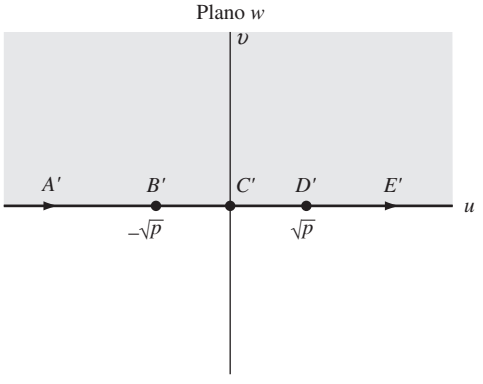


Figura 8-32

A-10 Interior de una parábola $y^2 = 4p(p - x)$ $w = e^{\pi i\sqrt{x/p}}$

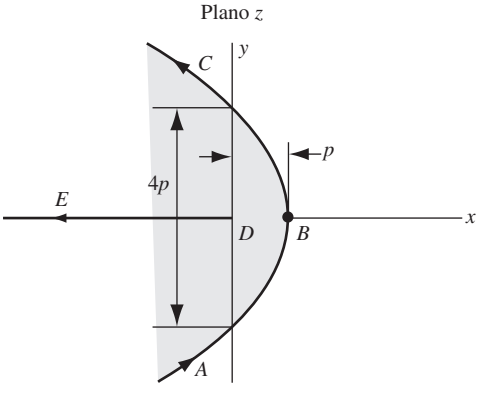


Figura 8-33

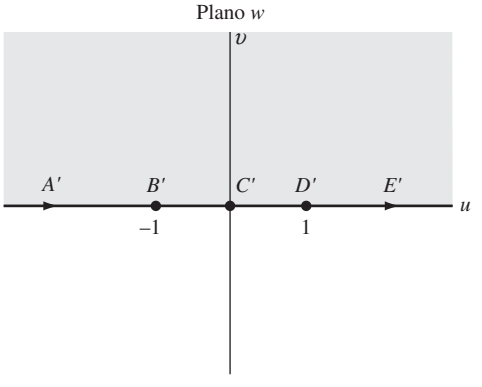


Figura 8-34

www.FreeLibros.me

A-11 Plano con dos cortes paralelos semiinfinitos $\qquad w = -\pi i + 2\ln z - z^2$

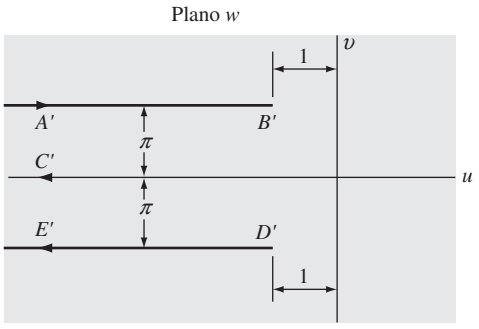


Figura 8-35

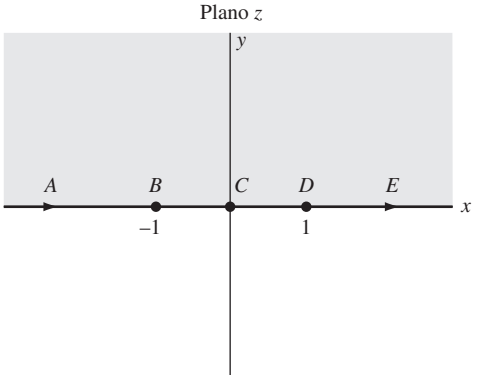


Figura 8-36

A-12 Canal con curva en ángulo recto $\qquad w = \dfrac{2}{\pi}\{\tanh^{-1} p\sqrt{z} - p\tan^{-1}\sqrt{z}\}$

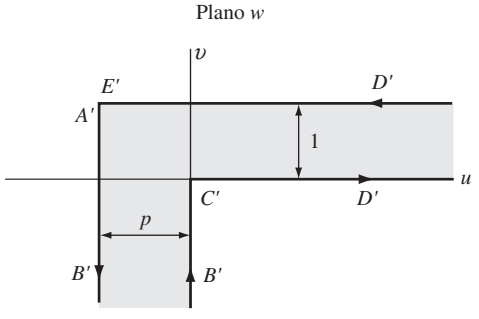


Figura 8-37

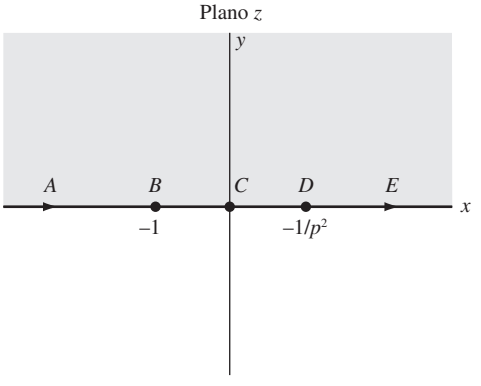


Figura 8-38

A-13 Interior de un triángulo $\qquad w = \displaystyle\int_0^z t^{\alpha/\pi-1}(1-t)^{\beta/\pi-1}\,dt$

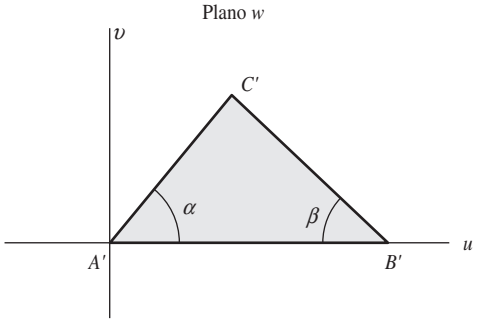


Figura 8-39

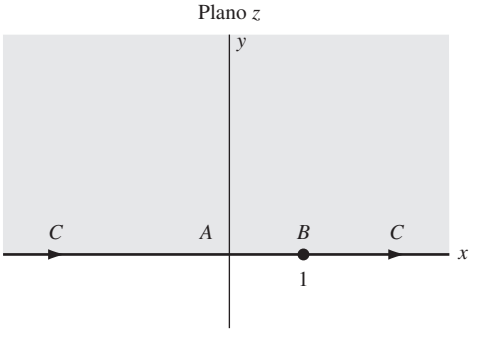


Figura 8-40

www.FreeLibros.me

A-14 Interior de un rectángulo

$$w = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\ 0 < k < 1$$

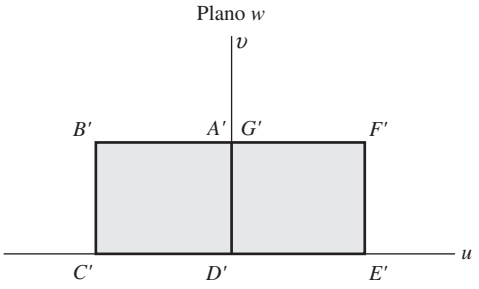


Figura 8-41

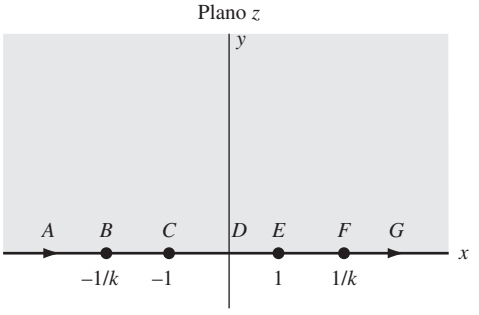


Figura 8-42

B. Transformaciones en/sobre el círculo unitario

B-1 Exterior del círculo unitario

$$w = \frac{1}{z}$$

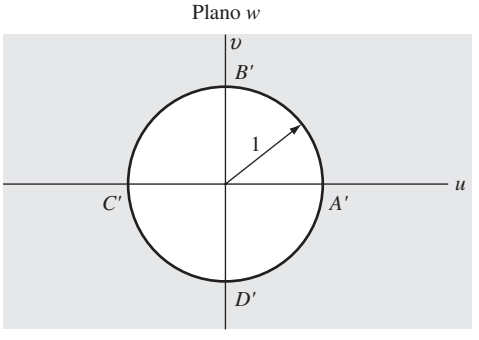


Figura 8-43

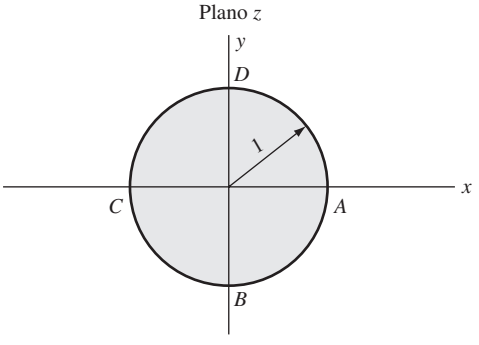


Figura 8-44

B-2 Exterior de una elipse

$$w = \frac{1}{2}(ze^{-\alpha} + z^{-1}e^{\alpha})$$

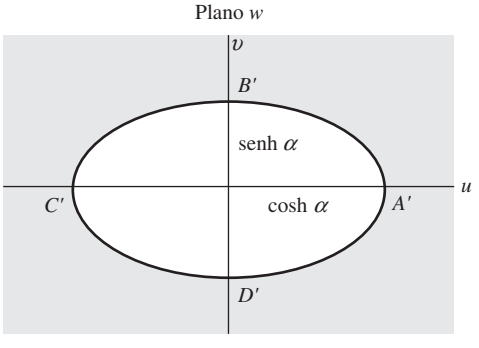


Figura 8-45

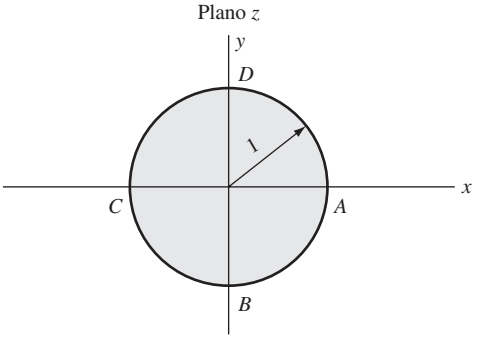


Figura 8-46

www.FreeLibros.me

B-3 Exterior de una parábola $y^2 = 4p(p - x)$ $\qquad w = 2\sqrt{\dfrac{p}{z}} - 1$

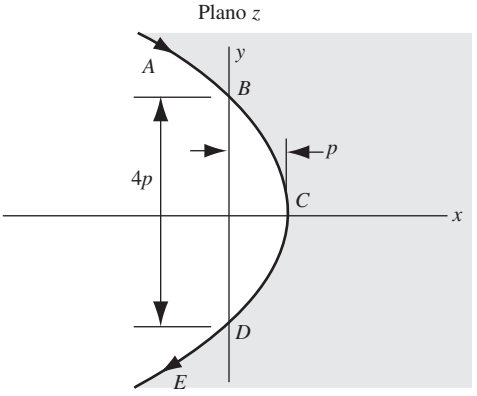


Figura 8-47

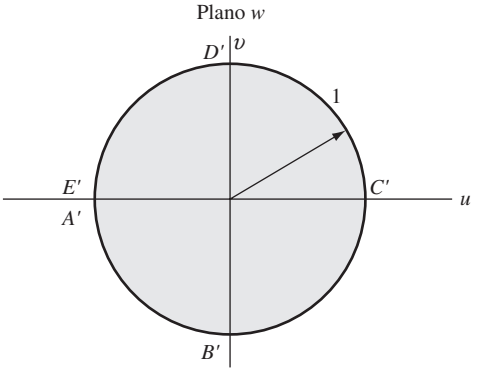


Figura 8-48

B-4 Interior de una parábola $y^2 = 4p(p - x)$ $\qquad w = \tan^2 \dfrac{\pi}{4}\sqrt{\dfrac{z}{p}}$

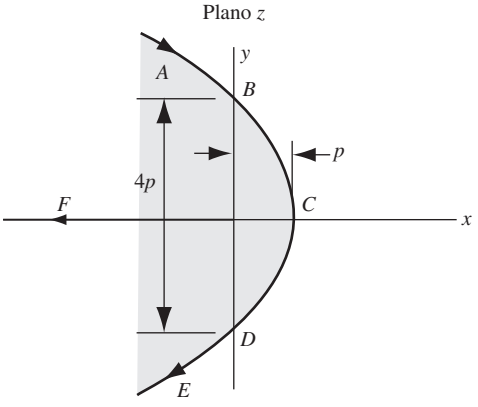


Figura 8-49

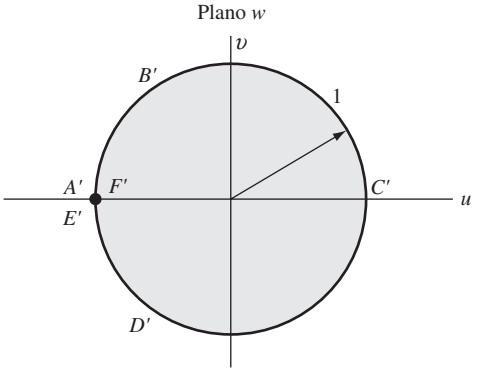


Figura 8-50

C. Transformaciones diversas

C-1 Banda semiinfinita de anchura a sobre cuarto de plano $\qquad w = \operatorname{sen}\dfrac{\pi z}{2a}$

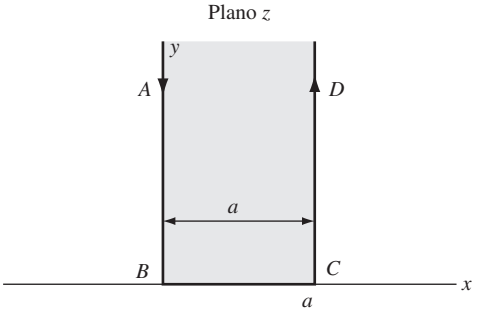


Figura 8-51

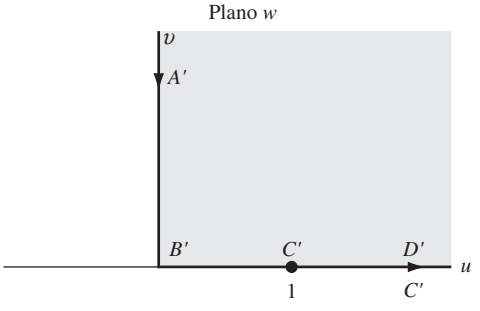


Figura 8-52

www.FreeLibros.me

C-2 Interior de un círculo sobre un cardioide $w = z^2$

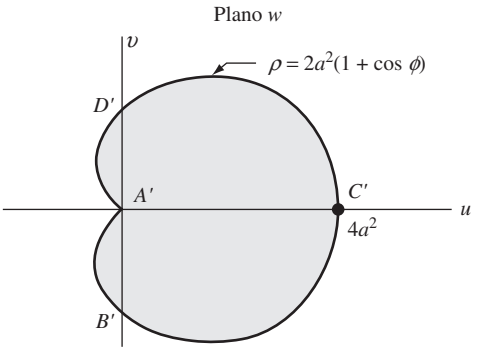


Figura 8-53

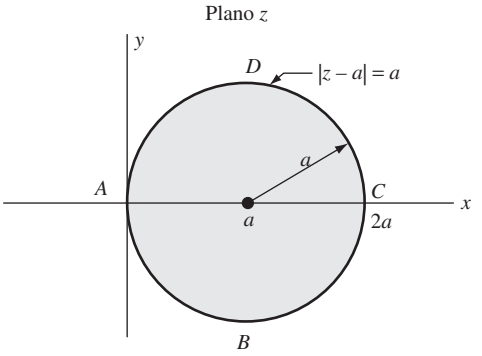


Figura 8-54

C-3 Anillo sobre un rectángulo $w = \ln z$

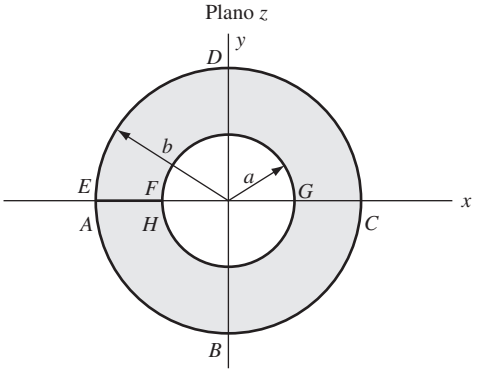


Figura 8-55

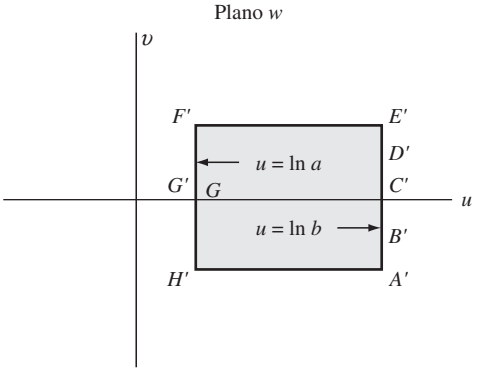


Figura 8-56

C-4 Banda semiinfinita sobre una banda infinita $w = \ln \coth\left(\frac{z}{2}\right)$

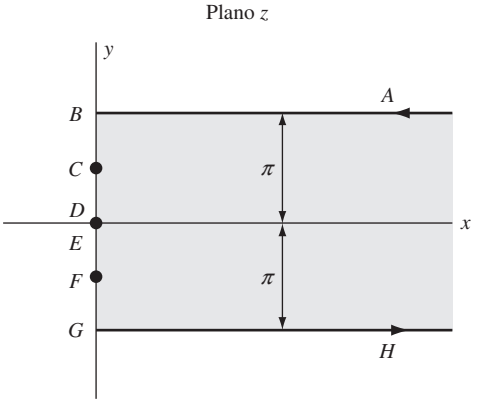


Figura 8-57

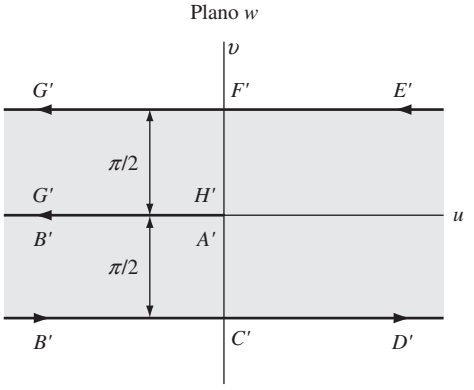


Figura 8-58

www.FreeLibros.me

C-5 Banda infinita sobre plano con dos cortes semiinfinitos $w = z + e^z$

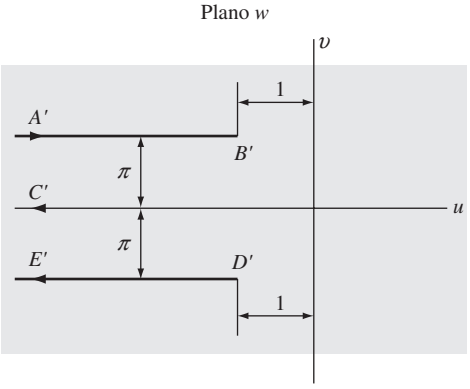


Figura 8-59

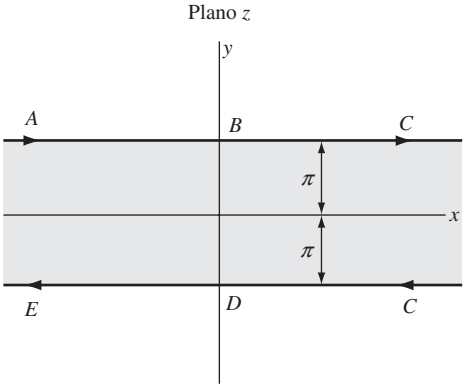


Figura 8-60

PROBLEMAS RESUELTOS

TRANSFORMACIONES

8.1. Sea $\mathcal{R}$ la región rectangular del plano z [figura 8-61], limitada por $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 1$. Determine la región $\mathcal{R}'$ del plano w a la que se lleva la región $\mathcal{R}$ con las transformaciones:

a) $w = z + (1 - 2i)$, *b*) $w = \sqrt{2}e^{\pi i/4}z$, *c*) $w = \sqrt{2}e^{\pi i/4}z + (1 - 2i)$.

Solución

a) Sea $w = z + (1 - 2i)$. Así, $u + iv = x + iy + 1 - 2i = (x + 1) + i(y - 2)$ y $u = x + 1$, $v = y - 2$.

La recta $x = 0$ se lleva a $u = 1$; $y = 0$ se lleva a $v = -2$; $x = 2$ se lleva a $u = 3$; $y = 1$ se lleva a $v = -1$ [figura 8-62]. De manera similar se muestra que cada punto de $\mathcal{R}$ se lleva a uno y sólo un punto de $\mathcal{R}'$ y vice-versa.

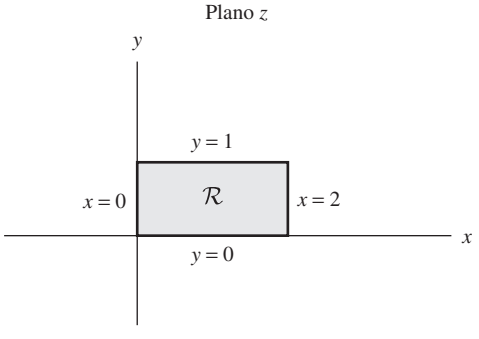


Figura 8-61

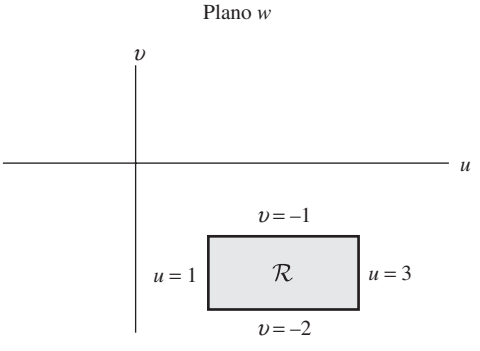


Figura 8-62

Esta transformación o aplicación realiza una *traslación* del rectángulo. En general, $w = z + \beta$ lleva a cabo una traslación de cualquier región.

www.FreeLibros.me

b) Sea $w = \sqrt{2}e^{\pi i/4}z$. Así, $u + iv = (1 + i)(x + iy) = x - y + i(x + y)$ y $u = x - y$, $v = x + y$.

La recta $x = 0$ se lleva a $u = -y$, $v = y$ o $u = -v$; $y = 0$ a $u = x$, $v = x$ o $u = v$; $x = 2$ a $u = 2 - y$, $v = 2 + y$ o $u + v = 4$; $y = 1$ a $u = x - 1$, $v = x + 1$ o $v - u = 2$ [figura 8-64].

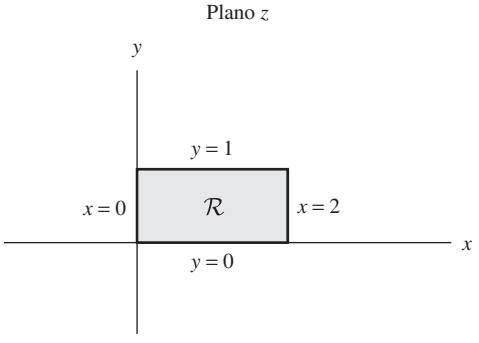


Figura 8-63

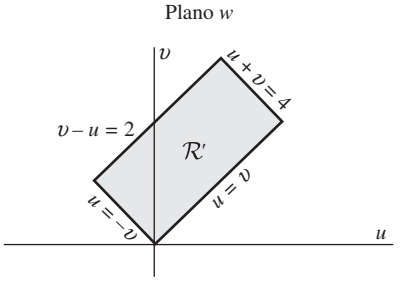


Figura 8-64

Mediante esta aplicación se efectúa una *rotación* de $\mathcal{R}$ (en un ángulo de $\pi/4$ o 45°) y una *elongación* de las longitudes (de magnitud $\sqrt{2}$). En general, la transformación $w = az$ realiza una rotación y elongación de una región.

c) Sea $w = \sqrt{2}e^{\pi i/4}z + (1 - 2i)$. Así, $u + iv = (1 + i)(x + iy) + 1 - 2i$ y $u = x - y + 1$, $v = x + y - 2$.

Las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 1$ se llevan, respectivamente, a $u + v = -1$, $u - v = 3$, $u + v = 3$, $u - v = 1$ [figura 8-66].

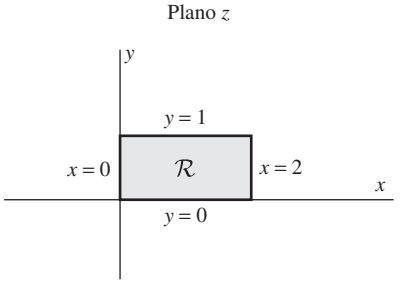


Figura 8-65

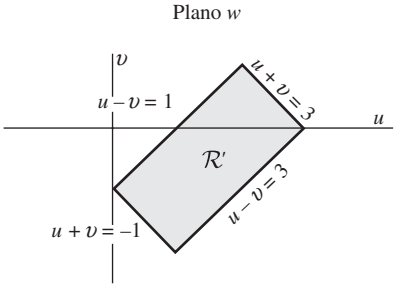


Figura 8-66

Mediante esta aplicación se lleva a cabo, como en *b*), una rotación y una elongación, y una subsecuente traslación. En general, la transformación $w = \alpha z + \beta$ realiza una rotación, una elongación y una traslación. Esto se considera dos aplicaciones sucesivas: $w = \alpha z_1$ (rotación y elongación) y $z_1 = z + \beta/\alpha$ (traslación).

8.2. Determine la región del plano w a la que se lleva cada una de las regiones siguientes mediante la transformación $w = z^2$. *a*) Primer cuadrante del plano z. *b*) Región limitada por $x = 1$, $y = 1$ y $x + y = 1$.

Solución

a) Sea $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\phi}$. Así, si $w = z^2$, $\rho e^{i\theta} = r^2 e^{2i\theta}$ y $\rho = r^2$, $\phi = 2\theta$. Por tanto, los puntos del plano z en (r, θ) se rotan un ángulo 2θ. Como los puntos del primer cuadrante [figura 8-67] del plano z ocupan la región $0 \le \theta \le \pi/2$, estos puntos se llevan a $0 \le \phi \le \pi$, o el semiplano superior del plano w [véase la figura 8-68].

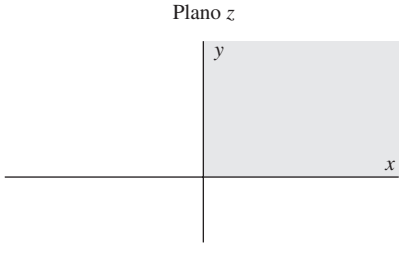


Figura 8-67

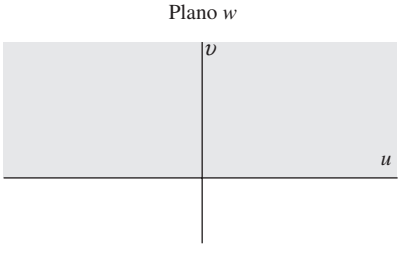


Figura 8-68

www.FreeLibros.me

b) Como $w = z^2$ equivale a $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, se ve que $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Después se lleva la recta $x = 1$ a $u = 1 - y^2$, $v = 2y$ o $u = 1 - v^2/4$; la recta $y = 1$ a $u = x^2 - 1$, $v = 2x$ o $u = v^2/4 - 1$; la recta $y + x = 1$ o $y = 1 - x$ a $u = x^2 - (1 - x)^2 = 2x - 1$, $v = 2x(1 - x) = 2x - 2x^2$ o $v = \frac{1}{2}(1 - u^2)$ al eliminar x.

Estas regiones se muestran sombreadas en las figuras 8.69 y 8.70, donde los puntos A, B, C se llevan a los puntos A', B', C'. Observe que los ángulos del triángulo ABC son iguales, respectivamente, a los ángulos del triángulo curvilíneo $A'B'C'$. Esto se debe a que esta transformación es *conforme*.

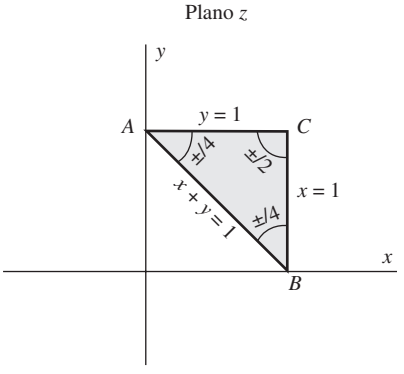


Figura 8-69

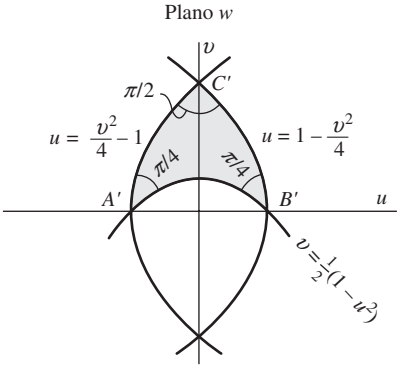


Figura 8-70

TRANSFORMACIONES CONFORMES

8.3. Considere la transformación $w = f(z)$ en la que $f(z)$ es analítica en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$. Demuestre que, con esta transformación, la tangente en z_0 a cualquier curva C del plano z que pase por z_0 [figura 8-71] se rota un ángulo $\alpha = \arg f'(z_0)$ [figura 8-8].

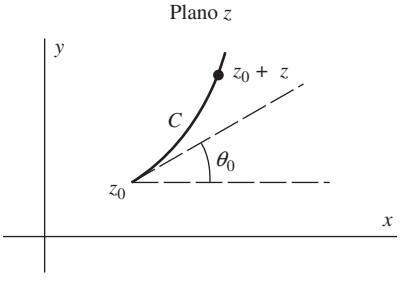


Figura 8-71

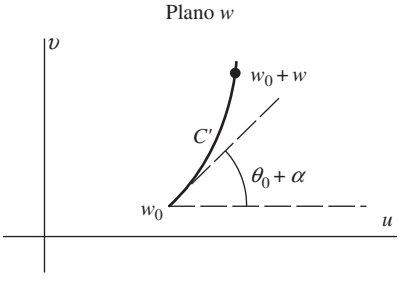


Figura 8-72

Solución

Cuando un punto se mueve de z_0 a $z_0 + \Delta z$ a lo largo de la curva C, su punto imagen se mueve a lo largo de C' en el plano w de w_0 a $w_0 + \Delta w$. Si el parámetro con que se describe la curva es t, entonces, correspondiente a la trayectoria $z = z(t)$ [o $x = x(t)$, $y = y(t)$] en el plano z, se tiene una trayectoria $w = w(t)$ [o $u = u(t)$, $v = v(t)$] en el plano w.

Las derivadas dz/dt y dw/dt representan vectores tangentes a puntos correspondientes sobre C y C'.

Ahora

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = f'(z)\frac{dz}{dt}$$

y, en particular en z_0 y w_0,

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0} = f'(z_0)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0} \tag{1}$$

www.FreeLibros.me

siempre que $f(z)$ sea analítica en $z = z_0$. Se escribe

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0} = \rho_0 e^{i\phi_0}, \qquad f'(z) = Re^{i\alpha}, \qquad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0} = r_0 e^{i\theta_0}$$

y se tiene, de acuerdo con (1),

$$\rho_0 e^{i\phi_0} = Rr_0 e^{i(\theta_0+\alpha)} \tag{2}$$

de manera que, como se buscaba,

$$\phi_0 = \theta_0 + \alpha = \theta_0 + \arg f'(z_0) \tag{3}$$

Observe que si $f'(z_0) = 0$, α es indeterminada. Los puntos en los que $f'(z) = 0$ se conocen como *puntos críticos.*

8.4. Demuestre que con la transformación $w = f(z)$ el ángulo entre dos curvas C_1 y C_2 que pasan por el punto z_0 del plano z [véanse las figuras 8-1 y 8-2 de la página 243] se conserva [en magnitud y en sentido], es decir, esta transformación es conforme si $f(z)$ es analítica en z_0 y $f'(z) \neq 0$.

Solución

De acuerdo con el problema 8.3, cada curva se rota en un ángulo $\arg f'(z_0)$. Por tanto, en esta transformación, el ángulo entre estas curvas debe conservarse tanto en magnitud como en sentido.

JACOBIANO DE UNA TRANSFORMACIÓN

8.5. Sea $w = f(z) = u + iv$ analítica en una región $\mathcal{R}$. Demuestre que

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = |f'(z)|^2$$

Solución

Si $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$, entonces, las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

se satisfacen en $\mathcal{R}$. Por tanto,

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$= \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 = |f'(z)|^2$$

con el problema 3.5.

8.6. Encuentre el jacobiano de la transformación *a*) en el problema 8.1*c*), *b*) en el problema 8.2, e interprete geométricamente los resultados.

Solución

a) Sea $w = f(z) = \sqrt{2}e^{\pi i/4}z + (1 - 2i)$. Así, de acuerdo con el problema 8.5, el jacobiano es

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = |f'(z)|^2 = |\sqrt{2}e^{\pi i/4}|^2 = 2$$

Geométricamente, esto muestra que toda región del plano z [en particular, la región rectangular $\mathcal{R}$ de la figura 8-65, página 257] se lleva a una región que tiene el doble de su área. El factor $|f'(z)|^2 = 2$ se conoce como *factor de magnificación.*

www.FreeLibros.me

Otro método. Esta transformación equivale a $u = x - y$, $v = x + y$ y, por tanto,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

b) Sea $w = f(z) = z^2$. Así,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2 = |2z|^2 = |2x + 2iy|^2 = 4(x^2 + y^2)$$

Geométricamente, una región pequeña de área A del plano z y con una distancia aproximada al origen r se llevaría a una región de área $4r^2A$ del plano w. Por tanto, las regiones alejadas del origen se llevarían a regiones con un área mayor que las regiones similares cercanas al origen.

Observe que, en el punto crítico $z = 0$, el jacobiano es cero. En este punto, la transformación no es conforme.

8.7. Demuestre que $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$.

Solución

Correspondiente a la transformación

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y) \tag{1}$$

cuyo jacobiano es $\partial(u, v)/\partial(x, y)$, se tiene la transformación inversa

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v) \tag{2}$$

cuyo jacobiano es $\partial(x, y)/\partial(u, v)$. De acuerdo con (1),

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

De acuerdo con (2),

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

Por tanto,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right\} + \frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right\} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right\}du + \left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right\}dv$$

de donde

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 0 \tag{3}$$

De manera similar, se encuentra

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 0 \tag{4}$$

www.FreeLibros.me

Con (3) y (4), y la regla para el producto de determinantes (véase problema 8.94), se tiene

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)}\cdot\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

8.8. Analice el problema 8.7 si u y v son las partes real e imaginaria de una función analítica $f(z)$.

Solución

En este caso, de acuerdo con el problema 8.5, $\partial(u,\ v)/\partial(x,\ y)=|f'(z)|^2$. Si la función inversa de $w=f(z)$ es $z=g(w)$, que se supone unívoca y analítica, entonces $\partial(x,\ y)/\partial(u,\ v)=|g'(w)|^2$. El resultado del problema 8.7 es consecuencia de que

$$|f'(z)|^2|g'(w)|^2=\left|\frac{dw}{dz}\right|^2\cdot\left|\frac{dz}{dw}\right|^2=1$$

pues $dw/dz=1/(dz/dw)$.

TRANSFORMACIONES BILINEALES O FRACCIONARIAS

8.9. Encuentre la transformación bilineal que lleva los puntos z_1, z_2, z_3 del plano z, respectivamente, a los puntos w_1, w_2, w_3 del plano w.

Solución

Si w_k corresponde a z_k, $k=1, 2, 3$, se tiene

$$w-w_k=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}-\frac{\alpha z_k+\beta}{\gamma z_k+\delta}=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-z_k)}{(\gamma z+\delta)(\gamma z_k+\delta)}$$

Así,

$$w-w_1=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-z_1)}{(\gamma z+\delta)(\gamma z_1+\delta)},\qquad w-w_3=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-z_3)}{(\gamma z+\delta)(\gamma z_3+\delta)}\tag{1}$$

Se sustituye w por w_2 y z por z_2,

$$w_2-w_1=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z_2-z_1)}{(\gamma z_2+\delta)(\gamma z_1+\delta)},\qquad w_2-w_3=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z_2-z_3)}{(\gamma z_2+\delta)(\gamma z_3+\delta)}\tag{2}$$

Mediante la división de (1) entre (2), y si se supone que $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$,

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\tag{3}$$

Se despeja w en términos de z y se obtiene la transformación buscada. El lado derecho de la igualdad (3) se conoce como *cociente cruzado* de z_1, z_2, z_3 y z.

www.FreeLibros.me

8.10. Encuentre una transformación bilineal que lleve los puntos $z = 0, -i, -1$ a $w = i, 1, 0$, respectivamente.

Solución

Método 1. Como $w = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$, se tiene

$$i = \frac{\alpha(0) + \beta}{\gamma(0) + \delta} \tag{1}$$

$$1 = \frac{\alpha(-i) + \beta}{\gamma(-i) + \delta} \tag{2}$$

$$0 = \frac{\alpha(-1) + \beta}{\gamma(-1) + \delta} \tag{3}$$

De (3), $\beta = \alpha$. De (1), $\delta = \beta/i = -i\alpha$. De (2), $\gamma = i\alpha$. De este modo,

$$w = \frac{\alpha z + \alpha}{i\alpha z - i\alpha} = \frac{1}{i}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = -i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

Método 2. Emplee el problema 8.9. Así,

$$\frac{(w-i)(1-0)}{(w-0)(1-i)} = \frac{(z-0)(-i+1)}{(z+1)(-i-0)}$$

Se despeja,

$$w = -i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

8.11. Sea z_0 un punto en el semiplano superior del plano z. Muestre que la transformación bilineal $w = e^{i\theta_0}\{(z - z_0)/(z - \bar{z}_0)\}$ lleva el semiplano superior del plano z al interior del círculo unitario en el plano w, es decir, a $|w| \leq 1$.

Solución

Se tiene

$$|w| = \left|e^{i\theta_0}\left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\right)\right| = \left|\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\right|$$

De acuerdo con la figura 8-73, si z está en el semiplano superior, $|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0|$, en donde la igualdad se satisface si y sólo si z está en el eje x. Por tanto, $|w| \leq 1$, como se deseaba.
Esta transformación también se obtiene directamente (véase el problema 8.61).

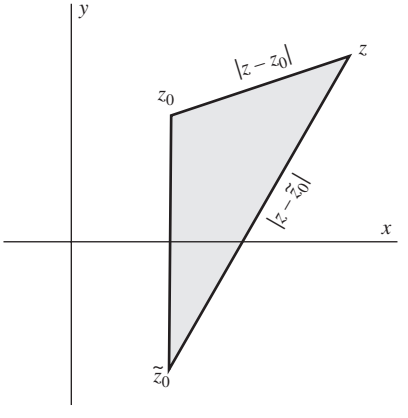


Figura 8-73

www.FreeLibros.me

8.12. Encuentre una transformación bilineal que lleve el semiplano superior del plano z al círculo unidad del plano w de manera que $z = i$ se lleve a $w = 0$, y el punto al infinito, a $w = -1$.

Solución

Se tiene que $w = 0$ debe corresponder a $z = i$, y $w = -1$, a $z = \infty$. Así, de $w = e^{i\theta_0}\{(z - z_0)/(z - \bar{z}_0)\}$, se tiene $0 = e^{i\theta_0}\{(i - z_0)/(i - \bar{z}_0)\}$, de manera que $z_0 = i$. Para $z = \infty$, se tiene $w = e^{i\theta_0} = -1$. Por tanto, la transformación buscada es

$$w = (-1)\left(\frac{z - i}{z + i}\right) = \frac{i - z}{i + z}$$

En las figuras 8-74 y 8-75 se describe esta situación.

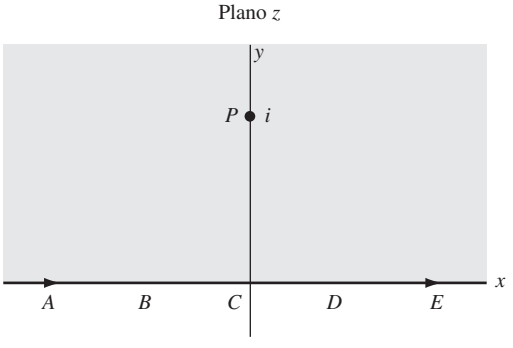


Figura 8-74

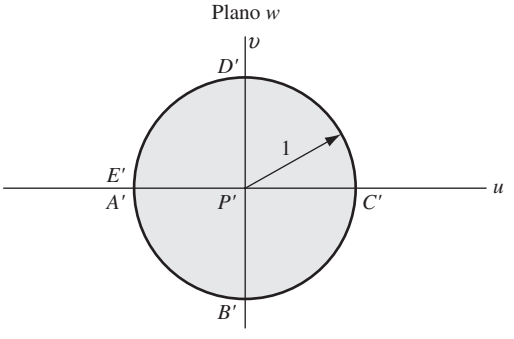


Figura 8-75

8.13. Encuentre los puntos fijos o invariantes de la transformación $w = (2z - 5)/(z + 4)$.

Solución

Los puntos fijos son las soluciones de $z = (2z - 5)/(z + 4)$ o $z^2 + 2z + 5 = 0$, es decir, $z = -1 \pm 2i$.

8.14. Demuestre que la transformación bilineal puede considerarse una combinación de las transformaciones de traslación, rotación, estiramiento e inversión.

Solución

Mediante división,

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \lambda + \frac{\mu}{z + \nu}$$

donde $\lambda = \alpha/\gamma$, $\mu = (\beta\gamma - \alpha\delta)/\gamma^2$ y $\nu = \delta/\gamma$ son constantes. Esta transformación equivale a $\zeta = z + \nu$, $\tau = 1/\zeta$ y $w = \lambda + \mu\tau$, que son combinaciones de transformaciones de traslación, rotación, estiramiento e inversión.

8.15. Demuestre que la transformación bilineal transforma círculos del plano z en círculos del plano w, donde por círculos se entiende también los círculos de radio infinito, que son líneas rectas.

Solución

De acuerdo con el problema 1.44, la ecuación general de un círculo en el plano z es $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$, donde $A > 0$, $C > 0$ y B es un complejo. Si $A = 0$, la circunferencia se reduce a una línea recta.

www.FreeLibros.me

Con la transformación de inversión, $w = 1/z$ o $z = 1/w$, esta ecuación se convierte en $Cw\overline{w} + \overline{B}w + B\overline{w} + A = 0$, un círculo en el plano w.

Con la transformación de rotación y estiramiento, $w = az$ o $z = w/a$, esta ecuación se convierte en $Aw\overline{w} + (B\overline{a})w + (\overline{B}a)\overline{w} + Ca\overline{a} = 0$, también un círculo.

De manera similar puede mostrarse, analítica o geométricamente, que con la transformación de traslación, los círculos se transforman en círculos.

Como, de acuerdo con el problema 8.14, una transformación bilineal se considera una combinación de traslación, rotación, estiramiento e inversión, se tiene el resultado deseado.

APLICACIONES ESPECIALES

8.16. Verifique las entradas *a*) A-2, página 248, *b*) A-4, página 249, *c*) B-1, página 253.

Solución

a) Consulte las figuras 8-13 y 8-14, página 248.

Si $z = x + iy$, entonces

$$w = u + iv = e^{\pi z/a} = e^{\pi(x+iy)/a} = e^{\pi x/a}(\cos \pi y/a + i \operatorname{sen} \pi y/a)$$

o $u = e^{\pi x/a} \cos \pi y/a, \quad v = e^{\pi x/a} \operatorname{sen} \pi y/a.$

La recta $y = 0$ [el eje real en el plano z; DEF en la figura 8-13] se lleva a $u = e^{\pi x/a}$, $v = 0$ [eje real positivo en el plano w; $D'E'F'$ en la figura 8-14]. El origen E [$z = 0$] se lleva a E' [$w = 1$] y D [$x = -\infty$, $y = 0$] y F [$x = +\infty$, $y = 0$] se llevan a D' [$w = 0$] y F' [$w = \infty$], respectivamente.

La recta $y = a$ [ABC en la figura 8-13] se lleva a $u = -e^{\pi x/a}$, $v = 0$ [eje real negativo en el plano w; $A'B'C'$ en la figura 8-14]. Los puntos A [$x = +\infty$, $y = a$] y C [$x = -\infty$, $y = a$] se llevan a A' [$w = -\infty$] y C' [$w = 0$], respectivamente.

Cada punto tal que $0 < y < a$, $-\infty < x < \infty$ se lleva a un solo punto del plano uv para el que $v > 0$.

b) Consulte las figuras 8-21 y 8-22, página 249.

Si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$w = u + iv = \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{a}{2}\left(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}\right) = \frac{a}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + \frac{ia}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta$$

y

$$u = \frac{a}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \qquad v = \frac{a}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta$$

La semicircunferencia BCD [$r = 1$, $0 \le \theta \le \pi$] se lleva al segmento de recta $B'C'D'$ [$u = a\cos\theta$, $v = 0$, $0 \le \theta \le \pi$, es decir, $-a \le u \le a$].

La recta DE [$\theta = 0$, $r > 1$] se lleva a la recta $D'E'$ [$u = (a/2)\{r + (1/r)\}$, $v = 0$]; la recta AB [$\theta = \pi$, $r > 1$] se lleva a la recta $A'B'$ [$u = -(a/2)\{r + (1/r)\}$, $v = 0$].

Cada punto del plano z para el que $r \ge 1$ y $0 < \theta < \pi$ se lleva a un solo punto del plano uv para el que $v \ge 0$.

c) Consulte las figuras 8-43 y 8-44, página 253.

Si $z = re^{i\theta}$ y $w = \rho e^{i\phi}$, entonces $w = 1/z$ se convierte en $\rho e^{i\phi} = 1/re^{i\theta} = (1/r)e^{-i\theta}$, de donde $\rho = 1/r$, $\phi = -\theta$.

La circunferencia $ABCD$ [$r = 1$] en el plano z se lleva a la circunferencia $A'B'C'D'$ [$\rho = 1$] del plano w. Observe que $ABCD$ se describe en sentido contrario al de las manecillas del reloj; en cambio, $A'B'C'D'$ se describe en el sentido de las manecillas del reloj.

Todo punto interior de la circunferencia $ABCD$ [$r < 1$] se lleva a un punto solo exterior a la circunferencia $A'B'C'D'$ [$\rho > 1$].

www.FreeLibros.me

TRANSFORMACIÓN DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

8.17. Establezca la validez de la transformación de Schwarz-Christoffel.

Solución

Hay que mostrar que la función obtenida de

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \cdots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} \tag{1}$$

lleva el eje real del plano z a un polígono dado del plano w [figuras 8-76 y 8-77].

Para mostrar esto, observe que de (1) se tiene

$$\begin{aligned} \arg dw = \arg dz + \arg A + \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right) \arg(z - x_1) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right) \arg(z - x_2) + \cdots \\ + \left(\frac{\alpha_n}{\pi} - 1\right) \arg(z - x_n) \end{aligned} \tag{2}$$

Suponga que, a medida que z se mueve a lo largo del eje real, por la izquierda, hacia x_1, w se mueve a lo largo de uno de los lados del polígono hacia w_1. Cuando z pasa del lado izquierdo de x_1 al lado derecho de x_1, $\theta_1 = \arg(z - x_1)$ cambia de π a 0, mientras todos los demás términos en (2) permanecen constantes. Por tanto, arg dw decrece en $(\alpha_1/\pi - 1) \arg(z - x_1) = (\alpha_1/\pi - 1)\pi = \alpha_1 - \pi$ o, lo que es lo mismo, crece en $\pi - \alpha_1$ [un incremento en dirección contraria a la de las manecillas del reloj].

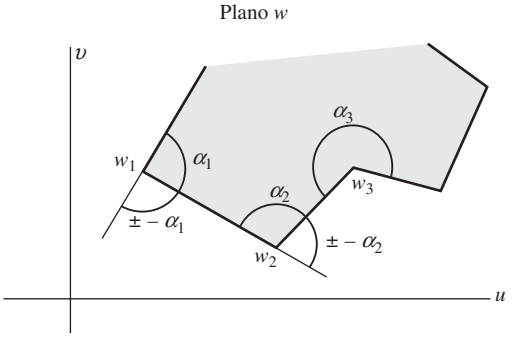


Figura 8-76

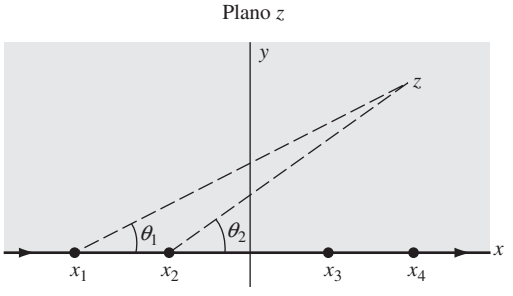


Figura 8-77

De esto se sigue que, al pasar por w_1, la dirección cambia en un ángulo $\pi - \alpha_1$ y, por tanto, ahora w se mueve a lo largo del lado w_1w_2 del polígono.

Cuando z pasa a través de x_2, $\theta_1 = \arg(z - x_1)$ y $\theta_2 = \arg(z - x_2)$ cambia de π a 0, mientras todos los demás términos permanecen constantes. Por tanto, en el plano w se efectúa otro cambio de dirección en un ángulo $\pi - a_2$. Al continuar este proceso, se ve que mientras z recorre el eje x, w recorre el polígono, y a la inversa.

En realidad puede demostrarse que el semiplano superior se lleva, de acuerdo con (1), al interior del polígono (si es cerrado) [véase el problema 8.26].

8.18. Demuestre que, en los polígonos cerrados, la suma de los exponentes $(\alpha_1/\pi) - 1, (\alpha_2/\pi) - 1, \ldots, (\alpha_n/\pi) - 1$ en la transformación de Schwarz-Christoffel (8.9) u (8.10), página 247, es igual a -2.

Solución

La suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono cerrado es 2π. Así,

$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + \cdots + (\pi - \alpha_n) = 2\pi$$

y al dividir entre $-\pi$ se obtiene, como se buscaba,

$$\left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{\alpha_n}{\pi} - 1\right) = -2$$

www.FreeLibros.me

8.19. Suponga que en la transformación de Schwarz-Christoffel (8.9) u (8.10), página 247, se elige un punto al infinito, por ejemplo x_n. Muestre que el último factor no está presente.

Solución

En (8.9), página 247, sea $A = K/(-x_n)^{\alpha_n/\pi-1}$, donde K es una constante. Así, el lado derecho de (9) se escribe

$$K(z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z-x_2)^{\alpha_2/\pi-1}\cdots(z-x_{n-1})^{\alpha_{n-1}/\pi-1}\left(\frac{x_n-z}{x_n}\right)^{\alpha_n/\pi-1}$$

Cuando $x_n \to \infty$, el último factor se aproxima a 1, lo que equivale a eliminar el factor.

8.20. Determine una función que lleve el semiplano superior del plano z a cada una de las regiones del plano w que se indican.

Solución

a)

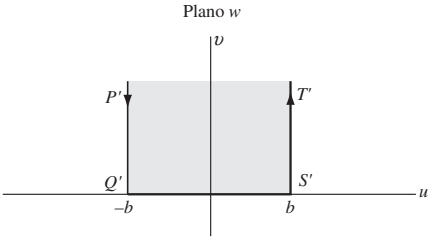


Figura 8-78

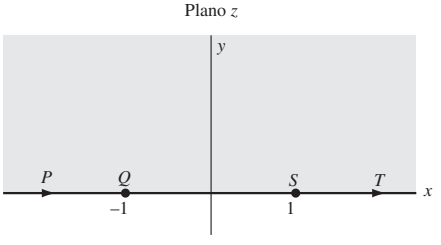


Figura 8-79

Los puntos P, Q, S y T [figura 8-79] se llevan, respectivamente, a los puntos P', Q', S' y T' [figura 8-78]. P', Q', S' y T' pueden considerarse un caso límite de un polígono (un triángulo) con dos vértices en Q' y S', y el tercer vértice P' o T' al infinito.

De acuerdo con la transformación de Schwarz-Christoffel, como los ángulos en Q' y en S' son iguales a $\pi/2$, se tiene

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{[(\pi/2)/\pi]-1}(z-1)^{[(\pi/2)/\pi]-1} = \frac{A}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{K}{\sqrt{1-z^2}}$$

Se integra,

$$w = K\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + B = K\,\mathrm{sen}^{-1}\,z + B$$

Cuando $z = 1$, $w = b$. Por tanto,

$$b = K\,\mathrm{sen}^{-1}(1) + B = K\pi/2 + B \tag{1}$$

Cuando $z = -1$, $w = -b$. Por tanto,

$$-b = K\,\mathrm{sen}^{-1}(-1) + B = -K\pi/2 + B \tag{2}$$

Se resuelven al mismo tiempo (1) y (2), y se encuentra que $B = 0$, $K = 2b/\pi$. Por tanto,

$$w = \frac{2b}{\pi}\,\mathrm{sen}^{-1}\,z$$

El resultado equivale a la entrada A-3*a*) de la página 248, si se intercambian w y z, y con $b = a/2$.

www.FreeLibros.me

b)

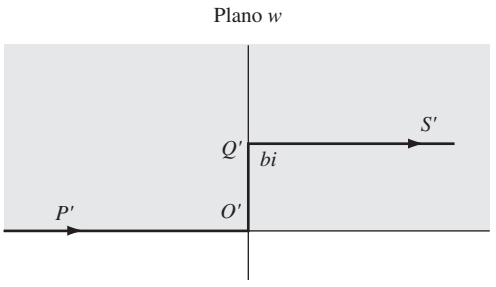


Figura 8-80

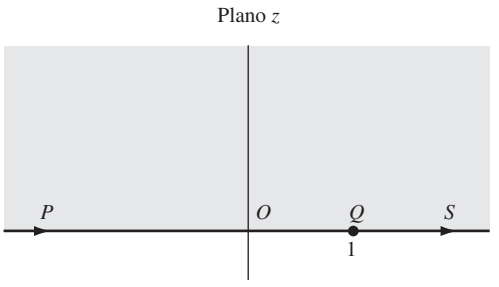


Figura 8-81

Los puntos P, O, Q $[z = 1]$ y S se llevan a los puntos P', O', Q' $[w = bi]$ y S', respectivamente. Observe que P, S, P', S' son puntos al infinito (como indican las flechas), y que O y O' son los orígenes $[z = 0]$ y $[w = 0]$ de los planos z y w. Como los ángulos interiores en O' y Q' son $\pi/2$ y $3\pi/2$, respectivamente, se tiene, de acuerdo con la transformación de Schwarz-Christoffel,

$$\frac{dw}{dz} = A(z-0)^{[(\pi/2)/\pi]-1}(z-1)^{[(3\pi/2)/\pi]-1} = A\sqrt{\frac{z-1}{z}} = K\sqrt{\frac{1-z}{z}}$$

Así,

$$w = K\int\sqrt{\frac{1-z}{z}}\,dz$$

Para integrar esto, sea $z = \operatorname{sen}^2\theta$ y se obtiene

$$\begin{aligned} w &= 2K\int\cos^2\theta\,d\theta = K\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta = K\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right) + B \\ &= K(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + B = K\left(\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{z} + \sqrt{z(1-z)}\right) + B \end{aligned}$$

Si $z = 0$, $w = 0$, de manera que $B = 0$. Cuando $z = 1$, $w = bi$, de manera que $bi = K\pi/2$ o $K = 2bi/\pi$. Por tanto, la transformación buscada es

$$w = \frac{2bi}{\pi}\left(\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{z} + \sqrt{z(1-z)}\right)$$

8.21. Encuentre una transformación que lleve el círculo unitario del plano ζ a un polígono en el plano w.

Solución

El eje x del plano z puede llevarse a un polígono en el plano w mediante la transformación de Schwarz-Christoffel

$$w = A\int(z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z-x_2)^{\alpha_2/\pi-1}\cdots(z-x_n)^{\alpha_n/\pi-1}dz + B \tag{1}$$

y el semiplano superior del plano z al interior del polígono.

Una transformación que lleva el semiplano superior del plano z sobre el círculo unitario en el plano ζ es

$$\zeta = \frac{i-z}{i+z} \tag{2}$$

al sustituir w por ζ y tomar $\theta = \pi$, $z_0 = i$ en la ecuación (8.8) de la página 246. Por tanto, $z = i\{(1-\zeta)/(1+\zeta)\}$ lleva el círculo unitario del plano ζ sobre el semiplano superior del plano z.

www.FreeLibros.me

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llevan, respectivamente, a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ al círculo unitario, se tiene para $k = 1, 2, \ldots, n$.

$$z - x_k = i\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right) - i\left(\frac{1-\zeta_k}{1+\zeta_k}\right) = \frac{-2i(\zeta - \zeta_k)}{(1+\zeta)(1+\zeta_k)}$$

Además, $dz = -2id\zeta/(1+\zeta)^2$. Se sustituye en (1) y simplifica, pues la suma de los exponentes $(\alpha_1/\pi) - 1, (\alpha_2/\pi) - 1, \ldots, (\alpha_n/\pi) - 1$ es -2, y se encuentra la transformación buscada

$$w = A' \int (\zeta - \zeta_1)^{\alpha_1/\pi - 1}(\zeta - \zeta_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \cdots (\zeta - \zeta_n)^{\alpha_n/\pi - 1}\, d\zeta + B$$

donde A' es una nueva constante arbitraria.

TRANSFORMACIONES DE FRONTERAS EN FORMA PARAMÉTRICA

8.22. Sea C una curva en el plano z con ecuaciones paramétricas $x = F(t)$, $y = G(t)$. Muestre que la transformación

$$z = F(w) + iG(w)$$

lleva el eje real del plano w sobre C.

Solución

Suponga que $z = x + iy$, $w = u + iv$. Así, la transformación se escribe

$$x + iy = F(u + iv) + iG(u + iv)$$

Entonces, $v = 0$ [el eje real del plano w] corresponde a $x + iy = F(u) + iG(u)$, es decir, $x = F(u)$ y $y = G(u)$, lo que representa la curva C.

8.23. Encuentre una transformación que lleve el eje real del plano w sobre la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ en el plano z.

Solución

Un conjunto de ecuaciones paramétricas para la elipse es el dado por $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, donde $a > 0$, $b > 0$. Así, de acuerdo con el problema 8.22, la transformación buscada es $z = a \cos w + ib \operatorname{sen} w$.

PROBLEMAS DIVERSOS

8.24. Encuentre una función que lleve el semiplano superior del plano z sobre el interior de un triángulo en el plano w [figura 8-82].

Solución

Considere el semiplano superior del plano z, que aparece sombreado en la figura 8-83. Los puntos P [$z = 0$] y Q [$z = 1$] del eje x se llevan a los puntos P' [$w = 0$] y Q' [$w = 1$] del triángulo, y el tercer punto R [$z = \infty$] se lleva a R'.

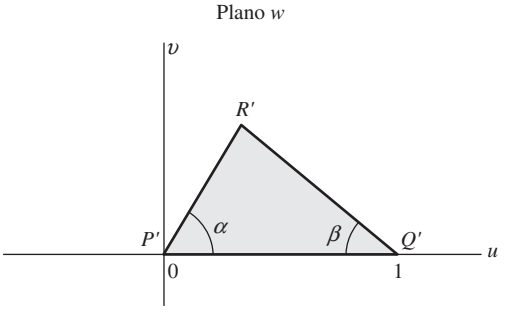


Figura 8-82

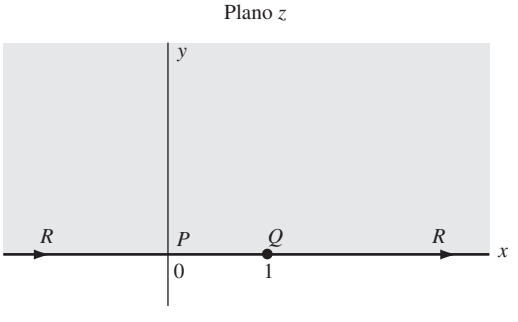


Figura 8-83

www.FreeLibros.me

De acuerdo con la transformación de Schwarz-Christoffel,

$$\frac{dw}{dz} = Az^{\alpha/\pi-1}(z-1)^{\beta/\pi-1} = Kz^{\alpha/\pi-1}(1-z)^{\beta/\pi-1}$$

Después, mediante integración,

$$w = K\int_0^z \zeta^{\alpha/\pi-1}(1-\zeta)^{\beta/\pi-1}\,d\zeta + B$$

Como $w = 0$ cuando $z = 0$, se tiene $B = 0$. Además, como $w = 1$ cuando $z = 1$, se tiene

$$1 = K\int_0^1 \zeta^{\alpha/\pi-1}(1-\zeta)^{\beta/\pi-1}\,d\zeta = \frac{\Gamma(\alpha/\pi)\Gamma(\beta/\pi)}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\pi}\right)}$$

con las propiedades de las funciones beta y gamma [véase el capítulo 10]. Por tanto,

$$K = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\pi}\right)}{\Gamma(\alpha/\pi)\Gamma(\beta/\pi)}$$

y la transformación buscada es

$$w = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\pi}\right)}{\Gamma(\alpha/\pi)\Gamma(\beta/\pi)}\int_0^z \zeta^{\alpha/\pi-1}(1-\zeta)^{\beta/\pi-1}\,d\zeta$$

Observe que esto coincide con la entrada A-13 de la página 252, puesto que la longitud del lado $A'B'$ en la figura 8-39 es

$$\int_0^1 \zeta^{\alpha/\pi-1}(1-\zeta)^{\beta/\pi-1}\,d\zeta = \frac{\Gamma(\alpha/\pi)\Gamma(\beta/\pi)}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\pi}\right)}$$

8.25. *a*) Encuentre una función que lleve el semiplano superior del plano z, de la figura 8-55, sobre la región sombreada del plano w, de la figura 8-84.

b) Analice el caso en que $b \to 0$.

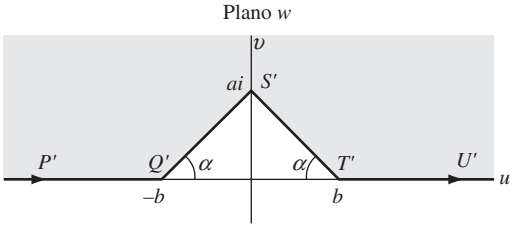


Figura 8-84

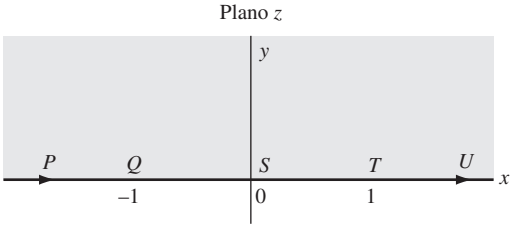


Figura 8-85

Solución

a) Cada uno de los ángulos interiores en Q y T son $\pi - \alpha$, mientras que el ángulo en S es $2\pi - (\pi - 2a) = \pi + 2a$. Así, mediante la transformación de Schwarz-Christoffel, se tiene

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{(\pi-\alpha)/\pi-1}z^{(\pi+2\alpha)/\pi-1}(z-1)^{(\pi-\alpha)/\pi-1} = \frac{Az^{2\alpha/\pi}}{(z^2-1)^{\alpha/\pi}} = \frac{Kz^{2\alpha/\pi}}{(1-z^2)^{\alpha/\pi}}$$

www.FreeLibros.me

Por tanto, al integrar,

$$w = K\int_0^z \frac{\zeta^{2\alpha/\pi}}{(1-\zeta^2)^{\alpha/\pi}}\,d\zeta + B$$

Cuando $z = 0$, $w = ai$; entonces, $B = ai$ y

$$w = K\int_0^z \frac{\zeta^{2\alpha/\pi}}{(1-\zeta^2)^{\alpha/\pi}}\,d\zeta + ai \tag{1}$$

El valor de K se expresa en términos de la función gamma porque $w = b$ para $z = 1$ [problema 8.102]. Se encuentra

$$K = \frac{(b-ai)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{\pi}+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\dfrac{\alpha}{\pi}\right)} \tag{2}$$

b) Conforme $b \to 0$, $\alpha \to \pi/2$ y el resultado del inciso *a*) se reduce a

$$w = ai - ai\int_0^z \frac{\zeta\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = ai\sqrt{1-z^2} = a\sqrt{z^2-1}$$

En este caso, la figura 8-84 se reduce a la figura 8-86. El resultado en este caso se halla directamente a partir de la transformación de Schwarz-Christoffel al considerar $P'Q'S'T'U'$ un polígono con ángulos interiores en Q', S' y T' iguales a $\pi/2$, 2π y $\pi/2$, respectivamente.

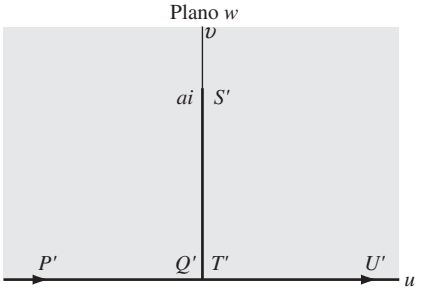


Figura 8-86

8.26. Demuestre que la transformación de Schwarz-Christoffel en el problema 8.17 lleva el semiplano superior sobre el interior del polígono.

Solución

Basta probar que esa transformación lleva el círculo unitario sobre el interior del polígono, pues ya se sabe [problema 8.11] que el semiplano superior puede llevarse sobre el círculo unitario.

Suponga que la función que lleva el círculo unitario del plano z sobre el polígono P en el plano w está dada por $w = f(z)$, donde $f(z)$ es analítica en el interior de C.

Hay que mostrar que a cada punto a en el interior de P corresponde uno y sólo un punto, por ejemplo, z_0, tal que $f(z_0) = a$.

Así, de acuerdo con la fórmula integral de Cauchy, como a está en el interior de P,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_P \frac{dw}{w-a} = 1$$

De este modo, como $w - a = f(z) - a$,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = 1$$

Pero $f(z) - a$ es analítica en el interior de C. Por tanto, de acuerdo con el problema 5.17, se mostró que sólo existe un cero (por ejemplo, z_0) de $f(z) - a$ en el interior de C, es decir, $f(z_0) = a$, como se necesitaba.

www.FreeLibros.me

8.27. Sea C una circunferencia en el plano z con centro en el eje real, y suponga además que pasa por el punto $z = 1$ y tiene $z = -1$ como un punto interior. [Véase la figura 8-87.] Determine la imagen de C en el plano w con la transformación $w = f(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$.

Solución

Se tiene $dw/dz = \frac{1}{2}(1 - 1/z^2)$. Como $dw/dz = 0$ en $z = 1$, se sigue que $z = 1$ es un punto crítico. De la serie de Taylor para $f(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ en torno a $z = 1$, se tiene

$$w - 1 = \tfrac{1}{2}[(z-1)^2 - (z-1)^3 + (z-1)^4 - \cdots]$$

De acuerdo con el problema 8.100 se ve que los ángulos con vértices en $z = 1$ duplican su magnitud con esta transformación. En particular, como en $z = 1$ el ángulo exterior a C es π, en $w = 1$ el ángulo exterior a la imagen C' es $2p$. Por tanto, C' tiene una cola aguda en $w = 1$ (véase la figura 8-88). Otros puntos de C' también se hallan directamente.

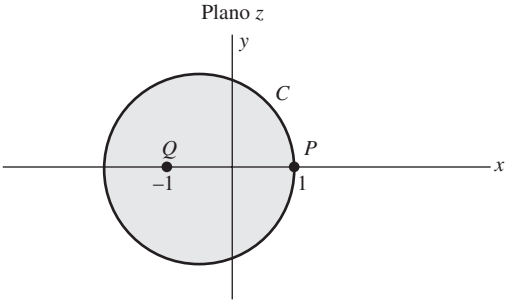


Figura 8-87

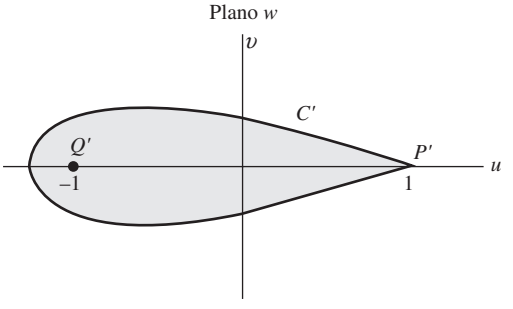


Figura 8-88

Es interesante observar que, en este caso, la circunferencia $|z| = 1$ queda contenida en C y, con esta transformación, se lleva al segmento desde $w = -1$ hasta $w = 1$. Así, a medida que C tiende a $|z| = 1$, C' tiende a la recta que une $w = -1$ y $w = 1$.

8.28. Suponga que se mueve la circunferencia C del problema 8.27 de manera que su centro queda en el semiplano superior pero que aún pasa por $z = 1$ y encierra a $z = -1$. Determine la imagen de C con la transformación $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$.

Solución

Al igual que en el problema 8.27, como $z = 1$ es un punto crítico, en $w = 1$ se obtendrá la forma puntiaguda [figura 8-90]. Si la circunferencia $|z| = 1$ no está completamente comprendida en C [como se muestra en la figura 8-89], en la imagen C' no estará totalmente comprendida la imagen de $|z| = 1$ [que es el segmento de $w = -1$ a $w = 1$]. En C' sólo estará contenida la parte del segmento que corresponde a la parte de la circunferencia $|z| = 1$ que se encuentra en el interior de C. La apariencia de C' será, por tanto, como se muestra en la figura 8-90. Al modificar C de manera apropiada se obtienen otras formas similares a C'.

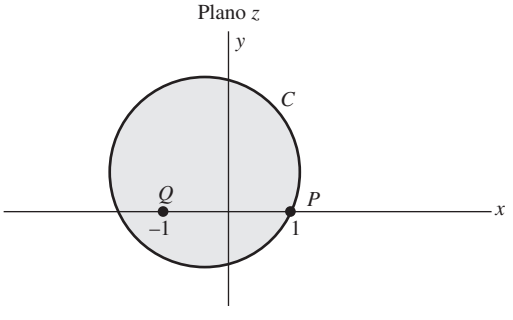


Figura 8-89

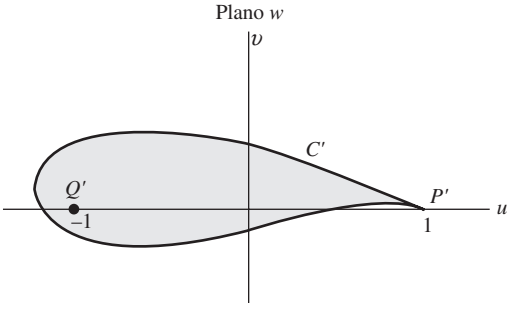


Figura 8-90

El hecho de que C' recuerde el corte transversal de un ala de avión, que se suele denominar *perfil alar* o *perfil aerodinámico*, es importante para la teoría aerodinámica (véase el capítulo 9), y *Joukowski* lo usó por primera vez. Debido a esto, a las formas como las de la curva C' se les suele llamar *perfiles de Joukowski*, y a $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$, *transformación de Joukowski.*

www.FreeLibros.me

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

TRANSFORMACIONES

8.29. Dado el triángulo $\mathcal{T}$ en el plano z, con vértices en i, $1-i$, $1+i$, determine el triángulo $\mathcal{T}'$ al que se lleva $\mathcal{T}$ con las transformaciones *a*) $w = 3z + 4 - 2i$, *b*) $w = iz + 2 - i$, *c*) $w = 5e^{\pi i/3}z - 2 + 4i$. ¿Qué relación hay entre $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ en cada caso?

8.30. Bosqueje la región del plano w a la que se lleva la región interior del triángulo $\mathcal{T}$ del problema 8.29 con las transformaciones *a*) $w = z^2$, *b*) $w = iz^2 + (2-i)z$, *c*) $w = z + 1/z$.

8.31. *a*) Muestre que, mediante la transformación $w = 1/z$, la circunferencia C dada por $|z-3| = 5$ se lleva a la circunferencia $|w + 3/16| = 5/16$. *b*) ¿A qué región se lleva el interior de C?

8.32. *a*) Demuestre que con la transformación $w = (z-i)/(iz-1)$, la región $\text{Im}\{z\} \geq 0$ se lleva a la región $|w| \leq 1$. *b*) ¿A qué región se lleva $\text{Im}\{z\} \leq 0$ con esta transformación?

8.33. *a*) Muestre que la transformación $w = \frac{1}{2}(ze^{-\alpha} + z^{-1}e^{\alpha})$, donde α es real, lleva el interior de la circunferencia $|z| = 1$ al exterior de una elipse [véase la entrada B-2 de la página 253].

b) Encuentre la longitud de los ejes mayor y menor de la elipse del inciso *a*) y trace la elipse.

8.34. Determine la ecuación de la curva en el plano w a la que se lleva la recta $x + y = 1$ con las transformaciones *a*) $w = z^2$, *b*) $w = 1/z$.

8.35. Muestre que $w = \{(1+z)/(1-z)\}^{2/3}$ lleva el círculo unitario a una región en forma de cuña e ilustre gráficamente.

8.36. *a*) Muestre que la transformación $w = 2z - 3i\bar{z} + 5 - 4i$ equivale a $u = 2x + 3y + 5$, $v = 2y - 3x - 4$.

b) Determine el triángulo en el plano uv al que se lleva el triángulo $\mathcal{T}$ del problema 8.29 con la transformación del inciso *a*). ¿Son similares estos triángulos?

8.37. Exprese las transformaciones *a*) $u = 4x^2 - 8y$, $v = 8x - 4y^2$ y *b*) $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$ en la forma $w = F(z, \bar{z})$.

TRANSFORMACIONES CONFORMES

8.38. Las rectas $y = 2x$, $x + y = 6$ del plano xy se llevan al plano w mediante la transformación $w = z^2$. *a*) Muestre gráficamente las imágenes de las rectas en el plano w.

b) Muestre analíticamente que el ángulo de intersección de las rectas es el mismo que el ángulo de intersección de sus imágenes y explique a qué se debe esto.

8.39. Repita el problema 8.38 con las transformaciones *a*) $w = 1/z$, *b*) $w = \{(z-i)/(z+1)\}$.

8.40. El interior de un cuadrado $\mathcal{S}$ con vértices en $1, 2, 1+i, 2+i$ se lleva a una región $\mathcal{S}'$ mediante las transformaciones *a*) $w = 2z + 5 - 3i$, *b*) $w = z^2$, *c*) $w = \text{sen}\, \pi z$. En cada caso, bosqueje las regiones y verifique directamente que los ángulos interiores de $\mathcal{S}'$ son ángulos rectos.

8.41. *a*) Bosqueje las imágenes de la circunferencia $(x-3)^2 + y^2 = 2$ y la recta $2x + 3y = 7$ con la transformación $w = 1/z$. *b*) Determine si las imágenes de la circunferencia y de la recta del inciso *a*) se intersecan en los mismos ángulos que el círculo y la recta. Explique.

8.42. Repita el problema 8.41 con el círculo $(x-3)^2 + y^2 = 5$ y la recta $2x + 3y = 14$.

8.43. *a*) Repita el problema 8.38 con la transformación $w = 3z - 2i\bar{z}$.

b) ¿Su respuesta al inciso *b*) es la misma? Explique.

8.44. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que la transformación $w = F(z, \bar{z})$ sea conforme en una región $\mathcal{R}$ es que $\partial F/\partial \bar{z} = 0$ y $\partial F/\partial z \neq 0$ en $\mathcal{R}$, y explique el significado de esto.

www.FreeLibros.me

JACOBIANOS

8.45. *a*) En cada inciso del problema 8.29 determine el cociente entre las áreas $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$.
b) Compare lo hallado en el inciso *a*) con el factor de magnificación $|dw/dz|^2$ y explique el significado.

8.46. Encuentre el jacobiano de las transformaciones *a*) $w = 2z^2 - iz + 3 - i$, *b*) $u = x^2 - xy + y^2$, $v = x^2 + xy + y^2$.

8.47. Demuestre que un polígono en el plano z se lleva a un polígono similar en el plano w mediante la transformación $w = F(z)$ si y sólo si $F'(z)$ es una constante diferente de cero.

8.48. La función analítica $F(z)$ lleva el interior $\mathcal{R}$ de una circunferencia definida por $|z| = 1$ a una región $\mathcal{R}'$ limitada por una curva simple cerrada C'. Demuestre que *a*) la longitud de C' es $\oint_C |F'(z)||dz|$, *b*) el área de $\mathcal{R}'$ es $\iint_{\mathcal{R}} |F'(z)|^2\, dx\, dy$.

8.49. Demuestre el resultado (8.2) de la página 242.

8.50. Encuentre el cociente entre las áreas de los triángulos del problema 8.36*b*) y compare con el factor de magnificación obtenido con el jacobiano.

8.51. Sean $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ y $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$. *a*) Demuestre que $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} = \dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$.

b) Interprete geométricamente el resultado del inciso *a*). *c*) Generalice el resultado del inciso *a*).

8.52. Muestre que si $w = u + iv = F(z)$, $z = x + iy = G(\zeta)$ y $\zeta = \xi + i\eta$, el resultado del problema 8.51*a*) equivale a la relación

$$\left|\frac{dw}{d\zeta}\right| = \left|\frac{dw}{dz}\right|\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|$$

TRANSFORMACIONES BILINEALES O FRACCIONARIAS

8.53. Encuentre una transformación bilineal que lleve los puntos i, $-i$, 1 del plano z, respectivamente, a los puntos 0, 1, ∞ del plano w.

8.54. *a*) Encuentre una transformación bilineal que lleve los vértices $1 + i$, $-i$, $2 - i$ de un triángulo $\mathcal{T}$ en el plano z a los puntos 0, 1, i del plano w.

b) Bosqueje la región a la que se lleva el interior del triángulo $\mathcal{T}$ con la transformación obtenida en el inciso *a*).

8.55. Compruebe que la siguiente es también una transformación bilineal:
a) dos transformaciones bilineales sucesivas, *b*) cualquier número de transformaciones bilineales sucesivas.

8.56. Suponga que $a \neq b$ son dos puntos fijos de una transformación bilineal. Muestre que esta transformación se escribe en la forma

$$\frac{w - a}{w - b} = K\left(\frac{z - a}{z - b}\right)$$

donde K es una constante.

8.57. Suponga que, en el problema 8.56, $a = b$. Muestre que esta transformación se expresa como

$$\frac{1}{w - a} = \frac{1}{z - a} + k$$

donde k es una constante.

8.58. Verifique que la transformación bilineal más general que lleva $|z| = 1$ a $|w| = 1$ es

$$w = e^{i\theta}\left(\frac{z - p}{\bar{p}z - 1}\right)$$

donde p es una constante.

www.FreeLibros.me

8.59. Muestre que la transformación del problema 8.58 lleva $|z| < 1$ a *a*) $|w| < 1$ si $|p| < 1$ y a *b*) $|w| > 1$ si $|p| > 1$.

8.60. Analice el problema 8.58 si $|p| = 1$.

8.61. Resuelva directamente el problema 8.11.

8.62. *a*) Suponga que z_1, z_2, z_3, z_4 son cuatro puntos distintos de una circunferencia. Demuestre que el cociente cruzado es real.

b) ¿Es verdadero el recíproco del inciso *a*)?

TRANSFORMACIÓN DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

8.63. Con la transformación de Schwarz-Christoffel determine una función que lleve cada región indicada del plano *z* sobre el semiplano superior del plano *w*.

a)

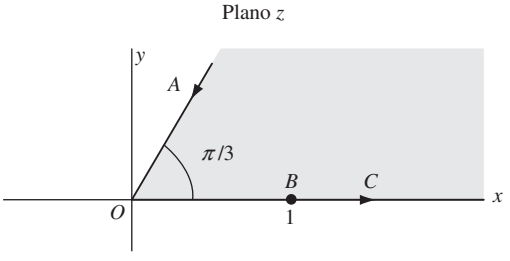


Figura 8-91

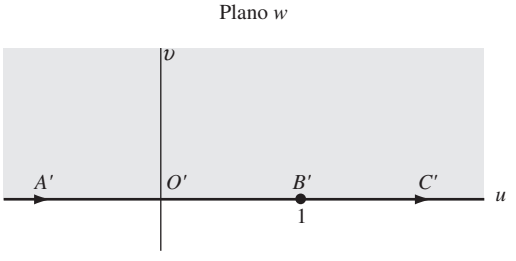


Figura 8-92

b)

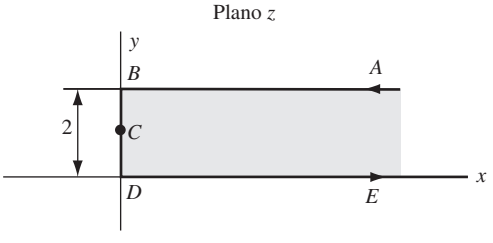


Figura 8-93

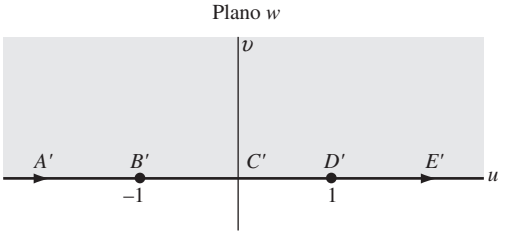


Figura 8-94

c)

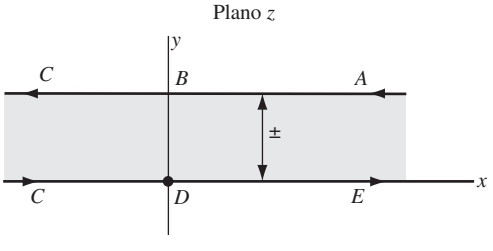


Figura 8-95

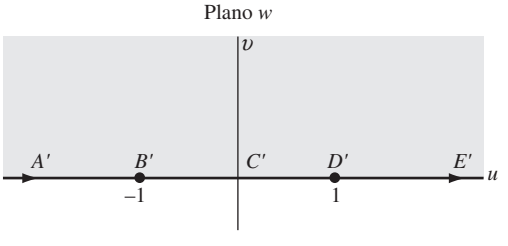


Figura 8-96

www.FreeLibros.me

d)

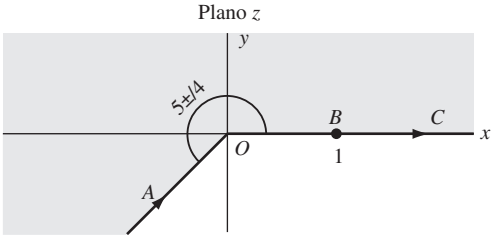


Figura 8-97

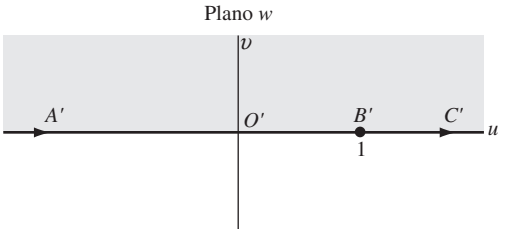


Figura 8-98

8.64. Verifique la entrada A-14 de la página 253 con la transformación de Schwarz-Christoffel.

8.65. Encuentre una función que lleve la región infinita sombreada de la figura 8-99 sobre el semiplano superior del plano z [figura 8-100], de manera que P, Q y R se lleven, respectivamente, a P', Q' y R' [donde P, R, P', R' son puntos al infinito, como indican las flechas].

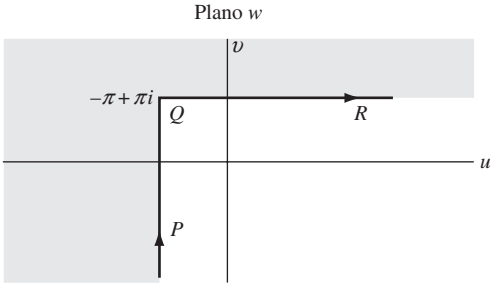


Figura 8-99

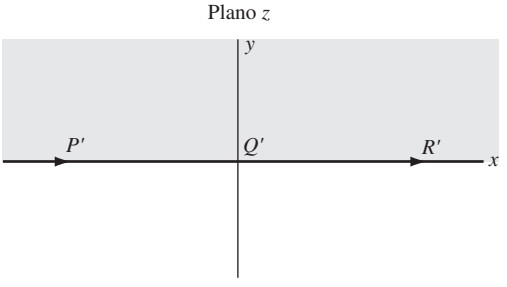


Figura 8-100

8.66. Verifique la entrada A-12 de la página 252 con la transformación de Schwarz-Christoffel.

8.67. Encuentre una función que lleve cada región sombreada indicada del plano w sobre el semiplano superior del plano z.

a)

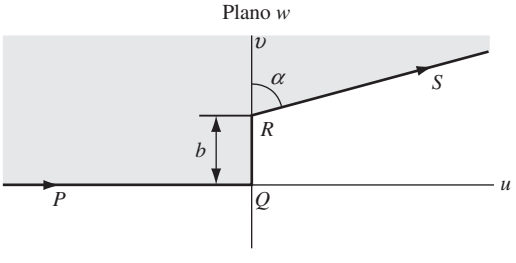


Figura 8-101

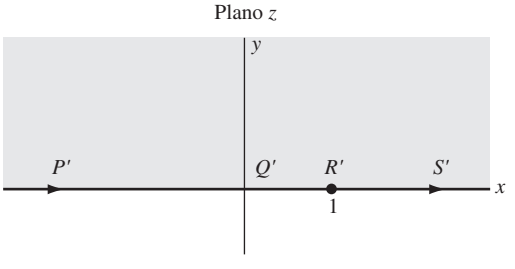


Figura 8-102

www.FreeLibros.me

b)

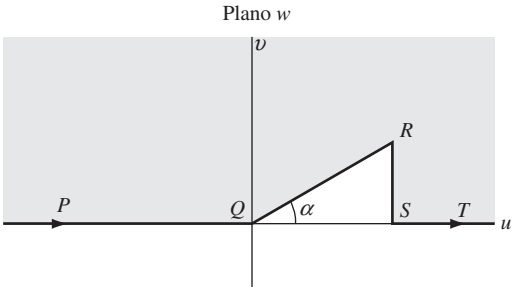


Figura 8-103

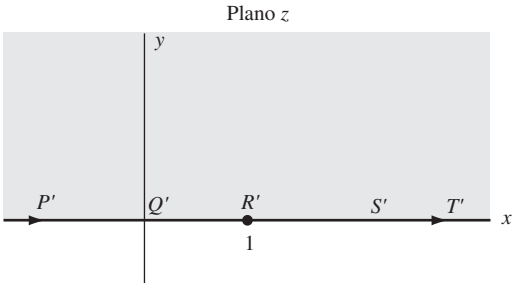


Figura 8-104

8.68. *a*) Verifique la entrada A-11 de la página 252 con la transformación de Schwarz-Christoffel.

b) Emplee el resultado del inciso *a*) y la entrada A-2 de la página 248 para llegar a la entrada C-5 de la página 256.

TRANSFORMACIONES DE FRONTERAS EN FORMA PARAMÉTRICA

8.69. *a*) Encuentre una transformación que lleve la parábola $y^2 = 4p(p - x)$ en una línea recta.

b) Analice la relación entre su respuesta y la entrada A-9 de la página 251.

8.70. Encuentre una transformación que lleve la hipérbola $x = a \cosh t$, $y = a \operatorname{senh} t$ en una línea recta.

8.71. Encuentre una transformación que lleve la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ en una línea recta.

8.72. *a*) Encuentre una transformación que lleve la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ en una línea recta.

b) ¿A qué región se lleva el interior de la hipocicloide con esa transformación? Justifique su respuesta.

[*Sugerencia:* Las ecuaciones paramétricas para la hipocicloide son $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t < 2\pi$.]

8.73. Dos conjuntos de ecuaciones paramétricas para la parábola $y = x^2$ son *a*) $x = t$, $y = t^2$ y *b*) $x = \pm e^t$, $y = e^{2t}$. Emplee estas dos ecuaciones paramétricas para llegar a dos posibles transformaciones que lleven esta parábola a una línea recta, y determine si tiene alguna ventaja usar una o la otra.

PROBLEMAS MISCELÁNEOS

8.74. *a*) Muestre que la transformación $w = 1/z$ lleva la circunferencia $|z - a| = a$, donde $a > 0$, en una línea recta. Ilustre esto gráficamente, y muestre la región a la que se lleva el interior de la circunferencia, así como diversos puntos de la circunferencia.

b) Muestre que el resultado del inciso *a*) sirve para obtener la transformación del semiplano superior en el círculo unitario.

8.75. Demuestre que la función $w = (z^2/a^2) - 1$ lleva un bucle de la lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ sobre la circunferencia unitaria.

8.76. Demuestre que la función $w = z^2$ lleva la circunferencia $|z - a| = a$, $a > 0$, sobre la cardiode $\rho = 2a^2(1 + \cos \phi)$ [véase la entrada C-2 en la página 252].

8.77. Muestre que la transformación de Joukowski $w = z + k^2/z$ se escribe como

$$\frac{w - 2k}{w + 2k} = \left(\frac{z - k}{z + k}\right)^2$$

www.FreeLibros.me

8.78. *a*) Sea $w = F(z)$ una transformación bilineal. Muestre que la transformación lineal más general para la que $F\{F(z)\} = z$ está dada por la expresión siguiente, en donde $k^2 = 1$:

$$\frac{w-p}{w-q} = k\frac{z-p}{z-q}$$

b) ¿Cuál es el resultado del inciso *a*) si $F\{F[F(z)]\} = z$?

c) Generalice los resultados de los incisos *a*) y *b*).

8.79. *a*) Determine una transformación que rote la elipse $x^2 + xy + y^2 = 5$ de manera que los ejes mayor y menor sean paralelos a los ejes coordenados. *b*) ¿Cuáles son las longitudes de los ejes mayor y menor?

8.80. Encuentre una transformación bilineal que lleve la circunferencia $|z - 1| = 2$ sobre la recta $x + y = 1$.

8.81. Verifique las transformaciones *a*) A-6, *b*) A-7, *c*) A-8 de las páginas 250 y 251.

8.82. Considere la proyección estereográfica del plano complejo sobre una esfera unitaria tangente a él. Construya un sistema de coordenadas rectangulares XYZ de manera que el eje Z coincida con NS y los ejes X y Y coincidan con los ejes x y y de la figura 1-6, página 7. Demuestre que el punto (X, Y, Z) que corresponde a (x, y) en el plano es tal que

$$X = \frac{x}{x^2+y^2+1}, \quad Y = \frac{y}{x^2+y^2+1}, \quad Z = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$$

8.83. Verifique que una transformación mediante una proyección estereográfica es conforme.

8.84. *a*) Demuestre que mediante una proyección estereográfica, las longitudes de arco de la esfera se magnifican en la proporción $(x^2 + y^2 + 1) : 1$.

b) Analice lo que ocurre con las regiones cercanas al polo norte. ¿Qué efecto produce esto sobre las cartas de navegación?

8.85. Sea $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ una transformación de puntos del plano xy sobre puntos del plano uv.

a) Muestre que, para que la transformación preserve los ángulos, es necesario y suficiente que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

b) A partir del inciso *a*), deduzca que se debe tener ya sea

$$i)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{o} \qquad ii)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Concluya, por tanto, que $u + iv$ debe ser una función analítica de $x + iy$.

8.86. Encuentre el área de la elipse $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$, donde $a > 0$, $c > 0$ y $b^2 < 4ac$.

8.87. Se dice que una transformación $w = f(z)$ de puntos en un plano es *involutiva* si $z = f(w)$. En este caso, una repetición única de la transformación regresa cada punto a su posición original. Encuentre las condiciones que deben satisfacer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ para que la transformación bilineal $w = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$ sea involutiva.

8.88. Muestre que las transformaciones *a*) $w = (z + 1)/(z - 1)$ y *b*) $w = \ln \coth(z/2)$ son involutivas.

www.FreeLibros.me

8.89. Encuentre una transformación bilineal que lleve $|z| \leq 1$ sobre $|w - 1| \leq 1$ de manera que los puntos $1, -i$ correspondan a 2, 0, respectivamente.

8.90. Analice qué significado tiene que en una transformación bilineal el jacobiano sea cero.

8.91. Demuestre que la transformación bilineal $w = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$ tiene un punto fijo si y sólo si $(\delta + \alpha)^2 = 4(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$.

8.92. *a*) Muestre que la transformación $w = (\alpha z + \overline{\gamma})/(\gamma z + \overline{\alpha})$, donde $|\alpha|^2 - |\gamma|^2 = 1$ transforma la circunferencia unitaria y su interior en sí misma.

b) Muestre que si $|\gamma|^2 - |\alpha|^2 = 1$, el interior se lleva al exterior.

8.93. Suponga que con la transformación $w = F(z, \overline{z})$ todas las curvas C_1 y C_2 que se intersequen en el plano z se llevan a curvas correspondientes C_1' y C_2' que se intersequen en el plano w. Demuestre que, si esta transformación es conforme, *a*) $F(z, \overline{z})$ sólo es función de z, por ejemplo, $f(z)$, y *b*) $f(z)$ es analítica.

8.94. *a*) Compruebe la regla de la multiplicación para los determinantes [véase el problema 8.7]:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + c_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{vmatrix}$$

b) Muestre cómo generalizar el resultado del inciso *a*) a los determinantes de tercer orden y de orden superior.

8.95. Encuentre una función que lleve las regiones sombreadas de las figuras 8-105 y 8-106 una sobre la otra, donde QS tiene una longitud b.

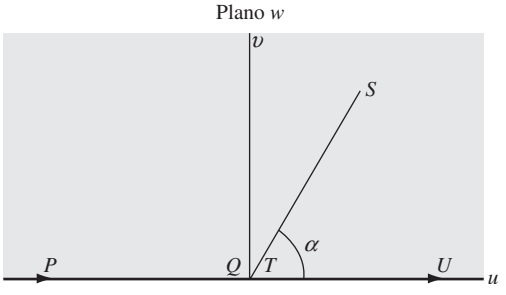


Figura 8-105

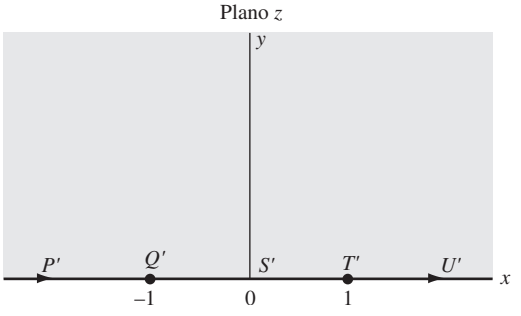


Figura 8-106

8.96. *a*) Muestre que la función $w = \int_0^z dt/(1 - t^6)^{1/3}$ lleva un hexágono regular a un círculo unitario.

b) ¿Cuál es la longitud de cada lado del hexágono del inciso *a*)?

8.97. Muestre que la transformación $w = (Az^2 + Bz + C)/(Dz^2 + Ez + F)$ se considera una combinación de dos transformaciones bilineales separadas por una transformación del tipo $\tau = \zeta^2$.

8.98. Encuentre una función que lleve un polígono regular de n lados en el círculo unidad.

8.99. Verifique las entradas *a*) A-9, página 251; *b*) A-10, página 251; *c*) B-3, página 254; *d*) B-4, página 254; *e*) C-3, página 255; *f*) C-4, página 255.

8.100. Suponga que la transformación $w = f(z)$ tiene el desarrollo en serie de Taylor

$$w = f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \cdots$$

Suponga que $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$. Muestre que los ángulos en el plano z con vértices en $z = a$ se multiplican por n en el plano w.

8.101. Determine una función que lleve la banda infinita $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$ sobre el interior del círculo unitario $|w| \leq 1$, de manera que $z = 0$ corresponda a $w = 0$.

www.FreeLibros.me

8.102. Verifique el valor de K obtenido en la ecuación (2) del problema 8.25.

8.103. Encuentre una ecuación que lleve el semiplano superior sobre el interior de un triángulo con vértices en $w = 0, 1, i$, que correspondan a $z = 0, 1, \infty$, respectivamente.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

8.33. *b*) 2 cosh α y 2 senh α, respectivamente

8.34. *a*) $u^2 + 2v = 1$, *b*) $u^2 + 2uv + 2v^2 = u + v$

8.37. *a*) $w = (1 + i)(z^2 + \bar{z}^2) + (2 - 2i)z\bar{z} + 8iz$, *b*) $w = z^3$

8.46. *a*) $|4z - i|^2$, *b*) $4(x^2 + y^2)$

8.53. $w = (1 - i)(z - i)/2(z - 1)$

8.54. *a*) $w = (2z - 2 - 2i)/\{(i - 1)z - 3 - 5i\}$

8.62. Sí

8.63. *a*) $w = z^3$, *b*) $w = \cosh(\pi z/2)$, *c*) $w = e^z$, *d*) $w = z^{4/5}$

8.65. $z = (w + \pi - \pi i)^{2/3}$

8.69. *a*) Una posibilidad es $z = p - pw^2 + 2piw = p(1 + iw)^2$, que se obtiene con las ecuaciones paramétricas $x = p(1 - t^2)$, $y = 2pt$

8.70. $z = a(\cosh w + \operatorname{senh} w)$

8.71. $z = a(w + i - ie^{-iw})$

8.72. *a*) $z = a(\cos^3 w + i \operatorname{sen}^3 w)$

8.78. *b*) Igual que *a*) con $k^3 = 1$

8.86. $2\pi/\sqrt{4ac - b^2}$

8.87. $\delta = -\alpha$

8.96. *b*) $(1/6)\sqrt[3]{2}\Gamma(1/3)$

8.101. $w = \tan z$

8.103. $w = \dfrac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/4)} \displaystyle\int_0^x t^{-1/2}(1 - t)^{-3/4}\, dt$

www.FreeLibros.me

CAPÍTULO 9

Aplicaciones físicas de las transformaciones conformes

9.1 PROBLEMAS DE VALOR FRONTERA

En la ciencia y en la ingeniería, muchos problemas, al formularse matemáticamente, conducen a *ecuaciones diferenciales parciales* y a condiciones relacionadas que se conocen como *condiciones frontera.* El problema de hallar soluciones a ecuaciones diferenciales que satisfagan las condiciones frontera se conoce como *problema de valor frontera.*

Desde el punto de vista matemático, así como desde el punto de vista físico, es de fundamental importancia no sólo hallar las soluciones (es decir, que tales soluciones *existan*), sino que para cada problema debe haber sólo una solución (es decir, que la solución sea *única*).

9.2 FUNCIONES ARMÓNICAS Y CONJUGADAS

Se dice que una función que satisface la *ecuación de Laplace*

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{9.1}$$

en una región $\mathcal{R}$ es *armónica* en $\mathcal{R}$. Como ya se vio, si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en $\mathcal{R}$, entonces u y v son armónicas en $\mathcal{R}$.

EJEMPLO 9.1 Sea $f(z) = 4z^2 - 3iz = 4(x + iy)^2 - 3i(x + iy) = 4x^2 - 4y^2 + 3y + i(8xy - 3x)$. Entonces $u = 4x^2 - 4y^2 + 3y$, $v = 8xy - 3x$. Como u y v satisfacen la ecuación de Laplace, son armónicas.

Las funciones u y v se llaman *funciones conjugadas*, y dada una, se halla la otra salvo una constante aditiva arbitraria [véase el capítulo 3].

9.3 PROBLEMAS DE DIRICHLET Y DE NEUMANN

Sea $\mathcal{R}$ una región simplemente conexa limitada por una curva simple cerrada C. Dos tipos de problemas de valor frontera son de gran interés.

1. El **problema de Dirichlet** trata de hallar una función Φ que satisfaga la ecuación de Laplace (9.1) [es decir, que sea armónica] en $\mathcal{R}$ y que sobre la frontera C tome valores prefijados.

www.FreeLibros.me

2. El **problema de Neumann** trata de hallar una función Φ que satisfaga la ecuación de Laplace (9.1) en $\mathcal{R}$ y que en la frontera C su derivada normal $\partial\Phi/\partial n$ tome valores prefijados.

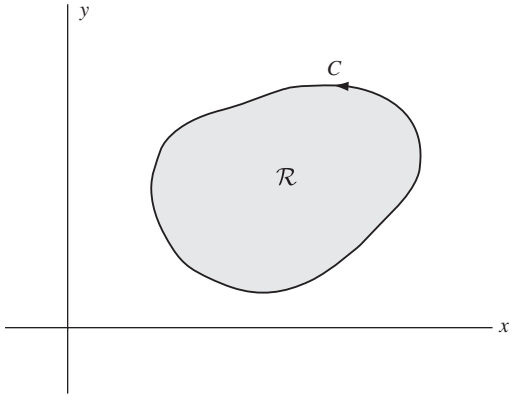


Figura 9-1

La región $\mathcal{R}$ puede ser no acotada. Por ejemplo, $\mathcal{R}$ puede ser el semiplano superior con el eje x como frontera de C.

Puede mostrarse que las soluciones, tanto al problema de Dirichlet como al de Neumann, existen y son únicas [en el problema de Neumann, salvo una constante aditiva arbitraria] con muy ligeras restricciones impuestas a las condiciones frontera [véanse los problemas 9.29 y 9.80].

Es interesante que el problema de Neumann se presente en términos de un problema de Dirichlet adecuadamente planteado (véase el problema 9.79). Por tanto, si se resuelve el problema de Dirichlet, también se resuelve (al menos de manera teórica) el correspondiente problema de Neumann.

9.4 PROBLEMA DE DIRICHLET PARA LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA. FÓRMULA DE POISSON

Sea C la circunferencia unitaria $|z| = 1$ y $\mathcal{R}$ su interior. Una función que satisface la ecuación de Laplace [es decir, que es armónica] en todos los puntos (r, θ) en $\mathcal{R}$ y que toma en C un valor prefijado $F(\theta)$ [es decir, $\Phi(1, \theta) = F(\theta)$], está dada por

$$\Phi(r,\ \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)F(\phi)\,d\phi}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2} \tag{9.2}$$

Esta fórmula se conoce como *fórmula de Poisson para la circunferencia* [véase el capítulo 5, página 146].

9.5 PROBLEMA DE DIRICHLET PARA EL SEMIPLANO

Una función que es armónica en el semiplano $y > 0$ [$\mathrm{Im}\{z\} > 0$] y que toma un valor prefijado $G(x)$ en el eje x [es decir, $\Phi(x, 0) = G(x)$, $-\infty < x < \infty$], está dada por

$$\Phi(x,\ y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yG(\eta)\,d\eta}{y^2+(x-\eta)^2} \tag{9.3}$$

Esto se llama en ocasiones *fórmula de Poisson para el semiplano* [véase el capítulo 5, página 146].

www.FreeLibros.me

9.6 SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE DIRICHLET Y DE NEUMANN MEDIANTE TRANSFORMACIONES CONFORMES

Los problemas de Dirichlet y de Neumann se resuelven en toda región $\mathcal{R}$ simplemente conexa, que se lleve de manera conforme mediante una función analítica sobre el interior del círculo unitario o de un semiplano. [De acuerdo con el teorema de la transformación de Riemann, esto siempre es posible, al menos en teoría.] Las ideas básicas aquí son las siguientes.

a) Usar la transformación para transformar el problema del valor frontera para la región $\mathcal{R}$ en un problema correspondiente para la circunferencia unitaria o para el semiplano.
b) Resolver el problema para la circunferencia unitaria o para el semiplano.
c) Emplear la solución del inciso *b*) para resolver el problema dado mediante la transformación inversa.

Los teoremas importantes en este contexto son los siguientes.

TEOREMA 9.1 Sea $w = f(z)$ una función analítica y uno a uno en la región $\mathcal{R}$ del plano z. Entonces existe una única función inversa $z = g(w)$ en $\mathcal{R}$, y $f'(z) \neq 0$ en $\mathcal{R}$ [lo que garantiza que la transformación es conforme en todos los puntos de $\mathcal{R}$].

TEOREMA 9.2 Sea $\Phi(x, y)$ armónica en $\mathcal{R}$, y suponga que $\mathcal{R}$ se lleva uno a uno sobre $\mathcal{R}'$ en el plano w por medio de una transformación $w = f(z)$, donde $f(z)$ es analítica. Entonces $f'(z) \neq 0$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $\Phi(x, y) = \Phi[x(u, v), y(u, v)] \equiv \Psi(u, v)$ es armónica en $\mathcal{R}'$. En otras palabras, una función armónica se transforma en otra función armónica por medio de una transformación $w = f(z)$, que es analítica [véase el problema 9.4].

TEOREMA 9.3 Suponga que $\Phi = a$ [una constante] en la frontera o en parte de la frontera C de una región en el plano z. Entonces $\Psi = a$ en su imagen C' en el plano w. De manera similar, si la derivada normal de Φ es cero, es decir, $\partial\Phi/\partial n = 0$ en C, entonces, en C', la derivada normal de Ψ es cero.

APLICACIONES AL FLUJO DE FLUIDOS

9.7 SUPOSICIONES BÁSICAS

Para la solución de muchos problemas importantes sobre el flujo de fluidos, conocido también como *dinámica de fluidos*, *hidrodinámica* o *aerodinámica*, suelen emplearse métodos de variable compleja con las suposiciones siguientes.

1. **El flujo de fluidos es bidimensional**, es decir, el patrón básico de flujo y las características del movimiento del fluido en un plano son esencialmente las mismas que en cualquier plano paralelo. Esto permite concentrar la atención en un solo plano que se considera el plano z. Las figuras trazadas en este plano se entienden como secciones transversales de cilindros infinitos perpendiculares al plano. Por ejemplo, la circunferencia de la figura 9-7, de la página 286, representa un obstáculo cilíndrico infinito alrededor del cual fluye el fluido. Por supuesto, un cilindro infinito es sólo un *modelo matemático* de un cilindro físico (real) tan largo que resulta razonable ignorar sus efectos.
2. **El flujo es estacionario o permanente**, es decir, la velocidad del fluido en cualquier punto depende sólo de la posición (x, y) y no del tiempo.
3. **Los componentes de la velocidad se obtienen de un potencial**, es decir, suponga que V_x y V_y denotan los componentes de la velocidad del fluido en (x, y) en las direcciones positivas x y y, respectivamente. Así existe una función Φ, que se conoce como *potencial de velocidad*, tal que

$$V_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \tag{9.4}$$

www.FreeLibros.me

Una suposición equivalente es que si C es una curva simple cerrada en el plano z y V_t es la componente tangencial de la velocidad en C, entonces

$$\oint_C V_t\, ds = \oint_C V_x\, dx + V_y\, dy = 0 \tag{9.5}$$

Véase el problema 9.48.

A cada integral en (9.5) se le conoce como *circulación* del fluido a lo largo de C. Cuando la circulación es cero, el flujo se llama *irrotacional* o *libre de circulación.*

4. **El fluido es incompresible**, es decir, la densidad, o masa por unidad del volumen, del fluido es constante. Si V_n es la componente normal de la velocidad en C, esto lleva a la conclusión (véase el problema 9.48) de que

$$\oint_C V_n\, ds = \oint_C V_x\, dy - V_y\, dx = 0 \tag{9.6}$$

o

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \tag{9.7}$$

que expresa la condición de que la cantidad de fluido contenida en el interior de C es una constante, es decir, la cantidad que entra en C es igual a la cantidad que sale de C. Debido a esto, la ecuación (9.6), o la ecuación equivalente (9.7), se llama *ecuación de continuidad.*

5. **El fluido no es viscoso**, es decir, no tiene viscosidad o fricción interna. Un fluido viscoso en movimiento tiende a adherirse a la superficie de un obstáculo colocado en su trayectoria. Si no hay viscosidad, las fuerzas de presión sobre la superficie son perpendiculares a la superficie. Un fluido que no es viscoso y es incompresible se conoce como *fluido ideal.* Desde luego, hay que observar que tal fluido es sólo un modelo matemático de un fluido real en el que esos efectos se consideran con seguridad insignificantes.

9.8 POTENCIAL COMPLEJO

A partir de las ecuaciones (9.4) y (9.7) se ve que el potencial de velocidad Φ es armónico, es decir, satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{9.8}$$

Se sigue que debe existir una función armónica conjugada, como $\Psi(x, y)$, tal que

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \tag{9.9}$$

sea analítica. Mediante diferenciación, con (9.4), se tiene

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_x - iV_y \tag{9.10}$$

Así, la velocidad [conocida también como *velocidad compleja*] está dada por

$$\mathcal{V} = V_x + iV_y = \overline{d\Omega/dz} = \overline{\Omega'(z)} \tag{9.11}$$

y su magnitud es

$$V = |\mathcal{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = |\overline{\Omega'(z)}| = |\Omega'(z)| \tag{9.12}$$

Los puntos en los que la velocidad es cero, es decir, $\Omega'(z) = 0$, se llaman *puntos de estancamiento.*

La función $\Omega(z)$, de importancia fundamental para caracterizar un flujo, se conoce como *potencial complejo.*

www.FreeLibros.me

9.9 LÍNEAS EQUIPOTENCIALES Y LÍNEAS DE FLUJO

Las familias de curvas de un parámetro

$$\Phi(x, y) = \alpha, \quad \Psi(x, y) = \beta \tag{9.13}$$

donde α y β son constantes, son familias ortogonales llamadas, respectivamente, *líneas equipotenciales* y *líneas de flujo* [aunque a veces se emplean también los términos más apropiados *curvas equipotenciales* y *curvas de flujo*]. En movimiento estacionario, las líneas de flujo representan la trayectoria de las partículas de fluido en el patrón de flujo.

La función Ψ se conoce como *función de flujo* y, como ya se vio, la función Φ, como *función de potencial de velocidad* o tan sólo *potencial de velocidad.*

9.10 FUENTES Y SUMIDEROS

En lo dicho hasta ahora se ha supuesto que en el plano z no hay puntos [es decir, líneas en el fluido] en los que el fluido aparezca o desaparezca. Esos puntos se conocen como *fuentes* y *sumideros*, respectivamente [también llamados *fuentes lineales* y *sumideros lineales*]. En esos puntos, que son puntos singulares, la ecuación de continuidad (9.7) y, por ende, la (9.8) no se satisfacen. En particular, alrededor de curvas cerradas C que contengan tales puntos, la integral de circulación en (9.5) puede no ser cero.

Sin embargo, no hay ningún problema para emplear la teoría anterior siempre que se introduzcan las singularidades adecuadas en el potencial complejo $\Omega(z)$ y se observe que ecuaciones como (9.7) y (9.8) se satisfacen en toda región que excluya estos puntos singulares.

9.11 ALGUNOS FLUJOS ESPECIALES

En teoría, todo potencial complejo $\Omega(z)$ puede relacionarse o interpretarse como un determinado flujo de fluido en dos dimensiones. Los siguientes son algunos casos sencillos que se encuentran en la práctica. [Observe que a todos los potenciales complejos se les puede agregar una constante sin afectar el patrón de flujo.]

1. **Flujo uniforme.** El potencial complejo correspondiente al flujo de un fluido con velocidad constante V_0 en una dirección que forme un ángulo δ con la dirección x positiva es (figura 9-2)

$$\Omega(z) = V_0\, e^{-i\delta} z \tag{9.14}$$

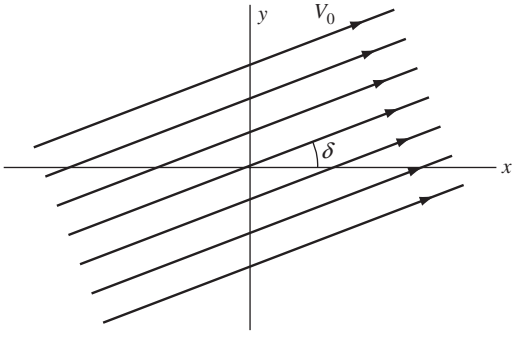


Figura 9-2

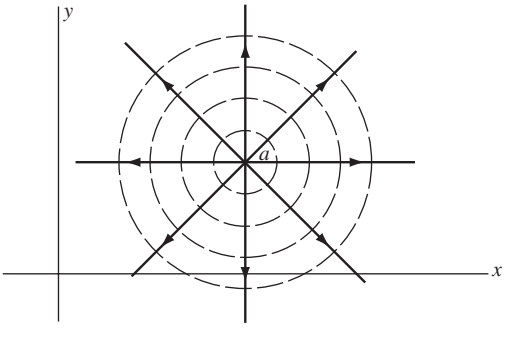


Figura 9-3

www.FreeLibros.me

2. **Fuente en $z = a$.** Si el fluido surge a velocidad constante de una fuente lineal en $z = a$ (figura 9-3), el potencial complejo es

$$\Omega(z) = k \ln(z - a) \tag{9.15}$$

donde a $k > 0$ se le conoce como *fuerza* de la fuente. Las líneas de flujo se muestran como líneas continuas, y las líneas equipotenciales, como líneas punteadas.

3. **Sumidero en $z = a$.** En este caso, el fluido desaparece en $z = a$ (figura 9-4) y el potencial complejo está definido a partir del de la fuente al sustituir k por $-k$, con lo que se obtiene

$$\Omega(z) = -k \ln(z - a) \tag{9.16}$$

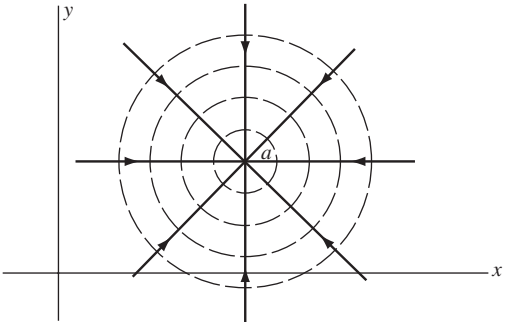


Figura 9-4

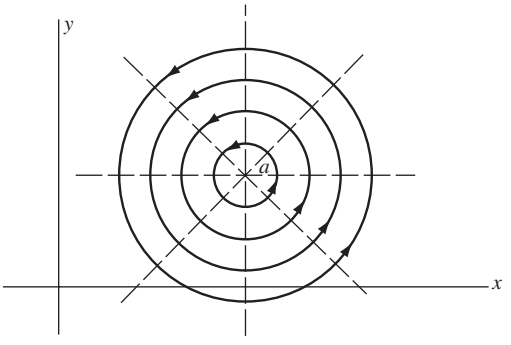


Figura 9-5

4. **Flujo con circulación.** El flujo que corresponde al potencial complejo

$$\Omega(z) = -ik \ln(z - a) \tag{9.17}$$

es como se indica en la figura 9-5. En este caso, la magnitud de la velocidad del fluido en cualquier punto es inversamente proporcional a su distancia desde a.

El punto $z = a$ se conoce como *vórtice* y k como su *fuerza.* La circulación [véase la ecuación (9.5)] a lo largo de cualquier curva cerrada C que encierre a $z = a$ es igual, en magnitud, a $2\pi k$. Observe que, al cambiar k por $-k$ en la ecuación (9.17), se obtiene el potencial complejo correspondiente a un vórtice en el sentido de las manecillas del reloj.

5. **Superposición de flujos.** Mediante la adición de potenciales complejos se describen patrones de flujo más complejos. Un ejemplo importante se obtiene al considerar el flujo debido a una fuente en $z = -a$ y un sumidero de igual fuerza en $z = a$. Así, el potencial complejo es

$$\Omega(z) = k \ln(z + a) - k \ln(z - a) = k \ln\left(\frac{z + a}{z - a}\right) \tag{9.18}$$

Con $a \to 0$ y $k \to \infty$ de manera que $2ka = \mu$ sea infinito, se obtiene el potencial complejo

$$\Omega(z) = \frac{\mu}{z} \tag{9.19}$$

Éste es el potencial complejo de un *doblete* o *dipolo*, es decir, la combinación de una fuente y un sumidero de fuerzas iguales separados por una distancia muy pequeña. La cantidad μ se llama *momento dipolo.*

www.FreeLibros.me

9.12 FLUJO EN TORNO A UN OBSTÁCULO

Un problema importante en el flujo de fluidos es la determinación del patrón de flujo de un fluido que se mueve inicialmente con velocidad uniforme V_0 y en el cual se coloca un obstáculo.

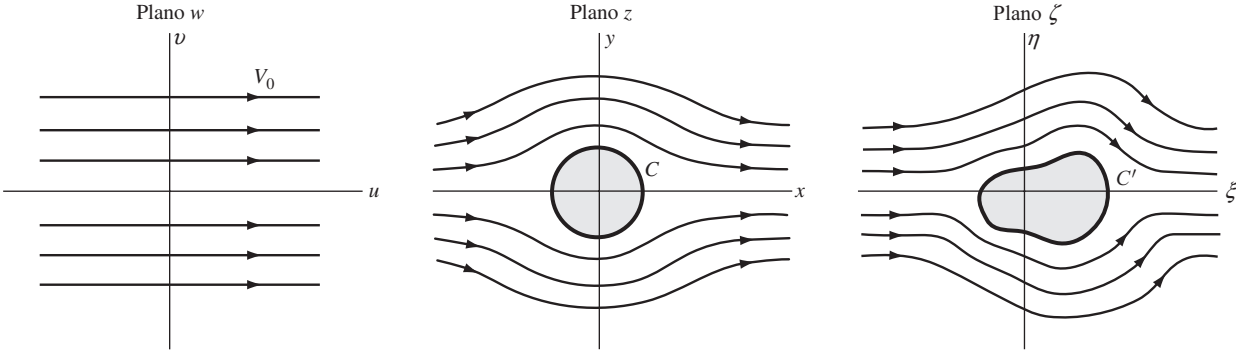


Figura 9-6 **Figura 9-7** **Figura 9-8**

Un principio general en este tipo de problemas es idear un potencial complejo de la forma

$$\Omega(z) = V_0 z + G(z) \tag{9.20}$$

(si el flujo es en el plano z) donde $G(z)$ sea tal que $\lim_{|z|\to\infty} G'(z) = 0$, lo que físicamente significa que lejos del obstáculo la velocidad tiene magnitud constante (en este caso, V_0). Además, el potencial complejo debe elegirse de manera que una de sus líneas de flujo represente la frontera del obstáculo.

El conocimiento de las transformaciones conformes es útil en la obtención de potenciales complejos. Por ejemplo, el potencial complejo correspondiente al flujo uniforme en el plano w de la figura 9-6 está dado por $V_0 w$. Mediante la transformación $w = z + a^2/z$ [véase la entrada A-4, página 249], el semiplano superior del plano w de la figura 9-6 corresponde al semiplano superior del plano z exterior a la circunferencia C, y el potencial complejo para el flujo de la figura 9-7 está dado por

$$\Omega(z) = V_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \tag{9.21}$$

De manera similar, si $z = F(\zeta)$ lleva C' y su exterior sobre C y su exterior [véase la figura 9-8], el potencial complejo para el flujo de la figura 9-8 se obtiene al sustituir z por $F(\zeta)$ en la ecuación (9.21). El potencial complejo también se obtiene al ir directamente del plano w al ζ por medio de la transformación adecuada.

Con lo anterior y al introducir otros fenómenos físicos, como la circulación, se describe el patrón de flujo en torno a perfiles de diversas formas, y de esta manera también el movimiento de un avión en vuelo.

9.13 TEOREMA DE BERNOULLI

Si P denota la presión en un fluido y V es la velocidad del fluido, el *teorema de Bernoulli* sostiene que

$$P + \frac{1}{2}\sigma V^2 = K \tag{9.22}$$

donde σ es la densidad del fluido y K es una constante a lo largo de toda línea de flujo.

9.14 TEOREMA DE BLASIUS

1. Sean X y Y las fuerzas netas en las direcciones x y y positivas, respectivamente, debidas a la presión de un fluido sobre la superficie de un obstáculo limitado por una curva simple cerrada C. Así, si Ω es el potencial

www.FreeLibros.me

complejo del flujo,

$$X - iY = \frac{1}{2} i\sigma \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz \tag{9.23}$$

2. Suponga que M es el momento en torno al origen de las fuerzas de presión sobre el obstáculo. Así,

$$M = \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2}\sigma \oint_C z\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz\right\} \tag{9.24}$$

donde "Re" denota, como de costumbre, "la parte real de".

APLICACIONES EN LA ELECTROSTÁTICA

9.15 LEY DE COULOMB

Sea r la distancia entre dos cargas eléctricas puntuales q_1 y q_2. De este modo, la fuerza entre estas cargas está dada, en magnitud, por la *ley de Coulomb*, que afirma que

$$F = \frac{q_1 q_2}{\kappa r^2} \tag{9.25}$$

y es una fuerza de repulsión o de atracción según las cargas sean iguales (las dos positivas o las dos negativas) o distintas (una positiva y la otra negativa). La constante κ en la ecuación (9.25), que se conoce como *constante dieléctrica*, depende del medio; en el vacío, $\kappa = 1$, si no es así, $\kappa > 1$. En lo sucesivo se supondrá que $\kappa = 1$ a menos que se especifique otra cosa.

9.16 INTENSIDAD DEL CAMPO ELÉCTRICO. POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Suponga que se da una distribución de carga continua, discreta o una combinación de ambas. Esta distribución de carga crea un campo eléctrico. Si una carga positiva unitaria (lo bastante pequeña para que no afecte apreciablemente el campo) se coloca en un punto A que no esté ya ocupado por una carga, la fuerza que actúa sobre esta carga se conoce como *intensidad de campo eléctrico* en A y se denota $\mathcal{E}$. Esta fuerza se obtiene de un potencial Φ, que suele conocerse como *potencial electrostático.* En símbolos,

$$\mathcal{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi = -\nabla\Phi \tag{9.26}$$

Si la distribución de carga es bidimensional, que aquí es el tema principal, entonces

$$\mathcal{E} = E_x + iE_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad \text{donde } E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ \ E_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \tag{9.27}$$

En ese caso, si E_t denota el componente de la intensidad del campo eléctrico tangencial a toda curva simple cerrada C en el plano z,

$$\oint_C E_t\, ds = \oint_C E_x\, dx + E_y\, dy = 0 \tag{9.28}$$

www.FreeLibros.me

9.17 TEOREMA DE GAUSS

Ahora se verán sólo distribuciones de carga, que se consideran bidimensionales. Si C es una curva simple cerrada en el plano z con una carga neta q en su interior (en realidad un cilindro infinito que encierre una carga neta q) y E_n es la componente normal de la intensidad de campo eléctrico, el *teorema de Gauss* establece que

$$\oint_C E_n\, ds = 4\pi q \tag{9.29}$$

Si C no encierra ninguna carga neta, esto se reduce a

$$\oint_C E_n\, ds = \oint_C E_x\, dy - E_y\, dx = 0 \tag{9.30}$$

Se sigue que, en toda región que no esté ocupada por una carga,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \tag{9.31}$$

De (9.27) y (9.31), se obtiene

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{9.32}$$

es decir, Φ es armónica en todos los puntos no ocupados por una carga.

9.18 POTENCIAL ELECTROSTÁTICO COMPLEJO

De lo anterior, es claro que debe existir una función armónica Ψ conjugada de Φ tal que

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \tag{9.33}$$

sea analítica en una región no ocupada por una carga. $\Omega(z)$ se conoce como *potencial electrostático complejo* o sólo *potencial complejo*. En términos de este potencial complejo, la ecuación (9.27) se convierte en

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\overline{\frac{d\Omega}{dz}} = -\overline{\Omega'(z)} \tag{9.34}$$

y la magnitud de $\mathcal{E}$ está dada por $E = |\mathcal{E}| = |-\overline{\Omega'(z)}| = |\Omega'(z)|$.

Las curvas (superficies cilíndricas en tres dimensiones)

$$\Phi(x, y) = \alpha, \qquad \Psi(x, y) = \beta \tag{9.35}$$

se conocen como *líneas equipotenciales* y *líneas de flujo*, respectivamente.

9.19 CARGA LINEAL

Es clara la analogía de lo anterior con el flujo de fluidos. El campo eléctrico en los problemas electrostáticos corresponde al campo de velocidad en los problemas de flujo de fluidos, con la única diferencia de una carga con signo en los potenciales complejos correspondientes.

La idea de fuente y sumidero del flujo de fluidos tiene análogos correspondientes en la electrostática. Así, el potencial (electrostático) complejo debido a una carga lineal q por longitud unitaria en z_0 (en el vacío) está dada por

$$\Omega(z) = -2q \ln(z - z_0) \tag{9.36}$$

www.FreeLibros.me

y representa una fuente o un sumidero según sea $q < 0$ o $q > 0$. De manera similar se habla de dobletes o dipolos, etc. Si el medio no es el vacío, en (9.36) se sustituye q por q/κ.

9.20 CONDUCTORES

Si un sólido conduce perfectamente, es decir, es un *conductor perfecto*, toda la carga está localizada en su superficie. Así, si se considera la superficie representada por una curva simple cerrada en el plano z, las cargas están en equilibrio en C y, por tanto, C es una línea equipotencial.

Un problema importante es el cálculo del potencial debido a un conjunto de cilindros cargados. Este problema se resuelve mediante transformaciones conformes.

9.21 CAPACITANCIA

Dos conductores con cargas de igual magnitud q pero de signo contrario tienen una diferencia de potencial V. La cantidad C definida por

$$q = CV \tag{9.37}$$

depende sólo de la geometría de los conductores y se llama *capacitancia.* Los conductores mismos forman lo que se conoce como un *condensador* o *capacitor.*

APLICACIONES AL FLUJO DE CALOR

9.22 FLUJO DE CALOR

Considere un sólido con una distribución de temperatura que puede variar. Interesa la cantidad de calor conducido por unidad de área y por unidad de tiempo a través de una superficie localizada en el sólido. Esta cantidad, conocida en ocasiones como *flujo de calor* a través de la superficie, está dada por

$$\mathcal{Q} = -K \operatorname{grad} \Phi \tag{9.38}$$

donde Φ es la temperatura, y K, que se supone que es una constante, se conoce como *conductividad térmica*, y depende del material del que esté hecho el sólido.

9.23 TEMPERATURA COMPLEJA

Supóngase que se restringe a problemas de tipo bidimensional. Se tiene

$$\mathcal{Q} = -K\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = Q_x + iQ_y \qquad \text{donde } Q_x = -K\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q_y = -K\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{9.39}$$

Sea C una curva simple cerrada en el plano z (que representa la sección transversal de un cilindro). Si Q_t y Q_n son las componentes tangencial y normal del flujo de calor y prevalecen condiciones de *estado estable* de manera que no haya acumulación neta de calor en el interior de C, se tiene

$$\oint_C Q_n\, ds = \oint_C Q_x\, dy - Q_y\, dx = 0, \qquad \oint_C Q_t\, ds = \oint_C Q_x\, dx + Q_y\, dy = 0 \tag{9.40}$$

www.FreeLibros.me

si se supone que no existe ninguna fuente o sumidero en el interior de C. De la primera ecuación en (9.40) se tiene

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \tag{9.41}$$

que, con (9.39), se convierte en

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

es decir, Φ es armónica. Se introduce la función armónica conjugada Ψ y se ve que

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \tag{9.42}$$

es analítica. Las familias de curvas

$$\Phi(x, y) = \alpha, \qquad \Psi(x, y) = \beta \tag{9.43}$$

se llaman *líneas isotérmicas* y *líneas de flujo*, respectivamente, y $\Omega(z)$, *temperatura compleja.*

La analogía con el flujo de fluidos y la electrostática es evidente, y los procedimientos que se emplean en esos campos sirven de manera similar para resolver diversos problemas de temperatura.

PROBLEMAS RESUELTOS

FUNCIONES ARMÓNICAS

9.1. Muestre que las funciones siguientes son armónicas en una región finita $\mathcal{R}$ del plano z:

a) $x^2 - y^2 + 2y$, *b*) $\operatorname{sen} x \cosh y$

Solución

a) Suponga que $\Phi = x^2 - y^2 + 2y$. Se tiene $\partial^2\Phi/\partial x^2 = 2$, $\partial^2\Phi/\partial y^2 = -2$. Entonces $(\partial^2\Phi/\partial x^2) + (\partial^2\Phi/\partial y^2) = 0$, por lo que Φ es armónica en $\mathcal{R}$.

b) Suponga que $\Phi = \operatorname{sen} x \cosh y$. Se tiene $\partial^2\Phi/\partial x^2 = -\operatorname{sen} x \cosh y$, $\partial^2\Phi/\partial y^2 = \operatorname{sen} x \cosh y$. Así $(\partial^2\Phi/\partial x^2) + (\partial^2\Phi/\partial y^2) = 0$ y Φ es armónica en $\mathcal{R}$.

9.2. Muestre que, con la transformación $z = w^3$, las funciones del problema 9.1 son armónicas en el plano w.

Solución

Suponga que $z = w^3$. Entonces $x + iy = (u + iv)^3 = u^3 - 3uv^2 + i(3u^2v - v^3)$ y $x = u^3 - 3uv^2$, $y = 3u^2v - v^3$.

a) $\Phi = x^2 - y^2 + 2y = (u^3 - 3uv^2)^2 - (3u^2v - v^3)^2 + 2(3u^2v - v^3)$

$$= u^6 - 15u^4v^2 + 15u^2v^4 - v^6 + 6u^2v - 2v^3$$

Así, $\partial^2\Phi/\partial u^2 = 30u^4 - 180u^2v^2 + 30v^4 + 12v$, $\partial^2\Phi/\partial v^2 = -30u^4 + 180u^2v^2 - 30v^4 - 12v$ y $(\partial^2\Phi/\partial u^2) + (\partial^2\Phi/\partial v^2) = 0$, como se necesitaba.

b) Hay que mostrar que $\Phi = \operatorname{sen}(u^3 - 3uv^2)\cosh(3u^2v - v^3)$ satisface $(\partial^2\Phi/\partial u^2) + (\partial^2\Phi/\partial v^2) = 0$. Esto se muestra fácilmente mediante una sencilla pero tediosa diferenciación.

Este problema ilustra un resultado general que se demuestra en el problema 9.4.

9.3. Demuestre que $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = |f'(z)|^2\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)$, donde $w = f(z)$ es analítica y uno a uno.

www.FreeLibros.me

Solución

La función $\Phi(x, y)$ se transforma en una función $\Phi[x(u, v), y(u, v)]$ por medio de la transformación. Mediante diferenciación se tiene

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}&=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\\&=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]\\&=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

Se suma,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=&\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\\&+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\end{aligned}\tag{1}$$

Como u y v son armónicas $(\partial^2 u/\partial x^2)+(\partial^2 u/\partial y^2)=0$ $(\partial^2 v/\partial x^2)+(\partial^2 v/\partial y^2)=0$. Además, de acuerdo con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\partial u/\partial x=\partial v/\partial y$, $\partial v/\partial x=-\partial u/\partial y$. Así,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left|\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2=|f'(z)|^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Por tanto (1), se convierte en

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)$$

9.4. Demuestre que una función armónica $\Phi(x, y)$ sigue siendo armónica con una transformación $w=f(z)$, donde $f(z)$ es analítica y uno a uno.

Solución

Esto es consecuencia inmediata del problema 9.3, pues $(\partial^2\Phi/\partial x^2)+(\partial^2\Phi/\partial y^2)=0$ y $f'(z)\neq 0$ porque $f(z)$ es uno a uno, de manera que $(\partial^2\Phi/\partial u^2)+(\partial^2\Phi/\partial v^2)=0$.

9.5. Sea a real. Muestre que las partes real e imaginaria de $w=\ln(z-a)$ son funciones armónicas en toda región $\mathcal{R}$ que no contenga a $z=a$.

www.FreeLibros.me

Solución

Método 1. Si $\mathcal{R}$ no contiene a a, entonces $w = \ln(z - a)$ es analítica en $\mathcal{R}$. Por tanto, las partes real e imaginaria son armónicas en $\mathcal{R}$.
Método 2. Sea $z - a = re^{i\theta}$. De este modo, si se usan para θ los valores principales, $w = u + iv = \ln(z - a) = \ln r + i\theta$, de manera que $u = \ln r$, $v = \theta$.

En las coordenadas polares (r, θ), la ecuación de Laplace es

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0$$

y mediante sustitución directa se encuentra que $u = \ln r$ y $v = \theta$ son soluciones si $\mathcal{R}$ no contiene a $r = 0$, es decir, $z = a$.

Método 3. Si $z - a = re^{i\theta}$, entonces $x - a = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y $r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\{y/(x-a)\}$. Así, $w = u + iv = \frac{1}{2}\ln\{(x-a)^2 + y^2\} + i\tan^{-1}\{y/(x-a)\}$ y $u = \frac{1}{2}\ln\{(x-a)^2 + y^2\}$, $v = \tan^{-1}\{y/(x-a)\}$.
Se sustituye esto en la ecuación de Laplace $(\partial^2\Phi/\partial x^2) + (\partial^2\Phi/\partial y^2) = 0$ y se encuentra mediante diferenciación directa que u y v son soluciones si $z \neq a$.

PROBLEMAS DE DIRICHLET Y DE NEUMANN

9.6. Encuentre una función armónica en la mitad superior del plano z, $\text{Im}\{z\} > 0$, que en el eje tome los valores dados por $G(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

Solución

Hay que resolver para $\Phi(x, y)$ el problema del valor frontera

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0; \qquad \lim_{y\to 0+}\Phi(x, y) = G(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Éste es un problema de Dirichlet para el semiplano superior [véase la figura 9-9].

La función $A\theta + B$, donde A y B son constantes reales, es armónica, pues es la parte imaginaria de $A\ln z + B$.

Para determinar A y B, observe que las condiciones frontera son $\Phi = 1$ para $x > 0$, es decir, $\theta = 0$ y $\Phi = 0$ para $x < 0$, es decir, $\theta = \pi$. De manera que

$$1 = A(0) + B \tag{1}$$

$$0 = A(\pi) + B \tag{2}$$

de donde $A = -1/\pi$, $B = 1$.

Por tanto, la solución buscada es

$$\Phi = A\theta + B = 1 - \frac{\theta}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Otro método. Con la fórmula de Poisson para el semiplano

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yG(\eta)\,d\eta}{y^2 + (x-\eta)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{y[0]\,d\eta}{y^2 + (x-\eta)^2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{y[1]\,d\eta}{y^2 + (x-\eta)^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\eta - x}{y}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = 1 - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

www.FreeLibros.me

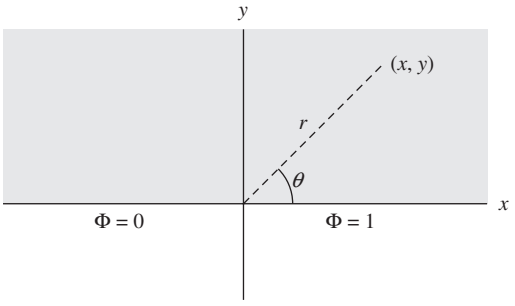


Figura 9-9

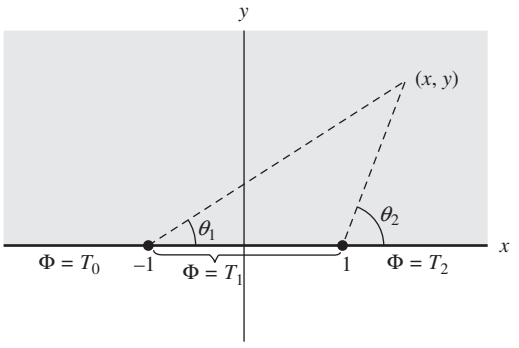


Figura 9-10

9.7. Resuelva el problema de valor frontera

Solución

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0,\quad y>0;\qquad \lim_{y\to 0+}\Phi(x,\,y)=G(x)=\begin{cases}T_0 & x<-1\\ T_1 & -1<x<1\\ T_2 & x>1\end{cases}$$

donde T_0, T_1 y T_2 son constantes.

Éste es un problema de Dirichlet para el semiplano superior [véase la figura 9-10].

La función $A\theta_1+B\theta_2+C$, donde A, B y C son constantes reales, es armónica, pues es la parte imaginaria de $A\ln(z+1)+B\ln(z-1)+C$.

Para determinar A, B y C, observe que las condiciones frontera son: *a*) $\Phi=T_2$ para $x>1$, es decir, $\theta_1=\theta_2=0$; *b*) $\Phi=T_1$, para $-1<x<1$, es decir, $\theta_1=0$, $\theta_2=\pi$; *c*) $\Phi=T_0$, para $x<-1$, es decir, $\theta_1=\pi$, $\theta_2=\pi$. De manera que

$$(1)\ T_2=A(0)+B(0)+C,\quad (2)\ T_1=A(0)+B(\pi)+C,\quad (3)\ T_0=A(\pi)+B(\pi)+C$$

de donde $C=T_2$, $B=(T_1-T_2)/\pi$, $A=(T_0-T_1)/\pi$.

Por tanto, la solución buscada es

$$\Phi=A\theta_1+B\theta_2+C=\frac{T_0-T_1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x+1}\right)+\frac{T_1-T_2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x-1}\right)+T_2$$

Otro método. Con la fórmula de Poisson para el semiplano

$$\begin{aligned}\Phi(x,\,y)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yG(\eta)\,d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-1}\frac{yT_0\,d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{yT_1\,d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}+\frac{1}{\pi}\int_{1}^{\infty}\frac{yT_2\,d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}\\ &=\frac{T_0}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\eta-x}{y}\right)\Bigg|_{-\infty}^{-1}+\frac{T_1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\eta-x}{y}\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\frac{T_2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\eta-x}{y}\right)\Bigg|_{1}^{\infty}\\ &=\frac{T_0-T_1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x+1}\right)+\frac{T_1-T_2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x-1}\right)+T_2\end{aligned}$$

www.FreeLibros.me

9.8. Encuentre una función armónica en el interior del círculo unidad $|z| = 1$ que tome los valores dados por $F(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \pi \\ 0 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$ en su circunferencia.

Solución

Éste es un problema de Dirichlet para el círculo unidad [figura 9-11], en el que se busca una función que satisfaga la ecuación de Laplace en el interior de $|z| = 1$ y tome el valor 0 en el arco ABC y el valor 1 en el arco CDE.

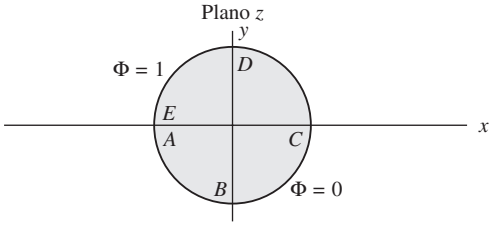


Figura 9-11

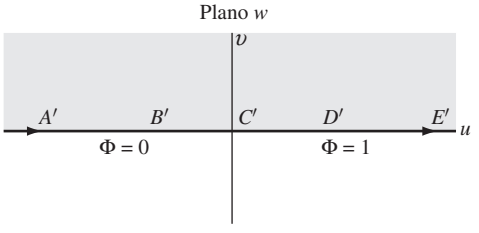


Figura 9-12

Método 1. Mediante transformaciones conformes.

El interior del círculo $|z| = 1$ se lleva a la mitad superior del plano w [figura 9-12] con la función $z = (i - w)/(i + w)$ o $w = i\{(1 - z)/(1 + z)\}$ [véase el problema 8.12, página 263, e intercambie z y w].

Con esta transformación, los arcos ABC y CDE se llevan sobre el eje real negativo y positivo $A'B'C'$ y $C'D'E'$, respectivamente, del plano w. Después, de acuerdo con el problema 9.81, las condiciones frontera $\Phi = 0$ en el arco ABC y $\Phi = 1$ en el arco CDE se convierten, respectivamente, en $\Phi = 0$ en $A'B'C'$ y $\Phi = 1$ en $C'D'E'$.

Por tanto, el problema se reduce a hallar una función armónica Φ en la mitad superior del plano w que tome los valores 0 para $u < 0$ y 1 para $u > 0$. Pero este problema ya se resolvió en el problema 9.6, y la solución (al sustituir x por u y y por v) está dada por

$$\Phi = 1 - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \tag{1}$$

Ahora, como $w = i\{(1 - z)/(1 + z)\}$, se encuentra

$$u = \frac{2y}{(1+x)^2 + y^2}, \qquad v = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(1+x)^2 + y^2}.$$

Se sustituye esto en (1) y se encuentra la solución buscada

$$\Phi = 1 - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2y}{1 - [x^2 + y^2]}\right) \tag{2}$$

o, en coordenadas polares (r, θ), donde $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$,

$$\Phi = 1 - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2r\,\text{sen}\,\theta}{1 - r^2}\right) \tag{3}$$

Método 2. Con la fórmula de Poisson,

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(\phi)\,d\phi}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\phi}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2} = 1 - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2r\,\text{sen}\,\theta}{1 - r^2}\right)$$

mediante integración directa [véase el problema 5.69*b*), página 165].

www.FreeLibros.me

APLICACIONES AL FLUJO DE FLUIDOS

9.9. *a*) Encuentre el potencial complejo para un fluido que se desplaza con una velocidad constante V_0 en una dirección que forma un ángulo δ con el eje x positivo [véase la figura 9-13].

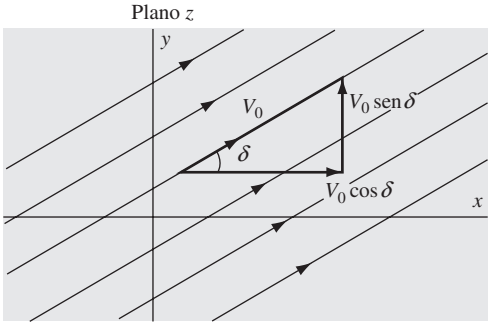


Figura 9-13

b) Determine el potencial de velocidad y la función de flujo.

c) Determine las ecuaciones de las líneas de flujo y las líneas equipotenciales.

Solución

a) Los componentes x y y de la velocidad son $V_x = V_0 \cos\delta$ y $V_y = V_0 \operatorname{sen}\delta$.
La velocidad compleja es

$$\mathcal{V} = V_x + iV_y = V_0 \cos\delta + iV_0 \operatorname{sen}\delta = V_0\, e^{i\delta}$$

El potencial complejo $\Omega(z)$ está dado por

$$\frac{d\Omega}{dz} = \overline{\mathcal{V}} = V_0\, e^{-i\delta}$$

Se integra,

$$\Omega(z) = V_0\, e^{-i\delta} z$$

y se omite la constante de integración.

b) El potencial de velocidad Φ y la función de flujo Ψ son las partes real e imaginaria del potencial complejo. Por tanto,

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = V_0 e^{-i\delta} z = V_0(x\cos\delta + y \operatorname{sen}\delta) + iV_0\,(y\cos\delta - x\operatorname{sen}\delta)$$

y

$$\Phi = V_0(x\cos\delta + y\operatorname{sen}\delta), \quad \Psi = V_0(y\cos\delta - x\operatorname{sen}\delta)$$

Otro método.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = V_x = V_0\cos\delta \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = V_y = V_0 \operatorname{sen}\delta \tag{2}$$

Resolviendo para Φ en (1) $\Phi = (V_0\cos\delta)x + G(y)$. Se sustituye en (2), $G'(y) = V_0 \operatorname{sen}\delta$ y $G(y) = (V_0 \operatorname{sen}\delta)y$, y se omite la constante de integración. Así,

$$\Phi = (V_0\cos\delta)x + (V_0\operatorname{sen}\delta)y$$

www.FreeLibros.me

De acuerdo con las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_x = V_0 \cos \delta \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -V_y = -V_0 \operatorname{sen} \delta \tag{4}$$

Resolviendo para Ψ en (3), $\Psi = (V_0 \cos \delta)y + H(x)$. Se sustituye en (4), $H'(x) = -V_0 \operatorname{sen} \delta$ y $H(x) = -(V_0 \operatorname{sen} \delta)x$, y se omite la constante de integración. Así,

$$\Psi = (V_0 \cos \delta)y - (V_0 \operatorname{sen} \delta)x$$

c) Las líneas de flujo están dadas por $\Psi = V_0(y \cos \delta - x \operatorname{sen} \delta) = \beta$ para diferentes valores de β. Físicamente, en condiciones de estado estacionario, una línea de flujo representa la trayectoria que sigue una partícula de fluido; en este caso, una trayectoria en línea recta.

Las líneas equipotenciales están dadas por $\Phi = V_0(x \cos \delta + y \operatorname{sen} \delta) = \alpha$ para diferentes valores de α. Geométricamente, son líneas perpendiculares a las líneas de flujo; todos los puntos en una línea equipotencial están a un mismo potencial.

9.10. El potencial complejo del flujo de un fluido está dado por $\Omega(z) = V_0\{z + (a^2/z)\}$, donde V_0 y a son constantes positivas. *a*) Obtenga las ecuaciones de las líneas de flujo y de las líneas equipotenciales, represéntelas gráficamente e interprete físicamente. *b*) Muestre que el flujo puede interpretarse como el flujo alrededor de un obstáculo circular de radio a. *c*) Encuentre la velocidad en cualquier punto y determine su valor lejos del obstáculo. *d*) Encuentre los puntos de estancamiento.

Solución

a) Sea $z = re^{i\theta}$. De este modo,

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = V_0\left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{r}e^{-i\theta}\right) = V_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta + iV_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\operatorname{sen}\theta$$

de donde

$$\Phi = V_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta, \qquad \Psi = V_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\operatorname{sen}\theta$$

Las líneas de flujo están dadas por $\Psi = \text{constante} = \beta$, es decir,

$$V_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\operatorname{sen}\theta = \beta$$

En la figura 9-14, estas líneas son las curvas representadas con línea continua y muestran las trayectorias que siguen las partículas del fluido. Observe que $\Psi = 0$ corresponde a $r = a$ y $\theta = 0$ o π.

Las líneas equipotenciales están dadas por $\Phi = \text{constante} = \alpha$, es decir,

$$V_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta = \alpha$$

En la figura 9-14, estas líneas son las curvas representadas con línea punteada, y son ortogonales a la familia de líneas de flujo.

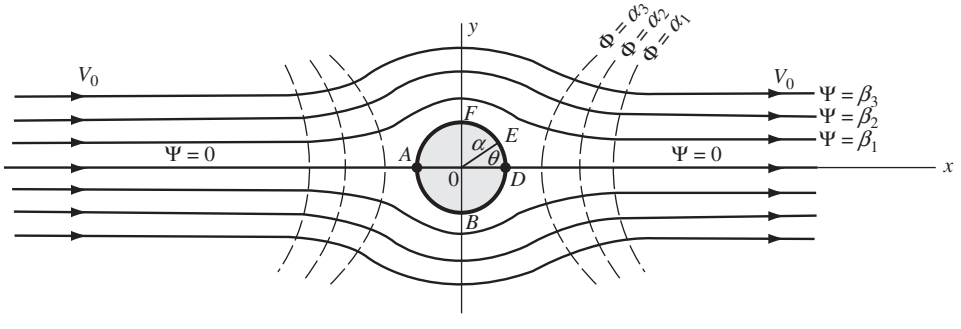


Figura 9-14

www.FreeLibros.me

b) El círculo $r = a$ representa una línea de flujo y, como no puede haber ningún flujo a través de una línea de flujo, ésta se considera un obstáculo circular de radio a colocado en la trayectoria del fluido.

c) Se tiene

$$\Omega'(z) = V_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) = V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}e^{-2i\theta}\right) = V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right) + i\frac{V_0 a^2}{r^2}\operatorname{sen} 2\theta$$

Así, la velocidad compleja es

$$\mathcal{V} = \overline{\Omega'(z)} = V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right) - i\frac{V_0 a^2}{r^2}\operatorname{sen} 2\theta \tag{1}$$

y su magnitud es

$$V = |\mathcal{V}| = \sqrt{\left\{V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right)\right\}^2 + \left\{\frac{V_0 a^2}{r^2}\operatorname{sen} 2\theta\right\}^2}$$

$$= V_0\sqrt{1 - \frac{2a^2\cos 2\theta}{r^2} + \frac{a^4}{r^4}} \tag{2}$$

De (1) se ve que, lejos del obstáculo, $\mathcal{V} = V_0$ aproximadamente, es decir, el fluido se mueve en la dirección del eje x positivo con velocidad constante V_0.

d) Los puntos de estancamiento (es decir, los puntos en los que la velocidad es cero) están dados por $\Omega'(z) = 0$, es decir $V_0\{1 - (a^2/z^2)\} = 0$ o $z = a$ y $z = -a$. Por tanto, los puntos de estancamiento en la figura 9-14 se encuentran en A y en D.

9.11. Muestre que con la transformación $w = z + (a^2/z)$ el flujo del fluido en el plano z, considerado en el problema 9.10, se lleva a un flujo uniforme con velocidad constante V_0 en el plano w.

Solución

El potencial complejo para el flujo en el plano w está dado por

$$V_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right) = V_0 w$$

que representa un flujo uniforme con velocidad constante V_0 en el plano w [véase la entrada A-4 de la página 249].

En general, la transformación $w = \Omega(z)$ lleva el flujo de un fluido en el plano z con potencial complejo $\Omega(z)$ a un flujo uniforme en el plano w. Esto es muy útil para determinar potenciales complejos de patrones de fluidos complicados mediante el conocimiento de transformaciones.

9.12. Un fluido emana con velocidad constante de una fuente lineal infinita perpendicular al plano z en $z = 0$ [figura 9-15]. *a*) Muestre que la velocidad del fluido a una distancia r de la fuente es $V = k/r$, donde k es una constante. *b*) Muestre que el potencial complejo es $\Omega(z) = k \ln z$. *c*) ¿Qué modificaciones hay que hacer en el inciso *b*) si la fuente lineal está en $z = a$? *c*) ¿Qué modificaciones hay que hacer en el inciso *b*) si la fuente se sustituye por un sumidero en el que el fluido desaparece con velocidad constante?

Solución

a) Considere una porción de la fuente lineal de longitud unitaria [figura 9-16]. Si V_r es la velocidad radial del fluido a la distancia r de la fuente y σ es la densidad del fluido (que se supone incompresible, de manera que σ es constante), entonces:

Masa de fluido que emana de la fuente lineal de longitud unitaria, por unidad de tiempo
= masa de fluido que atraviesa la superficie del cilindro de radio r y altura 1
= (área de superficie)(velocidad radial)(densidad del fluido)
$= (2\pi r \cdot 1)(V_r)(\sigma) = 2\pi r V_r \sigma$

www.FreeLibros.me

Si esto tiene que ser igual a una constante κ, entonces

$$V_r = \frac{\kappa}{2\pi\sigma r} = \frac{k}{r}$$

donde $k = \kappa/2\pi\sigma$ se conoce como *fuerza* de la fuente.

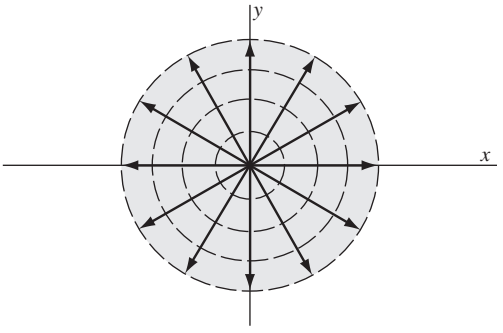


Figura 9-15

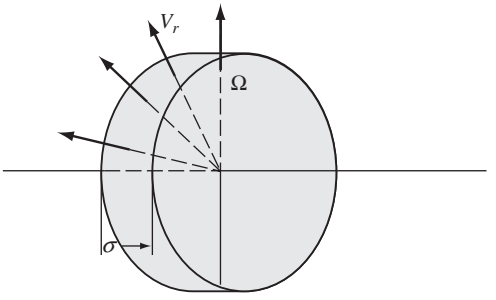


Figura 9-16

b) Como $V_r = \partial\Phi/\partial r = k/r$, al integrar y omitir la constante de integración se tiene $\Phi = k \ln r$. Pero esto es la parte real de $\Omega(z) = k \ln z$, que, por tanto, es el potencial complejo buscado.

c) Si la fuente lineal está en $z = a$ y no en $z = 0$, se sustituye z por $z - a$ y se obtiene el potencial complejo $\Omega(z) = k \ln (z - a)$.

d) Si la fuente se sustituye por un sumidero, el potencial complejo es $\Omega(z) = -k \ln z$, donde el signo menos es consecuencia de que la velocidad se dirija a $z = 0$.

De manera similar, $\Omega(z) = -k \ln (z - a)$ es el potencial complejo para un sumidero en $z = a$.

9.13. *a*) Encuentre el potencial complejo debido a una fuente en $z = -a$ y un sumidero en $z = a$ de igual fuerza k.

b) Determine las líneas equipotenciales y las líneas de flujo, y represéntelas gráficamente.

c) Encuentre la rapidez del fluido en cualquier punto.

Solución

a) El potencial complejo debido a una fuente en $z = -a$ de fuerza k es $k \ln(z + a)$.
El potencial complejo debido a un sumidero en $z = a$ de fuerza k es $-k \ln(z - a)$.

Así, mediante superposición:

El potencial complejo debido a una fuente en $z = -a$ y un sumidero en $z = a$ de fuerza k es

$$\Omega(z) = k \ln(z + a) - k \ln(z - a) = k \ln\left(\frac{z + a}{z - a}\right)$$

b) Sea $z + a = r_1 e^{i\theta_1}$, $z - a = r_2 e^{i\theta_2}$. Así,

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = k \ln\left(\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}\right) = k \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + ik(\theta_1 - \theta_2)$$

de manera que $\Phi = k \ln(r_1/r_2)$, $\Psi = k(\theta_1 - \theta_2)$. Por tanto, las líneas equipotenciales y las líneas de flujo están dadas por

$$\Phi = k \ln(r_1/r_2) = \alpha, \qquad \Psi = k(\theta_1 - \theta_2) = \beta$$

Con $r_1 = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$, $\theta_1 = \tan^{-1}\{y/(x + a)\}$, $\theta_2 = \tan^{-1}\{y/(x - a)\}$, las líneas equipotenciales están dadas por

$$\frac{\sqrt{(x + a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}} = e^{\alpha/k}$$

www.FreeLibros.me

Esto se escribe como

$$[x - a\coth(\alpha/k)]^2 + y^2 = a^2\operatorname{csch}^2(\alpha/k)$$

que son, para distintos valores de α, círculos con centro en $a\coth(\alpha/k)$ y radios iguales a $a|\cosh(\alpha/k)|$.

Estos círculos se representan en la figura 9-17 mediante líneas punteadas.

Las líneas de flujo están dadas por

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x+a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-a}\right) = \beta/k$$

o, al tomar tangentes en ambos lados y simplificar,

$$x^2 + [y + a\cot(\beta/k)]^2 = a^2\csc^2(\beta/k)$$

lo que, para distintos valores de β, representa círculos con centros en $-a\cot(\beta/k)$ y radios $a|\csc(\beta/k)|$. Estos círculos, que pasan por $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, se representan en la figura 9-17 mediante líneas continuas.

c) Rapidez $= |\Omega'(z)| = \left|\dfrac{k}{z+a} - \dfrac{k}{z-a}\right| = \dfrac{2ka}{|z^2 - a^2|}$

$$= \frac{2ka}{|a^2 - r^2e^{2i\theta}|} = \frac{2ka}{\sqrt{a^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta + r^4}}$$

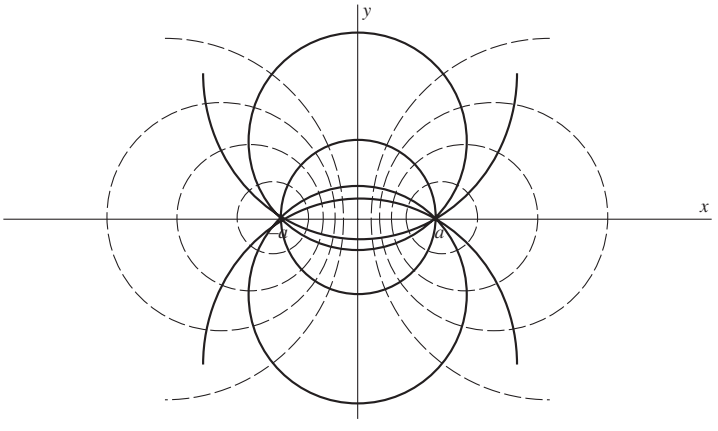


Figura 9-17

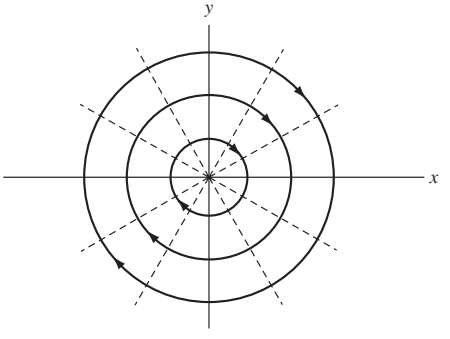


Figura 9-18

9.14. Analice el movimiento de un fluido cuyo potencial complejo es $\Omega(z) = ik\ln z$, donde $k > 0$.

Solución

Si $z = re^{i\theta}$, entonces $\Omega(z) = \Phi + i\Psi = ik(\ln r + i\theta) = ik\ln r - k\theta$ o $\Phi = -k\theta$, $\Psi = k\ln r$.
Las líneas de flujo están dadas por

$$\Psi = \text{constante} \quad \text{o} \quad r = \text{constante}$$

que son círculos con centro común en $z = 0$ [en la figura 9-18 se representan mediante líneas continuas].

Las líneas equipotenciales, dadas por $\theta =$ constante, se representan en la figura 9-18 mediante líneas punteadas. Como

$$\Omega'(z) = \frac{ik}{z} = \frac{ik}{r}e^{-i\theta} = \frac{k\operatorname{sen}\theta}{r} + \frac{ik\cos\theta}{r}$$

la velocidad compleja está dada por

$$\mathcal{V} = \overline{\Omega'(z)} = \frac{k\operatorname{sen}\theta}{r} - \frac{ik\cos\theta}{r}$$

www.FreeLibros.me

y muestra que la dirección de flujo del fluido es en la dirección de las manecillas del reloj, como se indica en la figura. La rapidez está dada por $V = |\mathcal{V}| = k/r$.

Por tanto, este potencial complejo describe el flujo de un fluido que rota en torno a $z = 0$. Este flujo se conoce en ocasiones como *flujo vórtice*, y $z = 0$, como *vórtice*.

9.15. Muestre que la circulación en torno al vórtice del problema 9.14 está dada por $\gamma = 2\pi k$.

Solución

Si la curva C encierra a $z = 0$, la integral de circulación está dada por

$$\gamma = \oint_C V_t\, ds = \oint_C V_x\, dx + V_y\, dy = \oint_C -\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = \oint_C -d\Phi = \int_0^{2\pi} k\, d\theta = 2\pi k$$

En términos de la circulación, el potencial complejo se escribe $\Omega(z) = (i\gamma/2\pi) \ln z$.

9.16. Analice el movimiento de un fluido cuyo potencial complejo es

$$\Omega(z) = V_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{i\gamma}{2\pi} \ln z$$

Solución

Este potencial complejo tiene el efecto de superponer una circulación sobre el flujo del problema 9.10. Si $z = re^{i\theta}$,

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = V_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta - \frac{\gamma\theta}{2\pi} + i\left\{V_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{\gamma}{2\pi}\ln r\right\}$$

Así, las líneas equipotenciales y las líneas de flujo están dadas por

$$V_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta - \frac{\gamma\theta}{2\pi} = \alpha, \qquad V_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{\gamma}{2\pi}\ln r = \beta$$

En general, hay dos puntos de estancamiento, que se presentan donde $\Omega'(z) = 0$, es decir,

$$V_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{i\gamma}{2\pi z} = 0 \quad \text{o} \quad z = \frac{-i\gamma}{4\pi V_0} \pm \sqrt{a^2 - \frac{\gamma^2}{16\pi^2 V_0^2}}$$

En el caso de $\gamma = 4\pi a V_0$, sólo hay un punto de estancamiento.

Como $r = a$ es una línea de flujo correspondiente a $\beta = (\gamma/2\pi) \ln a$, el flujo se considera un flujo en torno a un obstáculo circular, como en el problema 9.10. Lejos del obstáculo, la velocidad del fluido es V_0, pues $\lim_{|z|\to\infty} \Omega'(z) = V_0$.

El patrón de flujo varía según la magnitud de γ. En las figuras 9-19 y 9-20 se muestran dos de los muchos posibles. La figura 9-19 corresponde a $\gamma < 4\pi a V_0$; los puntos de estancamiento están en A y B. La figura 9-20 corresponde a $\gamma > 4\pi a V_0$ y sólo hay un punto de estancamiento del fluido en C.

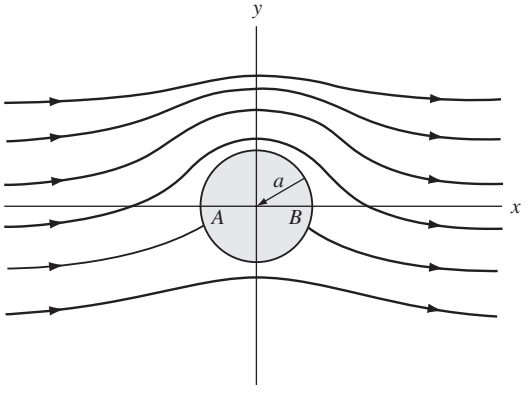


Figura 9-19

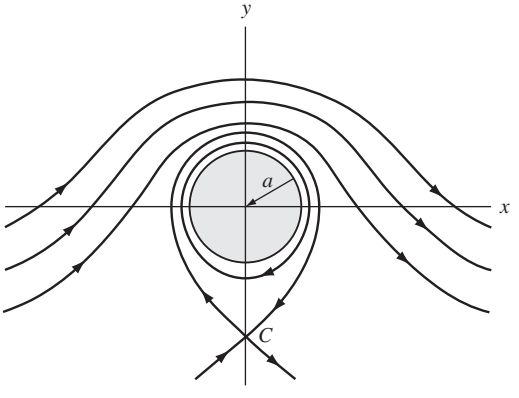


Figura 9-20

www.FreeLibros.me

TEOREMA DE BLASIUS

9.17. Sea $\Omega(z)$ el potencial complejo que describe el flujo en torno a un obstáculo cilíndrico de longitud unitaria cuya frontera en el plano z es una curva simple cerrada C. Demuestre que la fuerza neta del fluido sobre el obstáculo está dada por

$$\overline{F} = X - iY = \frac{1}{2} i\sigma \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz$$

donde X y Y son los componentes de la fuerza en las direcciones x y y positivas, respectivamente, y σ es la densidad del fluido.

Solución

La fuerza que actúa sobre el elemento de área ds en la figura 9-21 es normal a ds y su magnitud está dada por $P\,ds$, donde P es la presión. Al descomponer esta fuerza en componentes paralelos a los ejes x y y, se ve que esta fuerza está dada por

$$\begin{aligned} dF &= dX + i\,dY = -P\,ds \operatorname{sen}\theta + iP\,ds\cos\theta \\ &= iP\,ds(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = iP\,dse^{i\theta} = iP\,dz \end{aligned}$$

al aprovechar que

$$dz = dx + i\,dy = ds\cos\theta + i\,ds\operatorname{sen}\theta = dse^{i\theta}$$

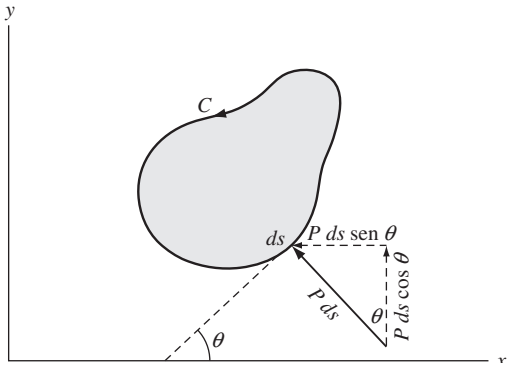


Figura 9-21

Como C representa una línea de flujo, de acuerdo con el teorema de Bernoulli, se tiene $P + \frac{1}{2}\sigma V^2 = K$ o $P = K - \frac{1}{2}\sigma V^2$, donde V es la rapidez del fluido sobre la línea de flujo. Además, de acuerdo con el problema 9.49, se tiene $d\Omega/dz = Ve^{-i\theta}$.

Entonces, al integrar sobre C, se encuentra

$$\begin{aligned} F = X + iY &= \oint_C iP\,dz = i\oint_C \left(K - \frac{1}{2}\sigma V^2\right) dz = -\frac{1}{2} i\sigma \oint_C V^2\,dz \\ &= -\frac{1}{2} i\sigma \oint_C V^2 e^{i\theta}\,ds = -\frac{1}{2} i\sigma \oint_C (V^2 e^{2i\theta})(e^{-i\theta}\,ds) \end{aligned}$$

o

$$\overline{F} = X - iY = \frac{1}{2} i\sigma \oint_C (V^2 e^{-2i\theta})(e^{i\theta}\,ds) = \frac{1}{2} i\sigma \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz$$

www.FreeLibros.me

9.18. Sea M el momento total en torno al origen de las fuerzas de presión sobre el obstáculo en el problema 9.17. Demuestre que

$$M = \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2}\sigma \oint_C z\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz\right\}$$

Solución

Los momentos en sentido contrario al de las manecillas del reloj se consideran positivos. El momento en torno al origen de la fuerza que actúa sobre el elemento ds de la figura 9-21 es

$$dM = (P\,ds \operatorname{sen}\theta)y + (P\,ds\cos\theta)x = P(y\,dy + x\,dx)$$

pues $ds \operatorname{sen}\theta = dy$ y $ds\cos\theta = dx$. Así, con la ecuación de Bernoulli, el momento total es

$$\begin{aligned} M &= \oint_C P(y\,dy + x\,dx) = \oint_C \left(K - \frac{1}{2}\sigma V^2\right)(y\,dy + x\,dx) \\ &= K\oint_C (y\,dy + x\,dx) - \frac{1}{2}\sigma\oint_C V^2(y\,dy + x\,dx) - \frac{1}{2}\sigma\oint_C V^2(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)\,ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde se aprovechó que $\oint_C (y\,dy + x\,dx) = 0$, pues $y\,dy + x\,dx$ es una diferencial exacta. Por tanto,

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{2}\sigma\oint_C V^2(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)\,ds = \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2}\sigma\oint_C V^2(x+iy)(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)\,ds\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2}\sigma\oint_C V^2 z e^{-i\theta}\,ds\right\} = \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2}\sigma\oint_C z(V^2 e^{-2i\theta})(e^{i\theta}\,ds)\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2}\sigma\oint_C z\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz\right\} \end{aligned}$$

Este resultado también suele escribirse en la forma

$$M + iN = -\frac{1}{2}\sigma\oint_C z\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz$$

donde N no tiene ningún significado físico simple.

9.19. Encuentre la fuerza neta que actúa sobre el obstáculo cilíndrico del problema 9.16.

Solución

El potencial complejo para el flujo en el problema 9.16 es

$$\Omega = V_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{i\gamma}{2\pi}\ln z$$

www.FreeLibros.me

donde V_0 es la rapidez del fluido lejos del obstáculo y γ es la circulación. De acuerdo con el problema 9.17, la fuerza neta que actúa sobre el obstáculo cilíndrico está dada por F, donde

$$\overline{F} = X - iY = \frac{1}{2} i\sigma \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz = \frac{1}{2} i\sigma \oint_C \left\{ V_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{i\gamma}{2\pi z}\right\}^2 dz$$

$$= \frac{1}{2} i\sigma \oint_C \left\{ V_0^2\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^2 + \frac{2iV_0\gamma}{2\pi z}\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) - \frac{\gamma^2}{4\pi^2 z^2}\right\} dz = -\sigma V_0 \gamma$$

Así, $X = 0$, $Y = \sigma V_0 \gamma$, y se sigue que existe una fuerza neta en la dirección y positiva de magnitud $\sigma V_0 \gamma$. En el caso de que el cilindro sea horizontal y el flujo tenga lugar en un plano vertical, esta fuerza se llama *empuje* sobre el cilindro.

APLICACIONES EN ELECTROSTÁTICA

9.20. *a*) Encuentre el potencial complejo debido a una carga lineal q por longitud unitaria, perpendicular al plano z en $z = 0$.

b) ¿Qué modificaciones hay que hacer al inciso *a*) si la carga lineal está en $z = a$?

c) Analice las similitudes con el potencial complejo para una fuente lineal o un sumidero lineal en el flujo del fluido.

Solución

a) El campo eléctrico debido a una carga lineal q por longitud unitaria es radial, y la componente normal del vector eléctrico es constante e igual a E_r, mientras que el componente tangencial es cero (véase la figura 9-22). Si C es un cilindro de radio r con eje en $z = 0$, de acuerdo con el teorema de Gauss,

$$\oint_C E_n\, ds = E_r \oint_C ds = E_r \cdot 2\pi r = 4\pi q$$

y

$$E_r = \frac{2q}{r}$$

Como $E_r = -(\partial\Phi/\partial r)$, se tiene $\Phi = -2q \ln r$, al omitir la constante de integración. Esto es la parte real de $\Omega(z) = -2q \ln z$, que es el potencial complejo buscado.

b) Si la carga lineal está en $z = a$, el potencial complejo es $\Omega(z) = -2q \ln (z - a)$.

c) El potencial complejo tiene la misma forma que el de una fuente lineal de fluido si $k = -2q$ [véase el problema 9.12]. Si q es una carga positiva, esto corresponde a un sumidero lineal.

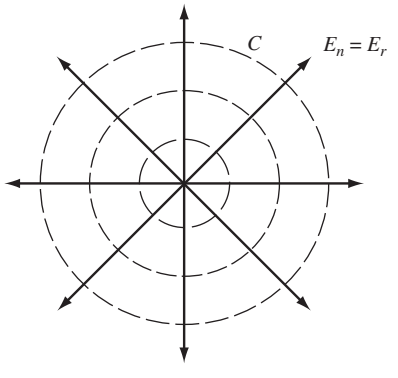


Figura 9-22

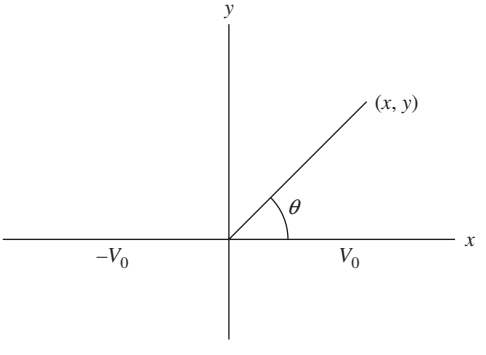


Figura 9-23

www.FreeLibros.me

9.21. *a*) Encuentre el potencial en cualquier punto de la región que se muestra en la figura 9-23 si los potenciales en el eje x están dados por V_0 para $x > 0$ y $-V_0$ para $x < 0$.

b) Determine el equipotencial y las líneas de flujo.

Solución

a) Hay que hallar una función armónica en el plano que tome los valores V_0 para $x > 0$ (es decir, $\theta = 0$) y $-V_0$ para $x < 0$ (es decir, $\theta = \pi$). Igual que en el problema 9.6, si A y B son constantes reales, $A\theta + B$ es armónica. Así, $A(0) + B = V_0$, $A(\pi) + B = -V_0$, de donde $A = -2V_0/\pi$, $B = V_0$, de manera que el potencial buscado es

$$V_0\left(1 - \frac{2}{\pi}\theta\right) = V_0\left(1 - \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$$

en la mitad superior del plano $y > 0$. El potencial en la mitad inferior del plano se obtiene por simetría.

b) Las líneas equipotenciales están dadas por

$$V_0\left(1 - \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \alpha$$

es decir, $y = mx$, donde m es una constante. Éstas son líneas rectas que pasan por el origen.

Las líneas de flujo son trayectorias ortogonales a las rectas $y = mx$ y están dadas por $x^2 + y^2 = \beta$. Estas líneas son circunferencias con centro en el origen.

Otro método. Una función conjugada de $V_0\left(1 - \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ es $-\frac{2V_0}{\pi}\ln r$. Así, las líneas de flujo están dadas por $r = \sqrt{x^2 + y^2} =$ constante, que son circunferencias con centro en el origen.

9.22. *a*) Encuentre el potencial debido a una carga lineal q por longitud unitaria en $z = z_0$ y a una carga lineal $-q$ por longitud unitaria en $z = \bar{z}_0$.

b) Muestre que el potencial debido a un plano infinito [ABC en la figura 9-25] mantenido a potencial cero (potencial de tierra) y a una carga lineal q por longitud unitaria paralela a este plano se halla a partir del resultado del inciso *a*).

Solución

a) El potencial complejo debido a las dos cargas lineales [figura 9-24] es

$$\Omega(z) = -2q\ln(z - z_0) + 2q\ln(z - \bar{z}_0) = 2q\ln\left(\frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0}\right)$$

Así, el potencial buscado es la parte real de esta expresión, es decir,

$$\Phi = 2q\,\mathrm{Re}\left\{\ln\left(\frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0}\right)\right\} \tag{1}$$

b) Para probar esto hay que mostrar que en el eje x el potencial (1) se reduce a $\Phi = 0$, es decir, ABC en la figura 9-25 está a potencial cero. Esto es consecuencia inmediata de que, en el eje x, $z = x$, de manera que

$$\Omega = 2q\ln\left(\frac{x - \bar{z}_0}{x - z_0}\right) \quad \text{y} \quad \overline{\Omega} = 2q\ln\left(\frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0}\right) = -\Omega$$

es decir, $\Phi = \mathrm{Re}\{\Omega\} = 0$ en el eje x.

www.FreeLibros.me

Por tanto, la carga $-q$ en $\bar{z}_0$ [figura 9-24] puede sustituirse por un plano ABC a potencial cero [figura 9-25], y a la inversa.

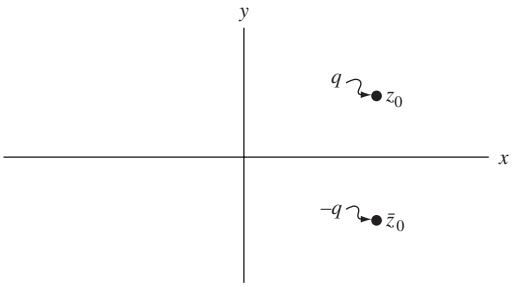


Figura 9-24

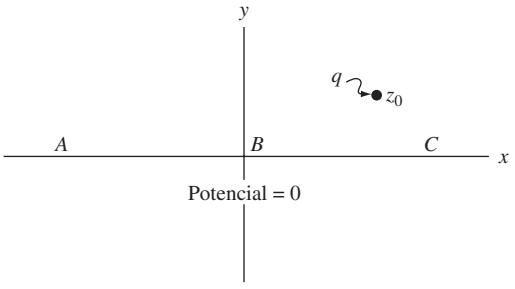


Figura 9-25

9.23. Dos planos infinitos paralelos, a una distancia a uno del otro, están conectados a tierra (es decir, a potencial cero). Una carga lineal q por unidad de longitud se localiza entre los planos a una distancie b de uno de ellos. Determine el potencial en un punto entre los planos.

Solución

En la figura 9-26 represente con ABC y DEF los dos planos perpendiculares al plano z y suponga que la carga lineal pasa por el eje imaginario en el punto $z = bi$.

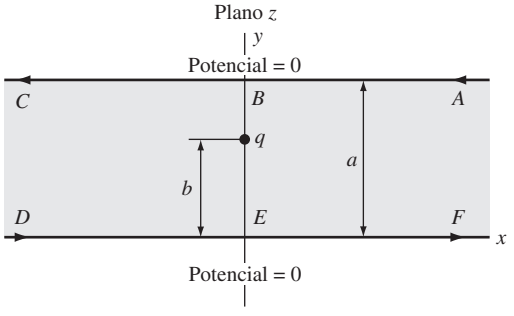


Figura 9-26

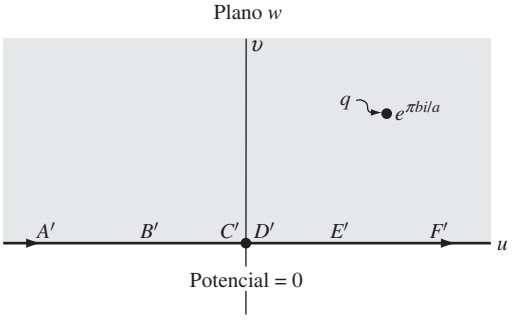


Figura 9-27

En la entrada A-2 de la página 248 se ve que la transformación $w = e^{\pi z/a}$ lleva la región sombreada de la figura 9-26 sobre la mitad superior del plano w en la figura 9-27. La carga lineal q en $z = bi$, de la figura 9-26, se lleva a la carga lineal q en $w = e^{\pi bi/a}$. La frontera $ABCDEF$ en la figura 9-26 (a potencial cero) se lleva al eje x $A'B'C'D'E'F'$ (a potencial cero), donde C' y D' coinciden en $w = 0$.

De acuerdo con el problema 9.22, el potencial en cualquier punto de la región sombreada en la figura 9-27 es

$$\Phi = 2q\,\mathrm{Re}\left\{\frac{w - e^{-\pi bi/a}}{w - e^{\pi bi/a}}\right\}$$

Así, el potencial en cualquier punto de la figura 9-26 es

$$\Phi = 2q\,\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{\pi z/a} - e^{-\pi bi/a}}{e^{\pi z/a} - e^{\pi bi/a}}\right\}$$

APLICACIONES AL FLUJO DE CALOR

9.24. Las fronteras del bloque semiinfinito (sombreado en la figura 9-28) se mantienen a las temperaturas indicadas, donde T es constante. Encuentre la temperatura en estado de equilibrio.

www.FreeLibros.me

Solución

La región sombreada del plano z se lleva a la mitad superior del plano w [figura 9-29] mediante la transformación $w = \text{sen}(\pi z/a)$, la cual es equivalente a $u = \text{sen}(\pi x/a)\cosh(\pi y/a)$, $v = \cos(\pi x/a)\,\text{senh}(\pi y/a)$ [véase la entrada A-3a) en la página 248].

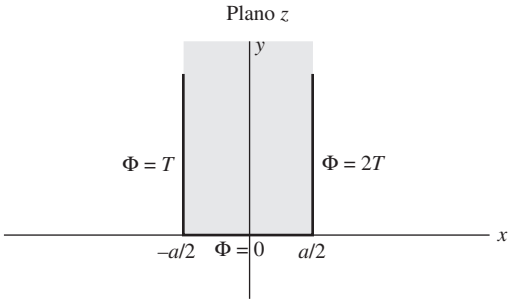


Figura 9-28

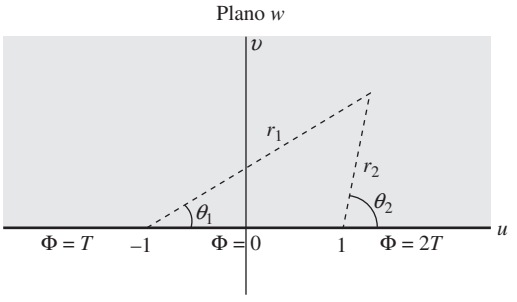


Figura 9-29

Ahora hay que resolver el problema equivalente en el plano w. Se emplea el método del problema 9.7 y se encuentra que la solución en el plano w es

$$\Phi = \frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u+1}\right) - \frac{2T}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u-1}\right) + 2T$$

por lo que la solución requerida en el plano z es

$$\Phi = \frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left\{\frac{\cos(\pi x/a)\,\text{senh}(\pi y/a)}{\text{sen}(\pi x/a)\cosh(\pi y/a)+1}\right\} - \frac{2T}{\pi}\tan^{-1}\left\{\frac{\cos(\pi x/a)\,\text{senh}(\pi y/a)}{\text{sen}(\pi x/a)\cosh(\pi y/a)-1}\right\} + 2T$$

9.25. Encuentre la temperatura en estado de equilibrio en todo punto de la región sombreada en la figura 9-30 si las temperaturas se mantienen como se indica.

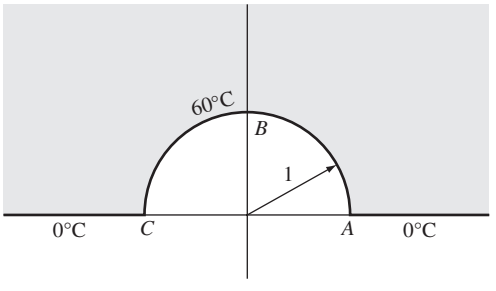


Figura 9-30

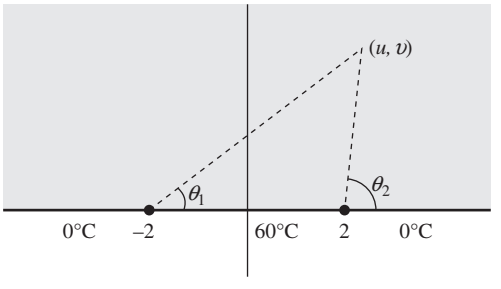


Figura 9-31

Solución

La región sombreada del plano z se lleva sobre la mitad superior del plano w [sombreada en la figura 9-31] mediante la transformación $w = z + (1/z)$ [entrada A-4 en la página 249], la cual es equivalente a

$$u + iv = x + iy + \frac{1}{x+iy} = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right), \quad \text{es decir, } u = x + \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = y - \frac{y}{x^2+y^2}$$

La solución al problema en el plano w, con el método del problema 9.7, es

$$\frac{60}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u-2}\right) - \frac{60}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u+2}\right)$$

www.FreeLibros.me

Así, al sustituir los valores u y v, la solución, en el plano z, al problema es

$$\frac{60}{\pi}\tan^{-1}\left\{\frac{y(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)x-2(x^2+y^2)}\right\}-\frac{60}{\pi}\tan^{-1}\left\{\frac{y(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)x+2(x^2+y^2)}\right\}$$

o, en coordenadas polares,

$$\frac{60}{\pi}\tan^{-1}\left\{\frac{(r^2-1)\operatorname{sen}\theta}{(r^2+1)\cos\theta-2r}\right\}-\frac{60}{\pi}\tan^{-1}\left\{\frac{(r^2-1)\operatorname{sen}\theta}{(r^2+1)\cos\theta+2r}\right\}$$

PROBLEMAS DIVERSOS

9.26. Una región está limitada por dos conductores cilíndricos concéntricos de longitud infinita, con radios r_1 y r_2 ($r_2 > r_1$), los cuales están cargados a potenciales Φ_1 y Φ_2, respectivamente [véase la figura 9-32]. Encuentre *a*) el potencial y *b*) el vector del campo eléctrico en cualquier lugar de la región.

Solución

a) Considere la función $\Omega = A\ln z + B$, donde A y B son constantes reales. Si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$\Omega = \Phi + i\Psi = A\ln r + Ai\theta + B, \quad \text{o} \quad \Phi = A\ln r + B, \quad \Psi = A\theta$$

Ahora Φ satisface la ecuación de Laplace, es decir, es armónica en cualquier parte de la región $r_1 < r < r_2$ y se reduce a $\Phi = \Phi_1$ y $\Phi = \Phi_2$ en $r = r_1$ y $r = r_2$, siempre que A y B se elijan de manera que

$$\Phi_1 = A\ln r_1 + B, \quad \Phi_2 = A\ln r_2 + B$$

es decir,

$$A = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\ln(r_2/r_1)}, \quad B = \frac{\Phi_1\ln r_2 - \Phi_2\ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}$$

Así, el potencial buscado es

$$\Phi = \frac{(\Phi_2-\Phi_1)}{\ln(r_2/r_1)}\ln r + \frac{\Phi_1\ln r_2 - \Phi_2\ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}$$

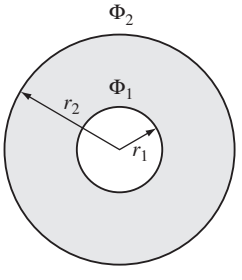


Figura 9-32

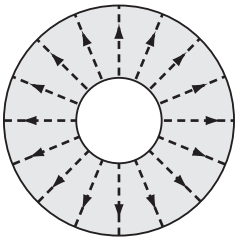


Figura 9-33

b) El vector del campo eléctrico es

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\operatorname{grad}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\Phi_1-\Phi_2}{\ln(r_2/r_1)}\cdot\frac{1}{r}$$

Observe que las líneas de fuerza, o líneas de flujo, son ortogonales a las líneas equipotenciales; algunas de ellas se representan mediante líneas punteadas en la figura 9-33.

www.FreeLibros.me

9.27. Encuentre la capacitancia del condensador formado por los dos conductores cilíndricos del problema 9.26.

Solución

Si Γ es cualquier curva simple cerrada que contenga el cilindro interior y q es la carga en ese cilindro, de acuerdo con el teorema de Gauss y el resultado del problema 9.26 se tiene

$$\oint_{\Gamma} E_n\, ds = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left\{ \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \frac{1}{r} \right\} r\, d\theta = \frac{2\pi(\Phi_1 - \Phi_2)}{\ln(r_2/r_1)} = 4\pi q$$

Así,

$$q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2\ln(r_2/r_1)}$$

de manera que

$$\text{Capacitancia } C = \frac{\text{carga}}{\text{diferencia en potencial}} = \frac{q}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{1}{2\ln(r_2/r_1)}$$

que sólo depende de la geometría de los condensadores, como debe ser.

El resultado anterior es válido si se tiene el vacío entre los dos conductores. Si entre los conductores hay un medio con constante dieléctrica κ, hay que sustituir q por q/κ y, en este caso, la capacitancia es $1/[2\kappa \ln(r_2/r_1)]$.

9.28. Dos conductores cilíndricos circulares de radios iguales R y centros a una distancia D uno del otro [figura 9-34] están cargados a potenciales V_0 y $-V_0$, respectivamente. *a*) Determine la carga, por longitud unitaria, necesaria para lograr esto. *b*) Encuentre una expresión para la capacitancia.

Solución

a) Se emplean los resultados del problema 9.13, pues cualquiera de las curvas (superficies) equipotenciales pueden sustituirse por conductores circulares a los potenciales especificados. Con $\alpha = -V_0$ y $\alpha = V_0$, y al observar que $k = 2q$, se encuentra que los centros de los círculos están en $x = -a \coth(V_0/2q)$ y $x = a \coth(V_0/2q)$, de manera que

$$D = 2a \coth\left(\frac{V_0}{2q}\right) \qquad (1)$$

El radio R de los círculos es

$$R = a \operatorname{csch}\left(\frac{V_0}{2q}\right) \qquad (2)$$

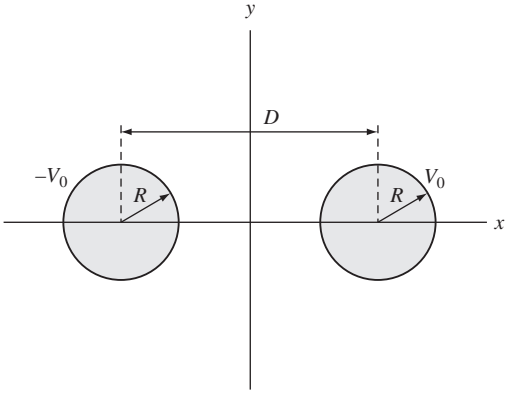


Figura 9-34

Se divide (1) entre (2) y se obtiene $2\cosh(V_0/2q) = D/R$, de manera que la carga requerida es

$$q = \frac{V_0}{2\cosh^{-1}(D/2R)}$$

b)
$$\text{Capacitancia } C = \frac{\text{carga}}{\text{diferencia en potencial}} = \frac{q}{2V_0} = \frac{1}{4\cosh^{-1}(D/2R)}$$

www.FreeLibros.me

El resultado es válido en el vacío. Si existe un medio de constante dieléctrica κ, hay que dividir el resultado entre κ.

Observe que la capacitancia depende, como siempre, de la geometría. Este resultado es fundamental en la teoría de los cables de línea de transmisión.

9.29. Demuestre la unicidad de la solución al problema de Dirichlet.

Solución

El problema de Dirichlet consiste en hallar una función Φ que satisfaga $(\partial^2\Phi/\partial x^2) + (\partial^2\Phi/\partial y^2) = 0$ en una región simplemente conexa $\mathcal{R}$ y que tome un valor prefijado $\Phi = f(x, y)$ en la frontera C de $\mathcal{R}$. Para demostrar la unicidad hay que mostrar que, si tal solución existe, es única. Para esto suponga que existen dos soluciones, Φ_1 y Φ_2. Así,

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} = 0 \text{ en } \mathcal{R} \quad \text{y} \quad \Phi_1 = f(x, y) \text{ en } C \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2} = 0 \text{ en } \mathcal{R} \quad \text{y} \quad \Phi_2 = f(x, y) \text{ en } C \tag{2}$$

Al restar y con $G = \Phi_1 - \Phi_2$, se tiene

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0 \text{ en } \mathcal{R} \quad \text{y} \quad G = 0 \text{ en } C \tag{3}$$

Para mostrar que $\Phi_1 = \Phi_2$ de manera idéntica, hay que mostrar que $G = 0$ de manera idéntica en $\mathcal{R}$.

Sea $F = G$ en el problema 4.31 de la página 137, y se obtiene

$$\oint_C G\left(\frac{\partial G}{\partial x}dx - \frac{\partial G}{\partial y}dy\right) = -\iint_{\mathcal{R}} \left[G\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \tag{4}$$

Suponga que G no es de manera idéntica igual a una constante en $\mathcal{R}$. Del hecho de que $G = 0$ en C y de que $(\partial^2 G/\partial x^2) + (\partial^2 G/\partial y^2) = 0$ idénticamente en $\mathcal{R}$, (4) se convierte en

$$\iint_{\mathcal{R}} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = 0$$

Pero esto contradice la suposición de que G no es de manera idéntica igual a una constante en $\mathcal{R}$, pues, en tal caso,

$$\iint_{\mathcal{R}} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy > 0$$

Se concluye que G debe ser constante en $\mathcal{R}$ y, por continuidad, debe tenerse $G = 0$. Por tanto, $\Phi_1 = \Phi_2$ y sólo existe una solución.

9.30. Una región infinita $ABDE$, en forma de cuña con un ángulo $\pi/4$ [sombreada en la figura 9-35] mantiene uno de sus lados (AB) a la temperatura constante T_1. Del lado BDE, la parte BD [de longitud unitaria] está aislada, y la parte restante DE se mantiene a la temperatura constante T_2. Indique la temperatura en cualquier parte de la región.

www.FreeLibros.me

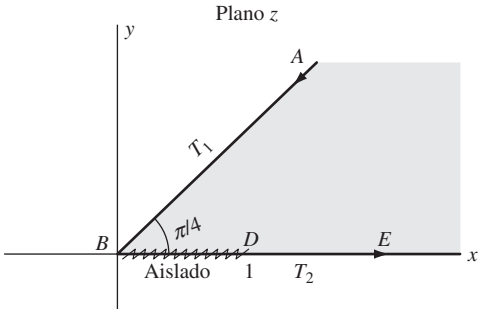


Figura 9-35

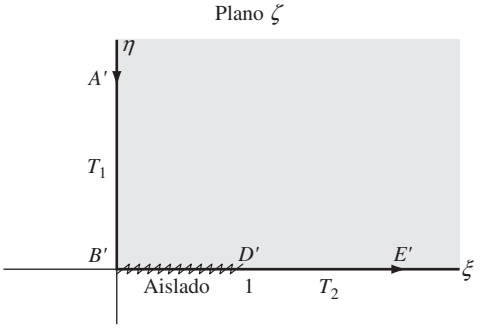


Figura 9-36

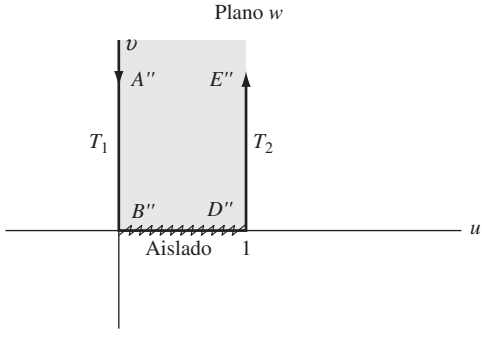


Figura 9-37

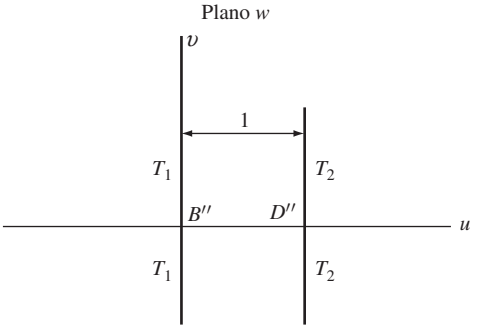


Figura 9-38

Solución

Mediante la transformación $\zeta = z^2$, la región sombreada del plano z [figura 9-35] se lleva a la región sombreada de la figura 9-36 con las condiciones frontera indicadas [véase la entrada A-1 en la página 248].

Mediante la transformación $\zeta = \text{sen}\,(\pi w/2)$, la región sombreada del plano ζ [figura 9-36] se lleva a la región sombreada de la figura 9-37 con las condiciones frontera indicadas [véase la entrada C-1 en la página 254].

Ahora, el problema de temperatura representado mediante la figura 9-37 en donde $B''D''$ está aislado es equivalente al problema de temperatura representado mediante la figura 9-38, pues por simetría, no puede haber ninguna transferencia de calor a través de $B''D''$. Pero éste es el problema de determinar la temperatura entre dos planos paralelos que se mantienen a temperaturas constantes T_1 y T_2, respectivamente. En este caso, la variación de temperatura es lineal y por ende debe estar dada por $T_1 + (T_2 - T_1)u$.

De $\zeta = z^2$ y $\zeta = \text{sen}(\pi w/2)$, al eliminar ζ se tiene $w = (2/\pi)\,\text{sen}^{-1}\,z^2$ o $u = (2/\pi)\,\text{Re}\{\text{sen}^{-1}\,z^2\}$.
Por tanto, la temperatura buscada es

$$T_1 + \frac{2(T_2 - T_1)}{\pi}\,\text{Re}\{\text{sen}^{-1}\,z^2\}$$

En coordenadas polares (r, θ), esto se escribe como [véase el problema 9.95]

$$T_1 + \frac{2(T_2 - T_1)}{\pi}\,\text{sen}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{r^4 + 2r^2\cos 2\theta + 1} - \frac{1}{2}\sqrt{r^4 - 2r^2\cos 2\theta + 1}\right\}$$

www.FreeLibros.me

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

FUNCIONES ARMÓNICAS

9.31. Demuestre que las funciones *a*) $2xy + y^3 - 3x^2y$, *b*) e^{-x} sen y son armónicas.

9.32. Demuestre que las funciones del problema 9.31 siguen siendo armónicas con las transformaciones *a*) $z = w^2$, *b*) $z = \text{sen } w$.

9.33. Suponga que $\Phi(x, y)$ es armónica. Demuestre que $\Phi(x + a, y + b)$, donde a y b son constantes, también es armónica.

9.34. Suponga que $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ son armónicas en una región $\mathcal{R}$ y que $c_1, c_2, \ldots, c_n$, son constantes. Demuestre que $c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \cdots + c_n\Phi_n$ es armónica en $\mathcal{R}$.

9.35. Demuestre que toda función armónica que sólo dependa de la distancia r de un punto fijo debe ser de la forma $A \ln r + B$, donde A y B son constantes.

9.36. Suponga que $F(z)$ es analítica y diferente de cero en una región $\mathcal{R}$. Demuestre que las partes real e imaginaria de $F(z)$ son armónicas en $\mathcal{R}$.

PROBLEMAS DE DIRICHLET Y DE NEUMANN

9.37. Encuentre una función armónica en la mitad superior del plano z $\text{Im}\{z\} > 0$ que en el eje x tome los valores dados por $G(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$.

9.38. Repita el problema 9.37 con $G(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$.

9.39. Encuentre una función armónica en el interior del círculo $|z| = 1$ que sobre su circunferencia tome los valores $F(\theta) = \begin{cases} T & 0 < \theta < \pi \\ -T & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$.

9.40. Repita el problema 9.39 con $F(\theta) = \begin{cases} T & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \\ -T & 3\pi/2 < \theta < 2\pi \end{cases}$.

9.41. Repita el problema 9.39 con $F(\theta) = \begin{cases} \text{sen } \theta & 0 < \theta < \pi \\ 0 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$.

9.42. Encuentre una función armónica en el interior de la circunferencia $|z| = 2$ que tome los valores $F(\theta) = \begin{cases} 10 & 0 < \theta < \pi \\ 0 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$.

9.43. Demuestre por sustitución directa que las respuestas obtenidas en los incisos *a*) del problema 9.6, *b*) del problema 9.7, *c*) del problema 9.8 son en realidad soluciones a los correspondientes problemas de frontera.

9.44. Encuentre una función armónica $\Phi(x, y)$ en el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$, que tome los valores $V(x, 0) = -1$, $V(0, y) = 2$.

9.45. Encuentre una función $\Phi(x, y)$ armónica en el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$ y que satisfaga las condiciones frontera $\Phi(x, 0) = e^{-x}$, $\partial\Phi/\partial x|_{x=0} = 0$.

APLICACIONES AL FLUJO DE FLUIDOS

9.46. Bosqueje las líneas de flujo y las líneas equipotenciales para el movimiento de un fluido en el que el potencial complejo está dado por *a*) $z^2 + 2z$, *b*) z^4, *c*) e^{-z}, *d*) $\cos z$.

9.47. Analice el flujo del fluido correspondiente al potencial complejo $\Omega(z) = V_0(z + 1/z^2)$.

9.48. Verifique las afirmaciones previas a las ecuaciones (9.5) y (9.6) de la página 283.

9.49. Deduzca la relación $d\Omega/dz = Ve^{-i\theta}$, donde V y θ se definen como en el problema 9.17.

www.FreeLibros.me

9.50. Consulte el problema 9.10 y *a*) muestre que la rapidez del fluido en el punto E [figura 9-14] está dada por $2V_0|\text{sen}\,\theta|$ y *b*) determine en qué puntos del cilindro se tiene la mayor rapidez.

9.51. *a*) Suponga que P es la presión en el punto E del obstáculo en la figura 9-14 del problema 9.10 y que P_∞ es la presión lejos del obstáculo. Demuestre que

$$P - P_\infty = \frac{1}{2}\sigma V_0^2(1 - 4\,\text{sen}^2\theta)$$

b) Demuestre que en los puntos B y F se crea un vacío si la rapidez del fluido es igual o mayor a $V_0 = \sqrt{2P_\infty/3\sigma}$. Esto suele conocerse como *cavitación.*

9.52. Obtenga la ecuación (9.19), página 285, mediante un proceso de límite aplicado a la ecuación (9.18).

9.53. Analice el flujo de fluido debido a tres fuentes de igual fuerza k localizadas en $z = -a, 0, a$.

9.54. Analice el flujo de fluido debido a dos fuentes en $z = \pm a$ y un sumidero en $z = 0$ si todos tienen la misma magnitud.

9.55. Demuestre que con la transformación $w = F(z)$, donde $F(z)$ es analítica, una fuente (o sumidero) en el plano z en $z = z_0$ se lleva a una fuente (o sumidero) de igual fuerza en el plano w en $w = w_0 = F(z_0)$.

9.56. Deuestre que el momento total sobre el obstáculo cilíndrico del problema 9.10 es cero y explique esto físicamente.

9.57. Suponga que $\Psi(x, y)$ es la función corriente. Demuestre que la velocidad de flujo de masa a través del arco C que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $\sigma\{\Psi(x_2, y_2) - \Psi(x_1, y_1)\}$.

9.58. *a*) Demuestre que el potencial complejo debido a una fuente de fuerza $k > 0$ en un fluido que se mueve con rapidez V_0 es $\Omega = V_0 z + k \ln z$ y *b*) analice el movimiento.

9.59. Un sumidero y una fuente, de igual fuerza m, están localizados en $z = \pm 1$ entre las rectas paralelas $y = \pm 1$. Demuestre que el potencial complejo para el movimiento del fluido es

$$\Omega = m \ln\left\{\frac{e^{\pi(z+1)} - 1}{e^{\pi(z-1)} - 1}\right\}$$

9.60. Con una fuente de fluido en $z = z_0$ y una pared en $x = 0$ demuestre que el flujo resultante es equivalente a eliminar la pared e introducir otra fuente de la misma fuerza en $z = -z_0$.

9.61. Un fluido fluye entre las dos ramas de la hipérbola $ax^2 - by^2 = 1$, $a > 0$, $b > 0$. Demuestre que el potencial complejo del flujo está dado por $K \cosh^{-1} \alpha z$, donde K es una constante positiva y $\alpha = \sqrt{ab/(a+b)}$.

APLICACIONES EN ELECTROSTÁTICA

9.62. Dos conductores planos semiinfinitos, como se indica en la figura 9-39, se cargan a potenciales constantes Φ_1 y Φ_2, respectivamente. Encuentre *a*) el potencial Φ y *b*) el campo eléctrico $\mathcal{E}$ en cualquier parte de la región sombreada entre ellos.

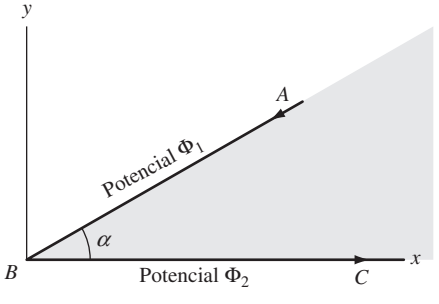


Figura 9-39

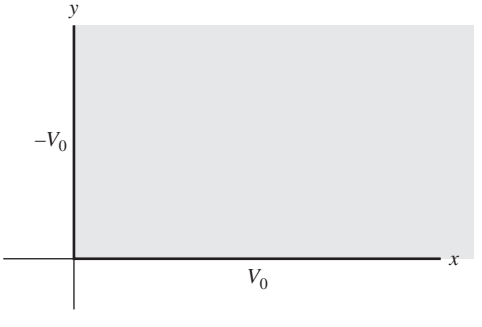


Figura 9-40

www.FreeLibros.me

9.63. Encuentre *a*) el potencial y *b*) el campo eléctrico en todas partes de la región sombreada de la figura 9-40 si los potenciales en los ejes x y y positivos son constantes e iguales a V_0 y $-V_0$, respectivamente.

9.64. Una región infinita tiene tres cables localizados en $z = -1, 0, 1$ a potenciales constantes $-V_0$, $2V_0$, $-V_0$, respectivamente. Encuentre *a*) el potencial y *b*) el campo eléctrico en todas partes.

9.65. Demuestre que la capacidad de un capacitor es invariante con una transformación conforme.

9.66. Los conductores planos semiinfinitos AB y BC, que se intersecan formando un ángulo α, están conectados a tierra [figura 9-41]. Una carga lineal q por longitud unitaria se encuentra en el punto z_1, en la región sombreada y a la misma distancia a de AB que de BC. Encuentre el potencial.

9.67. Repita el problema 9.66 si q se encuentra a la distancia a de AB y a la distancia b de BC.

9.68. Repita el problema 9.23 si hay dos cargas lineales q por longitud unitaria y $-q$ por longitud unitaria, que se encuentran en $z = bi$ y $z = ci$, respectivamente, donde $0 < b < a$, $0 < c < a$ y $b \neq c$.

9.69. Un cilindro circular de longitud infinita tiene una mitad de su superficie cargada a potencial constante V_0 y la otra mitad está conectada a tierra, y las dos mitades están aisladas una de otra. Encuentre el potencial en todas partes.

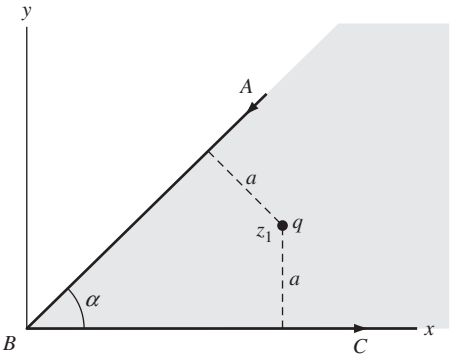


Figura 9-41

APLICACIONES AL FLUJO DE CALOR

9.70. *a*) Encuentre la temperatura de estado constante en cualquier parte de la región sombreada en la figura 9-42.

b) Determine las líneas isotérmicas y las líneas de flujo.

9.71. Encuentre la temperatura de estado estable en el punto (2, 1) de la región sombreada en la figura 9-43.

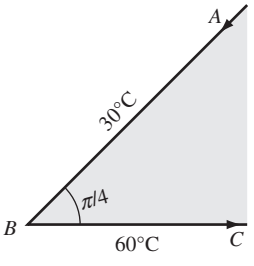


Figura 9-42

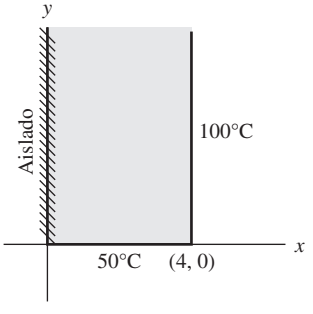


Figura 9-43

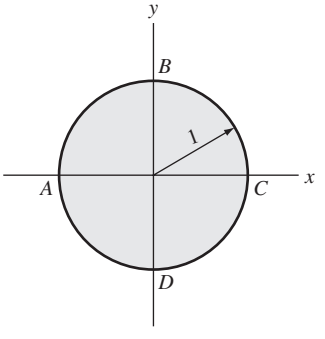


Figura 9-44

9.72. Las porciones convexas ABC y ADC del cilindro unitario [figura 9-44] se mantienen a las temperaturas de 40°C y 80°C, respectivamente. *a*) Encuentre la temperatura de estado estable en todo punto interior. *b*) Determine las líneas isotérmicas y las líneas de flujo.

www.FreeLibros.me

9.73. Encuentre la temperatura de estado estable en el punto (5, 2) en la región sombreada de la figura 9-45 si las temperaturas se mantienen como se indica.

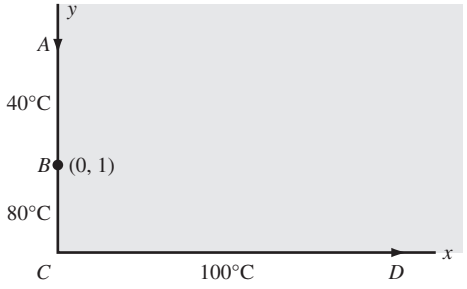


Figura 9-45

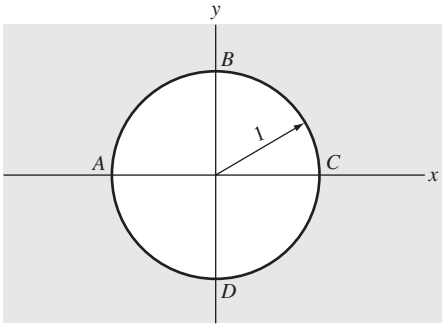


Figura 9-46

9.74. Una placa conductora infinita tiene un orificio circular *ABCD* de radio unitario [figura 9-46]. A los arcos *ABC* y *ADC* se les aplican temperaturas de 20°C y 80°C y se mantienen indefinidamente. Halle la temperatura de estado estable en cualquier punto de la placa.

PROBLEMAS DIVERSOS

9.75. Suponga que $\Phi(x, y)$ es armónica. Demuestre que $\Phi(x/r^2, y/r^2)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ también es armónica.

9.76. Suponga que U y V son continuamente diferenciables. Demuestre que

$$a)\ \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} \qquad b)\ \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dx}{ds}$$

donde n y s denotan, respectivamente, la normal hacia afuera y el parámetro longitud de arco a una curva simple cerrada C.

9.77. Sean U y V funciones armónicas conjugadas. Demuestre que $a)\ \partial U/\partial n = \partial V/\partial s \quad b)\ \partial U/\partial s = -(\partial V/\partial n)$.

9.78. Demuestre que la función $1 - r^2/(1 - 2r\cos\theta + r^2)$ es armónica en toda región en la que no se encuentre el punto $r = 1$, $\theta = 0$.

9.79. Suponga que se requiere resolver el problema de Neumann, es decir, hallar una función V armónica en una región $\mathcal{R}$ tal que en la frontera C de $\mathcal{R}$, $\partial V/\partial n = G(s)$, donde s es el parámetro longitud de arco. Sea $H(s) = \int_a^R G(s)$, donde a es un punto de C, y suponga que $\oint_C G(s)\,ds = 0$. Muestre que para hallar V es necesario hallar la función armónica conjugada U que satisfaga la condición $U = -H(s)$ en C. Éste es un problema equivalente de Dirichlet. [*Sugerencia:* Use el problema 9.77.]

9.80. Demuestre que, salvo una constante aditiva arbitraria, la solución al problema de Neumann es única.

9.81. Demuestre el teorema 9.3, página 282.

9.82. ¿Qué modificación hay que hacer al teorema 9.3, página 282, si la condición frontera $\Phi = a$ en C se sustituye por $\Phi = f(x, y)$ en C?

9.83. ¿Qué hay que modificar en el teorema 9.3, página 282, si la condición frontera $\partial\Phi/\partial n = 0$ en C se sustituye por $\partial\Phi/\partial n = g(x, y)$ en C?

9.84. Suponga que el movimiento de un fluido se debe a una distribución de fuentes, sumideros y dobletes, y suponga que C es una curva tal que a través de ella no hay ningún flujo. Así, la distribución de fuentes, sumideros y dobletes a un lado de C se conoce como *imagen* de la distribución de fuentes, sumideros y dobletes al otro lado de C. Demuestre que la imagen de una fuente en el interior de una circunferencia C es una fuente de la misma fuerza en el punto inverso junto con un sumidero de igual fuerza en el centro de C. [Un punto P es un punto *inverso* de

www.FreeLibros.me

un punto Q respecto de una circunferencia con centro en O si OPQ es una línea recta y $OP \cdot OQ = a^2$, donde a es el radio de C.]

9.85. Una fuente de fuerza $k > 0$ se encuentra en el punto z_0 en un fluido contenido en el primer cuadrante, donde los ejes x y y se consideran barreras rígidas. Demuestre que la rapidez del fluido en cualquier punto está dada por

$$k|(z - z_0)^{-1} + (z - \bar{z}_0)^{-1} + (z + z_0)^{-1} + (z + \bar{z}_0)^{-1}|$$

9.86. Dos conductores cilíndricos de longitud infinita cuyas secciones transversales son elipses confocales con focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ [véase la figura 9-47] están cargadas a potenciales constantes Φ_1 y Φ_2, respectivamente. Muestre que la capacitancia por longitud unitaria es igual a

$$\frac{2\pi}{\cosh^{-1}(R_2/c) - \cosh^{-1}(R_1/c)}$$

[*Sugerencia:* Utilice la transformación $z = c \cosh w$.]

9.87. En el problema 9.86 suponga que Φ_1 y Φ_2 representan temperaturas constantes aplicadas a los cilindros elípticos. Halle la temperatura en estado de equilibrio en cualquier punto de la región conductora entre los cilindros.

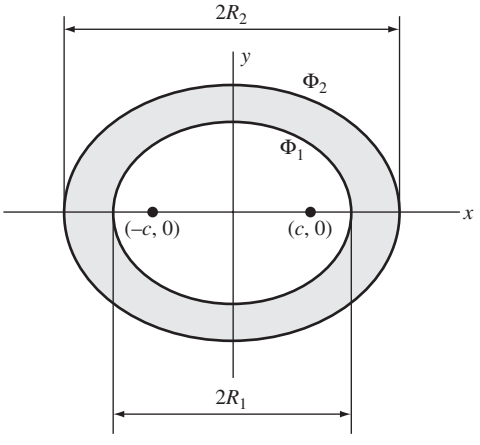


Figura 9-47

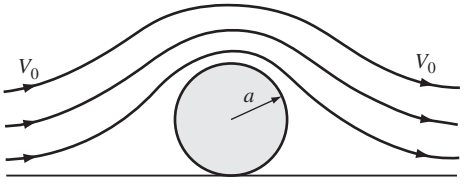


Figura 9-48

9.88. Un obstáculo en forma de cilindro circular de radio a descansa en el fondo de un canal de fluido, el cual fluye con velocidad V_0 a distancias alejadas del obstáculo [véase la figura 9-48].

a) Demuestre que el potencial complejo está dado por

$$\Omega(z) = \pi a V_0 \coth(\pi a/z)$$

b) Demuestre que la rapidez en la parte superior del cilindro es $\frac{1}{4}\pi^2 V_0$ y compárela con la rapidez en el caso de un obstáculo circular situado en el centro de un fluido.

c) Demuestre que la diferencia de presión entre los puntos en la parte superior y en la parte inferior del cilindro es $\sigma\pi^4 V_0^2/32$.

9.89. *a*) Demuestre que el potencial complejo para el flujo de un fluido que pasa por el cilíndrico elíptico de la figura 9-49 está dado por

$$\Omega(z) = V_0\left\{\zeta + \frac{(a+b)^2}{4\zeta}\right\}$$

donde $\zeta = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - c^2})$ y $c^2 = a^2 - b^2$.

www.FreeLibros.me

b) Demuestre que la rapidez del fluido en las partes superior e inferior del cilindro es $V_0(1 + b/a)$. Analice el caso $a = b$. [*Sugerencia:* Exprese el potencial complejo en términos de coordenadas elípticas (ξ, η), donde

$$z = x + iy = c\cosh(\xi + i\eta) = c\cosh\zeta$$

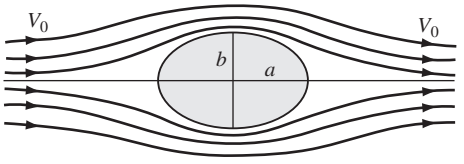


Figura 9-49

9.90. Suponga que en el problema 9.89, la dirección del flujo forma un ángulo δ con el eje x positivo. Demuestre que el potencial complejo está dado por el resultado del inciso *a*) con $\zeta = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - c^2})e^{i\delta}$.

9.91. En la *teoría de la elasticidad*, la ecuación

$$\nabla^4\Phi = \nabla^2(\nabla^2\Phi) = \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0$$

conocida como *ecuación biarmónica*, es de fundamental importancia. Las soluciones a esta ecuación se conocen como *biarmónicas*. Demuestre que, si $F(z)$ y $G(z)$ son analíticas en una región $\mathcal{R}$, la parte real de $\bar{z}F(z) + G(z)$ es biarmónica en $\mathcal{R}$.

9.92. Demuestre que, en general, con una transformación conforme, las funciones biarmónicas (véase el problema 9.91), no permanecen biarmónicas.

9.93. *a*) Demuestre que $\Omega(z) = K\ln\operatorname{senh}(\pi z/a)$, $k > 0$, $a > 0$ representa el potencial complejo debido a una sucesión de fuentes de fluido en $z = 0, \pm ai, \pm 2ai, \ldots$.

b) Demuestre que, salvo constantes aditivas, las funciones de potencial y de flujo están dadas por

$$\Phi = K\ln\{\cosh(2\pi x/a) - \cos(2\pi y/a)\}, \qquad \Psi = K\tan^{-1}\left\{\frac{\tan(\pi y/a)}{\tanh(\pi x/a)}\right\}$$

c) Represente gráficamente algunas líneas de flujo del fluido.

9.94. Demuestre que el potencial complejo del problema 9.93 es el mismo que el debido a una fuente localizada a la mitad entre las rectas paralelas $y = \pm 3a/2$.

9.95. Verifique la aseveración del final del problema 9.30 [compare el problema 2.137].

9.96. Un condensador está formado por un cilindro elíptico, en el que las longitudes de los ejes mayor y menor son $2a$ y $2b$, respectivamente, y un plano raso AB cuya longitud es $2h$ [véase la figura 9-50]. Muestre que la capacitancia es igual a $2\pi/\{\cosh^{-1}(a/h)\}$.

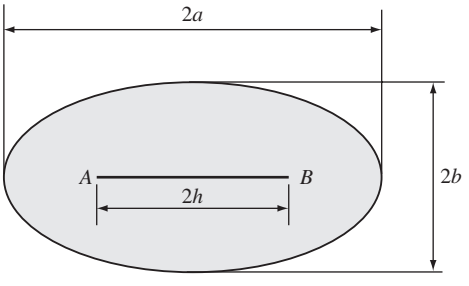


Figura 9-50

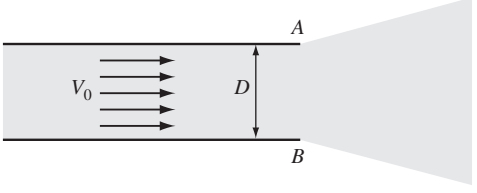


Figura 9-51

www.FreeLibros.me

9.97. Un fluido circula con velocidad uniforme V_0 a través de un canal semiinfinito de anchura D y emerge a través de una abertura AB [figura 9-51]. *a*) Encuentre el potencial complejo para este flujo. *b*) Determine las líneas de flujo y las líneas equipotenciales, y obtenga las gráficas de algunas de ellas. [*Sugerencia:* Utilice la entrada C-5 de la página 256.]

9.98. Mediante la teoría del potencial, interprete el problema 9.30.

9.99. *a*) Muestre que, en el vacío, la capacitancia de los conductores cilíndricos paralelos de la figura 9-52 es

$$\frac{1}{2\cosh^{-1}\left(\dfrac{D^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2}\right)}$$

b) Examine el caso $R_1 = R_2 = R$ y compare con el problema 9.28.

9.100. Demuestre que, en el vacío, la capacitancia de los dos conductores cilíndricos paralelos de la figura 9-53 es

$$\frac{1}{2\cosh^{-1}\left(\dfrac{R_1^2 + R_2^2 - D^2}{2R_1R_2}\right)}$$

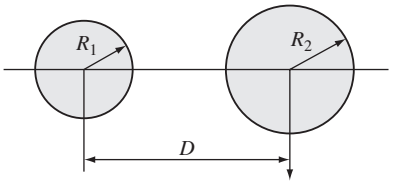


Figura 9-52

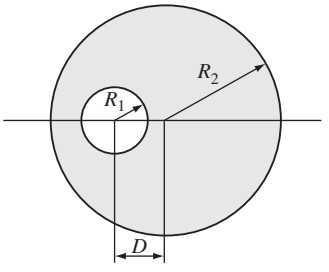


Figura 9-53

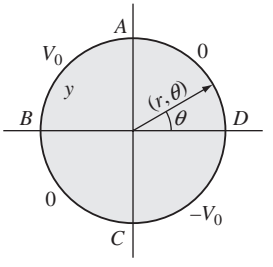


Figura 9-54

9.101. Encuentre el potencial en todo punto del cilindro unitario de la figura 9-54 si AB, BC, CD y DA se mantienen a los potenciales V_0, 0, $-V_0$ y 0, respectivamente.

9.102. La región sombreada de la figura 9-55 representa un semiplano conductor infinito, en el que las líneas AD, DE y DB se mantienen a las temperaturas 0, T y $2T$, respectivamente, donde T es una constante. *a*) Encuentre la temperatura en todas partes. *b*) Dé una interpretación en la que intervenga la teoría del potencial.

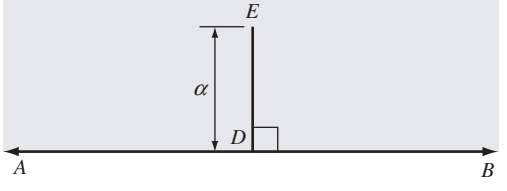


Figura 9-55

9.103. Repita el problema anterior si *a*) DE está aislado, *b*) AB está aislado.

9.104. En la figura 9-55 suponga que DE representa un obstáculo perpendicular a la base de un canal infinito en el que fluye un fluido de izquierda a derecha de manera que, lejos del obstáculo, la rapidez del fluido es V_0. Encuentre *a*) la rapidez y *b*) la presión en todo punto del fluido.

www.FreeLibros.me

9.105. Encuentre el estado estacionario de temperatura en el punto (3, 2) en la región sombreada de la figura 9-56.

9.106. Una región *ABCD* en forma de cuña con un ángulo de $\pi/4$ [sombreada en la figura 9-57] mantiene uno de sus lados (*CD*) a 50°C; en el otro lado *ABC* se mantiene la parte *AB* a 25°C, y la parte *BC*, de longitud unitaria, está aislada. Encuentre la temperatura en estado de equilibrio en cualquier punto.

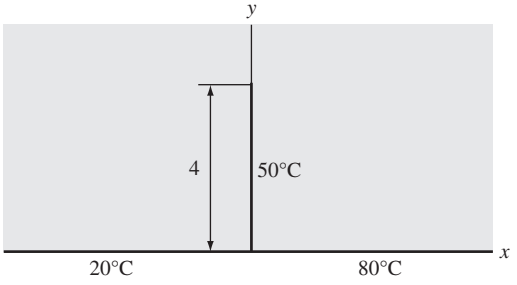


Figura 9-56

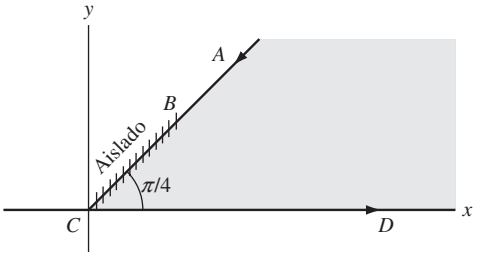


Figura 9-57

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

9.37. $1 - (2/\pi)\tan^{-1}(y/x)$

9.38. $1 - \dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x-1}\right) - \dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x+1}\right)$

9.39. $T\left\{1 - \dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\dfrac{2r\,\text{sen}\,\theta}{1-r^2}\right)\right\}$

9.42. $10\left\{1 - \dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\dfrac{4r\,\text{sen}\,\theta}{4-r^2}\right)\right\}$

9.44. $\dfrac{3}{\pi}\tan^{-1}\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right) - 1$

9.62. *a)* $\Phi = \Phi_2 + \left(\dfrac{\Phi_1 - \Phi_2}{\alpha}\right)\theta$, *b)* $\varepsilon = (\Phi_2 - \Phi_1)/\alpha r$

9.63. *a)* $V_0\left\{1 - \dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)\right\}$

9.64. *a)* $V_0 \ln\{z(z^2-1)\}$

9.66. $\text{Im}\left\{-2qi\ln\left(\dfrac{z^{\pi/\alpha} - z_1^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - \bar{z}_1^{\pi/\alpha}}\right)\right\}$

9.70. *a)* $60 - (120/\pi)\tan^{-1}(y/x)$

9.73. 45.9°C

9.101. $\dfrac{V_0}{\pi}\left(\tan^{-1}\dfrac{2r\,\text{sen}\,\theta}{1-r^2} + \tan^{-1}\dfrac{2r\cos\theta}{1-r^2}\right)$

www.FreeLibros.me

CAPÍTULO 10

Temas especiales

10.1 PROLONGACIÓN ANALÍTICA

Sea $F_1(z)$ una función de z, analítica en una región $\mathcal{R}_1$ [figura 10-1]. Suponga que se puede hallar una función $F_2(z)$, analítica en una región $\mathcal{R}_2$ y tal que $F_1(z) = F_2(z)$ en la región común a $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. Entonces se dice que $F_2(z)$ es una *prolongación analítica* de $F_1(z)$. Esto significa que existe una función analítica $F(z)$ en la región formada por $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ tal que $F(z) = F_1(z)$ en $\mathcal{R}_1$ y $F(z) = F_2(z)$ en $\mathcal{R}_2$. En realidad, basta con que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ tengan en común un pequeño arco, como el arco *LMN* en la figura 10-2.

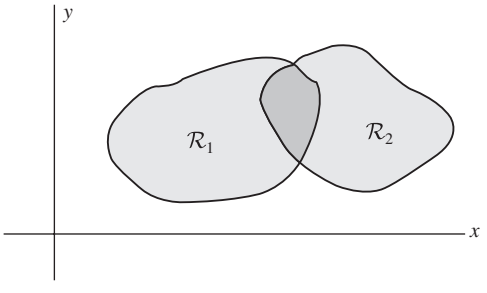


Figura 10-1

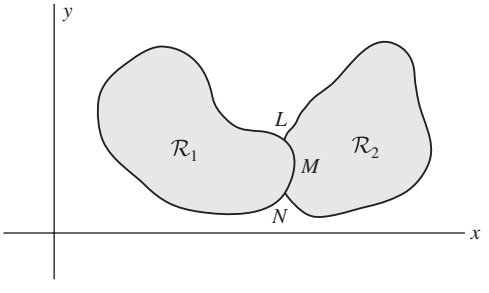


Figura 10-2

Mediante la prolongación analítica a las regiones $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$, etc., la región de definición original se extiende a otras partes del plano complejo. Las funciones $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$, . . . , definidas en $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, . . . , respectivamente, en ocasiones se llaman *elementos de función* o sólo *elementos*. Algunas veces es imposible prolongar analíticamente una función más allá de la frontera de una región. Entonces a esta frontera se le llama *frontera natural*.

Suponga que una función $F_1(z)$ definida en $\mathcal{R}_1$ se prolonga analíticamente a una región $\mathcal{R}_n$ a lo largo de dos trayectorias diferentes [figura 10-3]. Entonces, si entre estas trayectorias no existe ninguna singularidad, las dos prolongaciones analíticas son idénticas. Éste es el *teorema de la unicidad de una prolongación analítica*.

En el caso de resultados diferentes, puede mostrarse que entre las trayectorias existe una singularidad (concretamente, un *punto de ramificación*). Es así como se alcanzan las diferentes ramas de una función multivaluada. En relación con esto, resulta útil el concepto de superficies de Riemann [capítulo 2].

Ya se ha visto cómo prolongar analíticamente funciones representadas por series de potencias (capítulo 6). En este capítulo se verá la forma de prolongar analíticamente funciones con otras representaciones (por ejemplo, integrales).

www.FreeLibros.me

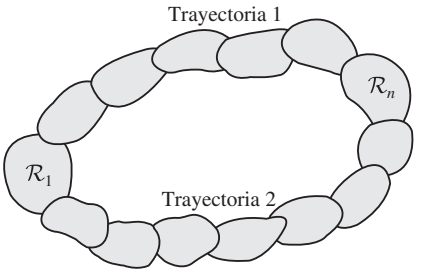


Figura 10-3

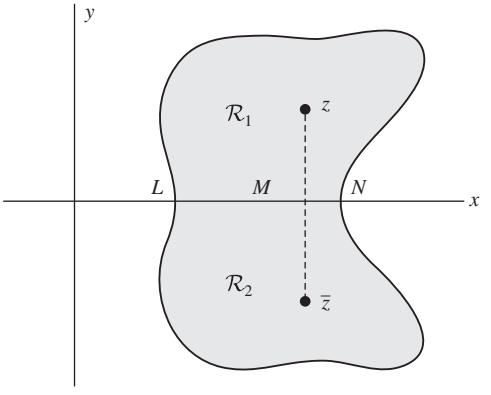


Figura 10-4

10.2 PRINCIPIO DE REFLEXIÓN DE SCHWARZ

Suponga que $F_1(z)$ es analítica en la región $\mathcal{R}_1$ [figura 10-4] y que $F_1(z)$ toma valores reales en la parte *LMN* del eje real.

El *principio de reflexión de Schwarz* establece que la prolongación analítica de $F_1(z)$ a la región $\mathcal{R}_2$ (considerada imagen de espejo o reflexión de $\mathcal{R}_1$ respecto de *LMN*) está dada por

$$F_2(z) = \overline{F_1(\bar{z})} \tag{10.1}$$

Este resultado se extiende a los casos en los que *LMN* sea una curva, y no un segmento de recta.

10.3 PRODUCTOS INFINITOS

Sea $P_n = (1 + w_1)(1 + w_2) \cdots (1 + w_n)$, que se denota $\prod_{k=1}^{n} (1 + w_k)$ y donde se supone que para toda k, $w_k \neq -1$. Si existe un valor $P \neq 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} P_n = P$, se dice que el *producto infinito* $(1 + w_1)(1 + w_2) \cdots \equiv \prod_{k=1}^{\infty} (1 + w_k)$, o sólo $\prod (1 + w_k)$, *converge* a P; si no es así, se dice que el producto infinito *diverge.* Las w_k pueden ser constantes o funciones de z.

Si sólo un número finito de las $w_k = -1$ y el resto del producto infinito, omitiendo estos factores, converge, se dice que el producto infinito *converge a cero.*

10.4 CONVERGENCIA ABSOLUTA, CONDICIONAL Y UNIFORME DE PRODUCTOS INFINITOS

Suponga que el producto infinito $\prod (1 + |w_k|)$ converge. En ese caso se dice que $\prod (1 + w_k)$ es *absolutamente convergente.*

Suponga que $\prod (1 + w_k)$ converge, pero $\prod (1 + |w_k|)$ diverge. En ese caso se dice que $\prod (1 + w_k)$ es *condicionalmente convergente.*

Un teorema importante, análogo a un teorema para series infinitas, sostiene que un producto infinito absolutamente convergente es convergente, es decir, si $\prod (1 + |w_k|)$ converge, entonces $\prod (1 + w_k)$ converge (véase el problema 10.65).

El concepto de *convergencia uniforme* para productos infinitos se define fácilmente por analogía con las series o sucesiones infinitas en general. Así, si $\prod_{k=1}^{n} \{1 + w_k(z)\} = P_n(z)$ y $\prod_{k=1}^{\infty} \{1 + w_k(z)\} = P(z)$, se dice que $P_n(z)$ *converge uniformemente* a $P(z)$ en una región $\mathcal{R}$ si, para todo $\epsilon > 0$, es posible hallar un número N, que dependa sólo de ϵ y no del valor particular de z en $\mathcal{R}$, tal que $|P_n(z) - P(z)| < \epsilon$ para todo $n > N$.

Como en el caso de las series infinitas, con los productos infinitos que convergen absoluta o uniformemente pueden hacerse ciertas cosas que no necesariamente pueden hacerse con los productos infinitos en general. Así, por ejemplo, en un producto infinito que converge absolutamente los factores pueden reordenarse sin que se modifique su valor.

www.FreeLibros.me

10.5 ALGUNOS TEOREMAS IMPORTANTES SOBRE PRODUCTOS INFINITOS

1. Una condición necesaria para que $\prod(1+w_k)$ converja es que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Sin embargo, esta condición no es suficiente, es decir, aunque $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$, el producto infinito puede divergir.
2. Si $\sum |w_k|$ converge [es decir, si $\sum w_k$ converge absolutamente], entonces $\prod(1+|w_k|)$ converge y, por tanto, $\prod(1+w_k)$ converge [es decir, si $\prod(1+w_k)$ converge absolutamente]. El recíproco de este teorema también es válido.
3. Si un producto infinito es absolutamente convergente, sus factores pueden ser conmutados sin afectar al valor del producto.
4. Suponga que en una región $\mathcal{R}$, $|w_k(z)| < M_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, donde las M_k son constantes tales que $\sum M_k$ converge. Así, $\prod\{1+w_k(z)\}$ es uniformemente (y absolutamente) convergente. Éste es el análogo del criterio M de Weierstrass para series.
5. Suponga que en una región $\mathcal{R}$ las $w_k(z)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ son analíticas y que $\sum w_k(z)$ es uniformemente convergente en $\mathcal{R}$. Así, $\prod\{1+w_k(z)\}$ converge a una función analítica en $\mathcal{R}$.

10.6 TEOREMA DE WEIERSTRASS PARA PRODUCTOS INFINITOS

Sea $f(z)$ analítica para todo z [es decir, $f(z)$ es una *función entera*], y suponga que esta función tiene ceros simples en $a_1, a_2, a_3, \ldots$, donde $0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \ldots$ y $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Así, $f(z)$ se expresa como un producto infinito de la forma

$$f(z) = f(0)e^{f'(0)z/f(0)} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{z/a_k} \right\} \tag{10.2}$$

Una generalización de lo anterior afirma que si $f(z)$ tiene ceros en $a_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, de multiplicidades u órdenes μ_k, respectivamente, y si para algún entero N, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/a_k^N$ es absolutamente convergente, entonces

$$f(z) = f(0)e^{G_T(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left[\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{a_k^2} + \cdots + \frac{1}{N-1}\frac{z^{N-1}}{a_k^{N-1}}\right] \right\}^{\mu_k}. \tag{10.3}$$

donde $G(z)$ es una función entera. Este resultado también es verdadero si algunas de las a_k son polos, en cuyo caso sus multiplicidades son negativas.

Los resultados (10.2) y (10.3) se conocen como *teoremas de factorización de Weierstrass.*

10.7 ALGUNOS PRODUCTOS INFINITOS ESPECIALES

1. $\operatorname{sen} z = z\left\{1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right\}\left\{1 - \frac{z^2}{(2\pi)^2}\right\}\cdots = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$
2. $\cos z = \left\{1 - \frac{z^2}{(\pi/2)^2}\right\}\left\{1 - \frac{z^2}{(3\pi/2)^2}\right\}\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$
3. $\operatorname{senh} z = z\left\{1 + \frac{z^2}{\pi^2}\right\}\left\{1 + \frac{z^2}{(2\pi)^2}\right\}\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$
4. $\cosh z = \left\{1 + \frac{z^2}{(\pi/2)^2}\right\}\left\{1 + \frac{z^2}{(3\pi/2)^2}\right\}\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$

10.8 LA FUNCIÓN GAMMA

Para $\operatorname{Re}\{z\} > 0$, la función gamma se define como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt \tag{10.4}$$

www.FreeLibros.me

Así (véase el problema 10.11), se tiene la *fórmula de recursión*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{10.5}$$

donde $\Gamma(1) = 1$.

Sea z un entero positivo n. De acuerdo con (10.5) se ve que

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots(1) = n! \tag{10.6}$$

de manera que la función gamma es una generalización del factorial, razón por la cual a la función gamma también se le conoce como *función factorial* y se escribe $z!$ en lugar de $\Gamma(z+1)$, en cuyo caso se define $0! = 1$.

De acuerdo con la fórmula en (10.5) también se ve que, si z es real y positivo, $\Gamma(z)$ se determina al conocer los valores de $\Gamma(z)$ para $0 < z < 1$. Si $z = \frac{1}{2}$, se tiene [problema 10.14]

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{10.7}$$

Para $\mathrm{Re}\{z\} \leq 0$, la definición (10.4) no puede emplearse porque la integral diverge. Sin embargo, mediante prolongación analítica se define $\Gamma(z)$ en el semiplano izquierdo. En esencia, eso equivale a emplear (10.5) [véase el problema 10.15]. En $z = 0, -1, -2, \ldots$, $\Gamma(z)$ tiene polos simples [véase el problema 10.16].

10.9 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN GAMMA

A continuación se presentan algunas propiedades importantes de la función gamma. Las primeras dos se consideran definiciones, a partir de las cuales se deducen todas las demás propiedades.

1. $$\Gamma(z+1) = \lim_{k\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{(z+1)(z+2)\cdots(z+k)} k^z = \lim_{k\to\infty} \prod(z, k)$$

   donde $\prod(z, k)$ suele conocerse como *función Pi de Gauss.*

2. $$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{1 + \frac{z}{k}\right\} e^{-z/k}$$

   donde $\gamma = \lim_{p\to\infty} \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} - \ln p\right\} = .5772157\ldots$ se conoce como *constante de Euler.*

3. $$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$$

   En particular si $z = \frac{1}{2}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

4. $$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

   Esta fórmula suele conocerse como *fórmula de duplicación* para la función gamma.

5. Para $m = 1, 2, 3, \ldots$,

   $$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{m}\right)\Gamma\left(z + \frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z + \frac{m-1}{m}\right) = m^{(1/2-mz)}(2\pi)^{(m-1)/2}\Gamma(mz)$$

   La propiedad 4 es un caso especial de esta propiedad con $m = 2$.

6. $$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n-1}\right) + \cdots$$

7. $$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t\, dt = -\gamma$$

www.FreeLibros.me

8. $$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \oint_C t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

donde C es el contorno de la figura 10-5. Ésta es una prolongación analítica, al semiplano izquierdo, de la función gamma definida en (10.4).

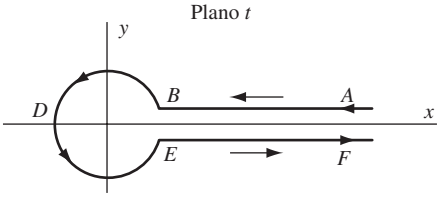


Figura 10-5

9. Otra integral de contorno con el contorno C [figura 10-5] está dada por

$$\Gamma(z) = \frac{i}{2 \operatorname{sen} \pi z} \oint_C (-t)^{z-1} e^{-t}\, dt = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C (-t)^{-z} e^{-t}\, dt$$

10.10 LA FUNCIÓN BETA

Si $\operatorname{Re}\{m\} > 0$, $\operatorname{Re}\{n\} > 0$, la *función beta* se define como

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\, dt \tag{10.8}$$

Como se ve en el problema 10.18, la función beta se relaciona con la función gamma de acuerdo con la fórmula

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{10.9}$$

Hay varias integrales que se expresan en términos de la función beta y, por tanto, en términos de la función gamma. Dos fórmulas interesantes son

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2} B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} \tag{10.10}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}\, dt = B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi} \tag{10.11}$$

la primera es válida para $\operatorname{Re}\{m\} > 0$ y $\operatorname{Re}\{n\} > 0$, y la segunda, para $0 < \operatorname{Re}\{p\} < 1$.

Para el caso de que $\operatorname{Re}\{m\} \leq 0$ y $\operatorname{Re}\{n\} \leq 0$, la definición (10.8) se extiende mediante prolongación analítica.

10.11 ECUACIONES DIFERENCIALES

Suponga la *ecuación lineal diferencial*

$$Y'' + p(z)Y' + q(z)Y = 0 \tag{10.12}$$

Si $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en un punto a, entonces a se llama *punto ordinario* de la ecuación diferencial. Los puntos en los que $p(z)$ o $q(z)$ o ambas no son analíticas se llaman *puntos singulares* de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 10.1 Para $Y'' + zY' + (z^2 - 4)Y = 0$, todo punto es un punto ordinario.

www.FreeLibros.me

EJEMPLO 10.2 Para $(1 - z^2)Y'' - 2zY' + 6Y = 0$ o $Y'' - \{2z/(1 - z^2)\}Y' + \{6/(1 - z^2)\}Y = 0$, se observa que $z = \pm 1$ son puntos singulares; todos los demás puntos son puntos ordinarios.

Sea $z = a$ un punto singular, pero $(z - a)p(z)$ y $(z - a)^2 q(z)$ son analíticas en $z = a$. Así, $z = a$ se llama *punto singular regular.* Si $z = a$ no es un punto ordinario ni singular regular, entonces es un *punto singular irregular*.

EJEMPLO 10.3 En el ejemplo 10.2, $z = 1$ es un punto singular regular porque

$$(z-1)\left(-\frac{2z}{1-z^2}\right) = \frac{2z}{z+1} \qquad \text{y} \qquad (z-1)^2\left(\frac{6}{1-z^2}\right) = \frac{6-6z}{z+1}$$

son analíticas en $z = 1$. De manera similar, $z = -1$ es un punto singular regular.

EJEMPLO 10.4 $z^3Y'' + (1 - z)Y' - 2Y = 0$ tiene a $z = 0$ como punto singular. Además,

$$z\left(\frac{1-z}{z^3}\right) = \frac{1-z}{z^2} \qquad \text{y} \qquad z^2\left(-\frac{2}{z^3}\right) = -\frac{2}{z}$$

no son analíticas en $z = 0$, de manera que $z = 0$ es un punto singular irregular.

Si $Y_1(z)$ y $Y_2(z)$ son dos soluciones de (10.12) que no sean múltiplos constantes una de otra, estas soluciones se llaman *linealmente independientes.* En tal caso, si A y B son constantes cualesquiera, la solución general de (10.12) es

$$Y = AY_1 + BY_2 \tag{10.13}$$

Los teoremas siguientes son fundamentales.

TEOREMA 10.1. Sea $z = a$ un punto ordinario de (10.12). Así, existen dos soluciones linealmente independientes de (10.12) de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \tag{10.14}$$

donde las constantes a_k se determinan mediante sustitución en (10.12). Al hacer esto puede ser necesario desarrollar $p(z)$ y $q(z)$ en potencias de $(z - a)$. En la práctica, es deseable sustituir $(z - a)$ por una nueva variable.

Las soluciones (10.14) convergen en un círculo con centro en a, que se extiende hasta la singularidad más cercana de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 10.5 La ecuación $(1 - z^2)Y'' - 2zY' + 6Y = 0$ [véase el ejemplo 10.2] tiene una solución de la forma $\sum a_k z^k$ que converge en el interior de la circunferencia $|z| = 1$.

TEOREMA 10.2. Suponga que $z = a$ es un punto singular regular. Así, existe al menos una solución de la forma

$$(z-a)^c \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \tag{10.15}$$

donde c es una constante. Al sustituir en (10.12) e igualar a cero la potencia más baja de $(z - a)$ se obtiene una ecuación cuadrática para c (llamada *ecuación característica*). Si a las soluciones de esta ecuación cuadrática las llamamos c_1 y c_2, se tienen las situaciones siguientes.

1. $c_1 - c_2 \neq$ *un entero.* En este caso, hay dos soluciones linealmente independientes de la forma (10.15).

www.FreeLibros.me

2. $c_1 = c_2$. Aquí, una solución es de la forma (10.15) y la otra solución linealmente independiente es de la forma

$$\ln(z-a)\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^{k+c} \tag{10.16}$$

3. $c_1 - c_2 =$ *un entero* $\neq 0$. En ese caso, existe ya sea una solución de la forma (10.15) o dos soluciones linealmente independientes que tienen esta forma. Si sólo se halla una solución de la forma (10.15), la otra solución linealmente independiente es de la forma (10.16).

Todas las soluciones obtenidas convergen en un círculo con centro en a, que se extiende hasta la singularidad más cercana de la ecuación diferencial.

10.12 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE INTEGRALES DE CONTORNO

Con frecuencia es deseable buscar una solución de una ecuación diferencial de la forma

$$Y(z) = \oint_C K(z,\, t)G(t)\,dt \tag{10.17}$$

donde $K(z, t)$ se conoce como el *núcleo*. Una posibilidad útil se presenta cuando $K(z, t) = e^{zt}$, en cuyo caso

$$Y(z) = \oint_C e^{zt}G(t)\,dt \tag{10.18}$$

Tales soluciones pueden presentarse cuando los coeficientes de la ecuación diferencial son funciones racionales (véanse los problemas 10.25 y 10.26).

10.13 FUNCIONES DE BESSEL

La *ecuación diferencial de Bessel de orden n* está dada por

$$z^2Y'' + zY' + (z^2 - n^2)Y = 0 \tag{10.19}$$

Una solución de esta ecuación cuando $n \geq 0$ es

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\} \tag{10.20}$$

que se conoce como *función de Bessel del primer tipo de orden n.*

Si n no es un entero, la solución general de (10.18) es

$$Y = AJ_n(z) + BJ_{-n}(z) \tag{10.21}$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Pero si n es un entero, entonces $J_{-n}(z) = (-1)^nJ_n(z)$ y (10.20) no proporciona la solución general. En este caso, la solución general se halla como en los problemas 10.182 y 10.183.

Las funciones de Bessel tienen muchas propiedades interesantes e importantes, entre las que se encuentran las siguientes.

1. $$e^{z(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$$

   El lado izquierdo suele conocerse como *función generatriz* de las funciones de Bessel del primer tipo para valores enteros de n.

www.FreeLibros.me

2. $$zJ_{n-1}(z) - 2nJ_n(z) + zJ_{n+1}(z) = 0$$

Esta fórmula se conoce como *fórmula de recursión para las funciones de Bessel* [véase el problema 10.27].

3. $$\frac{d}{dz}\{z^n J_n(z)\} = z^n J_{n-1}(z), \qquad \frac{d}{dz}\{z^{-n} J_n(z)\} = -z^{-n} J_{n+1}(z)$$

4. $$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\phi - z \operatorname{sen} \phi)\, d\phi, \quad n = \text{entero}$$

5. $$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\phi - z \operatorname{sen} \phi)\, d\phi - \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-n\phi - z \operatorname{senh} \phi}\, d\phi$$

6. $$\int_0^z tJ_n(at)J_n(bt)\, dt = \frac{z\{aJ_n(bz)J_n'(az) - bJ_n(az)J_n'(bz)\}}{b^2 - a^2}, \qquad a \neq b$$

7. $$\int_0^z tJ_n(at)J_n(bt)\, dt = \frac{azJ_n(bz)J_{n-1}(az) - bzJ_n(az)J_{n-1}(bz)}{b^2 - a^2}, \qquad a \neq b$$

8. $$\int_0^z t\{J_n(at)\}^2\, dt = \frac{z^2}{2}[\{J_n(az)\}^2 - J_{n-1}(az)J_{n+1}(az)]$$

9. $$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C t^{-n-1} e^{(1/2)z(t-1/t)}\, dt, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

donde C es una curva simple cerrada que encierra a $t = 0$.

10. $$J_n(z) = \frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\pi}\int_{-1}^{1} e^{izt}(1 - t^2)^{n-1/2}\, dt$$
$$= \frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\pi}\int_0^{\pi} \cos(z \cos \phi) \operatorname{sen}^{2n} \phi\, d\phi$$

Una segunda solución para la ecuación diferencial de Bessel, cuando n es un entero positivo, se conoce como *función de Bessel del segundo tipo de orden n* o *función de Neumann*, y está dada por

$$\begin{aligned} Y_n(z) = J_n(z) \ln z &- \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \\ &- \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \{G(k) + G(n+k)\} \end{aligned} \tag{10.22}$$

donde $G(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + 1/k$ y $G(0) = 0$.

Si $n = 0$, se tiene

$$Y_0(z) = J_0(z) \ln z + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^4}{2^2 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots \tag{10.23}$$

www.FreeLibros.me

En términos de estas ecuaciones, la solución general de (10.19), para n que es un entero positivo, se escribe

$$Y = AJ_n(z) + BY_n(z) \tag{10.24}$$

10.14 FUNCIONES DE LEGENDRE

La *ecuación diferencial de Legendre* de orden n está dada por

$$(1 - z^2)Y'' - 2zY' + n(n+1)Y = 0 \tag{10.25}$$

La solución general de esta ecuación es

$$\begin{aligned} Y = A&\left\{1 - \frac{n(n+1)}{2!}z^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}z^4 - \cdots\right\} \\ &+ B\left\{z - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}z^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}z^5 - \cdots\right\} \end{aligned} \tag{10.26}$$

Si n no es entero, estas soluciones en forma de serie convergen para $|z| < 1$. Si n es cero o un entero positivo, se obtienen soluciones polinómicas de grado n. Estas soluciones polinómicas se conocen como *polinomios de Legendre* y se denotan $P_n(z)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Al elegir estos polinomios de manera que $P_n(1) = 1$, se encuentra que se expresan mediante la *fórmula de Rodrigues*

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2 - 1)^n \tag{10.27}$$

de donde $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$, $P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$, $P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$, etcétera.

Las siguientes son algunas propiedades de los polinomios de Legendre.

1. $$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n$$

   Esta igualdad se conoce como *función generatriz* para los polinomios de Legendre.

2. $$P_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left\{z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)}z^{n-4} - \cdots\right\}$$

3. $$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n(t - z)^{n+1}}\,dt$$

   donde C es cualquier curva cerrada que encierre al polo $t = z$.

4. $$\int_{-1}^{1} P_m(z)P_n(z)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases}$$

   [Véanse los problemas 10.30 y 10.31.]

5. $$P_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [z + \sqrt{z^2 - 1}\cos\phi]^n\,d\phi$$

   [Véase el problema 6.34.]

6. $$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0$$

   Esta ecuación se conoce como *fórmula de recursión para los polinomios de Legendre* [véase el problema 10.32].

www.FreeLibros.me

7. $$(2n+1)P_n(z) = P'_{n+1}(z) - P'_{n-1}(z)$$

Si n es cero o un entero positivo, la solución general para la ecuación de Legendre se escribe como

$$Y = AP_n(z) + BQ_n(z) \tag{10.28}$$

donde $Q_n(z)$ es una serie infinita convergente para $|z| < 1$ que se obtiene de (10.26). Si n no es un entero positivo, existen dos soluciones en forma de serie infinitas que se obtienen de (10.26) convergentes para $|z| < 1$. Estas soluciones de la ecuación de Legendre se conocen como *funciones de Legendre*, y tienen propiedades análogas a las de los polinomios de Legendre.

10.15 FUNCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

La función definida por

$$F(a, b; c; z) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \cdots \tag{10.29}$$

se conoce como *función hipergeométrica* y es una solución de la *ecuación diferencial de Gauss* o *ecuación hipergeométrica*

$$z(1-z)Y'' + \{c - (a+b+1)z\}Y' - abY = 0 \tag{10.30}$$

La serie en (10.29) es absolutamente convergente para $|z| < 1$ y divergente para $|z| > 1$. Para $|z| = 1$, la serie converge absolutamente si $\mathrm{Re}\{c - a - b\} > 0$.

Suponga que $|z| < 1$ y que $\mathrm{Re}\{c\} > \mathrm{Re}\{b\} > 0$. Así, se tiene

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\, dt \tag{10.31}$$

Para $|z| > 1$, la función se define mediante prolongación analítica.

10.6 LA FUNCIÓN ZETA

La *función zeta*, muy estudiada por Riemann en relación con la teoría de los números, se define para $\mathrm{Re}\{z\} > 1$ mediante

$$\zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} \tag{10.32}$$

Esta función se extiende mediante prolongación analítica a otros valores de z. La definición extendida de $\zeta(z)$ tiene la interesante propiedad de que

$$\zeta(1-z) = 2^{1-z}\pi^{-z}\Gamma(z)\cos(\pi z/2)\zeta(z) \tag{10.33}$$

www.FreeLibros.me

Otras propiedades interesantes son las siguientes.

1. $$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t + 1}\, dt \quad \mathrm{Re}\{z\} > 0$$

2. La única singularidad de $\zeta(z)$ es un polo simple en $z = 1$ con residuo 1.
3. Si B_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, es el coeficiente de z^{2k} en el desarrollo

$$\frac{1}{2} z \cot\left(\frac{1}{2} z\right) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k z^{2k}}{(2k)!}$$

por ende

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1} \pi^{2k} B_k}{(2k)!} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Así se tiene, por ejemplo, $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30, \ldots$, de donde $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90, \ldots$ Los números B_k se conocen como *números de Bernoulli*. En el problema 6.163, página 203, hay otra definición de los números de Bernoulli.

4. $$\frac{1}{\zeta(z)} = \left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\left(1 - \frac{1}{3^z}\right)\left(1 - \frac{1}{5^z}\right)\left(1 - \frac{1}{7^z}\right) \cdots = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)$$

donde el producto es un producto sobre todos los primos positivos p.

La conjetura de Riemann, que afirma que todos los ceros de $\zeta(z)$ se encuentran en la recta $\mathrm{Re}\{z\} = \frac{1}{2}$, aún no se comprueba ni refuta. Sin embargo, Hardy demostró que sobre esta recta hay una cantidad infinita de ceros.

10.17 SERIES ASINTÓTICAS

Una serie

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \tag{10.34}$$

se dice que es una *serie asintótica* para una función $F(z)$ si, para todo entero positivo M dado,

$$\lim_{z \to \infty} z^M \left\{ F(z) - \sum_{n=0}^{M} \frac{a_n}{z^n} \right\} = 0 \tag{10.35}$$

En este caso se escribe

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \tag{10.36}$$

Las series asintóticas y las fórmulas en que aparecen son muy útiles en la evaluación de funciones en valores grandes de la variable, lo cual de otra manera puede ser difícil. En la práctica, una serie asintótica puede divergir. Pero, al tomar la suma de los términos sucesivos de la serie hasta antes de que los términos empiecen a crecer, puede obtenerse una buena aproximación a $F(z)$.

Con series asintóticas pueden realizarse varias operaciones. Así, por ejemplo, las series asintóticas pueden sumarse, multiplicarse o integrarse término a término para obtener otra serie asintótica. La diferenciación, sin embargo, no siempre es posible. Para un rango dado de valores de z, una serie asintótica, si existe, es única.

www.FreeLibros.me

10.18 MÉTODO DEL PUNTO SILLA

Sea $I(z)$ expresable en la forma

$$I(z) = \int_C e^{zF(t)}\, dt \tag{10.37}$$

donde C es una trayectoria en el plano t. Como $F(t)$ es compleja, se considera que z es real.

El método del punto silla sirve para hallar una fórmula asintótica para (10.37) válida para z grande. Este método, cuando es aplicable, consta de los pasos siguientes.

1. Determinar los puntos en los que $F'(t) = 0$. Estos puntos se conocen como *puntos silla*, razón por la que el método se conoce como *método del punto silla.*

   Se supondrá que sólo hay un punto silla, digamos t_0. Si hay más de un punto silla, el método se extiende.

2. Si se supone que $F(t)$ es analítica en una vecindad de t_0, se obtiene el desarrollo en serie de Taylor

$$F(t) = F(t_0) + \frac{F''(t_0)(t - t_0)^2}{2!} + \cdots = F(t_0) - u^2 \tag{10.38}$$

   Ahora se deforma el contorno C de manera que pase por el punto silla t_0 y sea tal que la $\mathrm{Re}\{F(t)\}$ sea la más grande en t_0 mientras que $\mathrm{Im}\{F(t)\}$ se considera igual a la constante $\mathrm{Im}\{F(t_0)\}$ en la vecindad de t_0. Con estos supuestos, la variable u, definida por (10.38), es real y se obtiene con un alto grado de aproximación

$$I(z) = e^{zF(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zu^2} \left(\frac{dt}{du}\right) du \tag{10.39}$$

   donde, de (10.38), se hallan constantes $b_0, b_1, \ldots$ tales que

$$\frac{dt}{du} = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \cdots \tag{10.40}$$

3. En (10.39) se sustituye (10.40) y se realizan las integraciones para obtener la expansión asintótica buscada

$$I(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{z}}\, e^{zF(t_0)} \left\{ b_0 + \frac{1}{2}\frac{b_2}{z} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\frac{b_4}{z^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2}\frac{b_6}{z^3} + \cdots \right\} \tag{10.41}$$

   Para muchos propósitos prácticos, el primer término proporciona suficiente exactitud y se encuentra

$$I(z) \sim \sqrt{\frac{-2\pi}{zF''(t_0)}}\, e^{zF(t_0)} \tag{10.42}$$

Métodos similares al anterior se conocen también como *método de Laplace* y *método de la fase estacionaria.*

10.19 DESARROLLOS ASINTÓTICOS ESPECIALES

1. La función gamma

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z}\, z^2 e^{-z} \left\{ 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51{,}840z^2} + \cdots \right\} \tag{10.43}$$

Esta fórmula suele conocerse como *fórmula asintótica de Stirling para la función gamma.* Es válida para valores grandes de $|z|$ tales que $-\pi < \arg z < \pi$.

www.FreeLibros.me

Sea n real y grande. Así, se tiene

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\theta/12n}, \quad \text{donde } 0 < \theta < 1 \tag{10.44}$$

En particular, si n es un entero positivo grande, se tiene

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \tag{10.45}$$

que se conoce como *fórmula asintótica de Stirling para* $n!$.

2. Funciones de Bessel

$$J_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P(z)\cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + Q(z)\,\mathrm{sen}\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \right\} \tag{10.46}$$

donde

$$\begin{aligned} P(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [4n^2 - 1^2][4n^2 - 3^2]\cdots[4n^2 - (4k-1)^2]}{(2k)!\,2^{6k} z^{2k}} \\ Q(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [4n^2 - 1^2][4n^2 - 3^2]\cdots[4n^2 - (4k-3)^2]}{(2k-1)!\,2^{6k-3} z^{2k-1}} \end{aligned} \tag{10.47}$$

Esta fórmula es válida para valores grandes de $|z|$ tales que $-\pi < \arg z < \pi$.

3. La función del error

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \sim 1 + \frac{z e^{-z^2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\{k - (1/2)\}}{z^{2k}} \tag{10.48}$$

Esta fórmula es válida para valores grandes de $|z|$ tales que $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$. Para $\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$, esta fórmula es válida si en el lado derecho se sustituye z por $-z$.

4. La integral exponencial

$$\mathrm{Ei}(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \sim e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}} \tag{10.49}$$

Esta fórmula es válida para valores grandes de $|z|$ tales que $-\pi < \arg z < \pi$.

10.20 FUNCIONES ELÍPTICAS

La integral

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad |k| < 1 \tag{10.50}$$

se conoce como *integral elíptica del primer tipo*. Esta integral existe si w es real y tal que $|w| < 1$. Mediante prolongación analítica, esta integral puede extienderse a otros valores de w. Si $t = \mathrm{sen}\,\theta$ y $w = \mathrm{sen}\,\phi$, la integral (10.50) toma la forma equivalente

$$z = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \mathrm{sen}^2\,\theta}} \tag{10.51}$$

donde suele escribirse $\phi = \mathrm{am}\, z$.

Suponga que $k = 0$, entonces (10.50) se convierte en $z = \mathrm{sen}^{-1} w$ o, de manera equivalente, $w = \mathrm{sen}\, z$. Por analogía, la integral en (10.50) para $k \neq 0$ se denota $\mathrm{sn}^{-1}(w; k)$, o, simplemente, $\mathrm{sn}^{-1} w$ cuando k no cambia durante un

www.FreeLibros.me

determinado análisis. Así,

$$z = \operatorname{sn}^{-1} w = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{10.52}$$

Esto lleva a la función $w = \operatorname{sn} z$, que se conoce como *función elíptica* o también *función elíptica jacobiana.*

Por analogía con las funciones trigonométricas, es conveniente definir otras funciones elípticas

$$\operatorname{cn} z = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z}, \qquad \operatorname{dn} z = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 z} \tag{10.53}$$

Otra función común es $\operatorname{tn} z = (\operatorname{sn} z)/(\operatorname{cn} z)$. A continuación se presentan varias propiedades de estas funciones.

1. $\operatorname{sn}(0) = 0, \quad \operatorname{cn}(0) = 1, \quad \operatorname{dn}(0) = 1, \quad \operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z, \quad \operatorname{cn}(-z) = \operatorname{cn} z, \quad \operatorname{dn}(-z) = \operatorname{dn} z$
2. $(d/dz)\operatorname{sn} z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z$, $(d/dz)\operatorname{cn} z = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z$, $(d/dz)\operatorname{dn} z = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z$
3. $\operatorname{sn} z = \operatorname{sen}(\operatorname{am} z), \quad \operatorname{cn} z = \cos(\operatorname{am} z)$
4. $$\operatorname{sn}(z_1+z_2) = \frac{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z_2 + \operatorname{cn} z_1 \operatorname{dn} z_1 \operatorname{sn} z_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2} \tag{10.54}$$
$$\operatorname{cn}(z_1+z_2) = \frac{\operatorname{cn} z_1 \operatorname{cn} z_2 - \operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{dn} z_1 \operatorname{dn} z_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2} \tag{10.55}$$
$$\operatorname{dn}(z_1+z_2) = \frac{\operatorname{dn} z_1 \operatorname{dn} z_2 - k^2 \operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{cn} z_1 \operatorname{cn} z_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2} \tag{10.56}$$

   Estas fórmulas se conocen como *fórmulas de adición* para las funciones elípticas.
5. Las funciones elípticas tienen dos periodos, por lo que se se les suele llamar *funciones doblemente periódicas*. Sean
$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} \tag{10.57}$$
$$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\theta}} \tag{10.58}$$
   donde k y k', que se conocen como *módulo* y *módulo complementario*, respectivamente, son tales que $k' = \sqrt{1-k^2}$. Entonces los periodos de $\operatorname{sn} z$ son $4K$ y $2iK'$, los periodos de $\operatorname{cs} z$ son $4K$ y $2K + 2iK'$, y los periodos de $\operatorname{dn} z$ son $2K$ y $4iK'$. Se sigue que en el plano complejo existe un conjunto de paralelogramos [que se suelen llamar *paralelogramos periódicos*] en los cuales se repiten los valores de una función elíptica. Al menor de éstos se le conoce como *celda unitaria*, o sólo *celda.*

Las ideas anteriores se extienden a otras funciones elípticas. Existen *integrales elípticas del segundo* y *del tercer tipo* definidas, respectivamente, por

$$z = \int_0^w \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \tag{10.59}$$

$$z = \int_0^w \frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1+n\operatorname{sen}^2\theta)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} \tag{10.60}$$

www.FreeLibros.me

PROBLEMAS RESUELTOS

PROLONGACIÓN ANALÍTICA

10.1. Sea $F(z)$ analítica en una región $\mathcal{R}$ y suponga que $F(z) = 0$ en todos los puntos del arco PQ en el interior de $\mathcal{R}$ [figura 10-6]. Demuestre que $F(z) = 0$ en todo $\mathcal{R}$.

Solución

En el arco PQ se elige un punto z_0. Así, en algún círculo de convergencia C con centro en z_0 [círculo que se extiende al menos hasta la frontera de $\mathcal{R}$, donde puede existir una singularidad], $F(z)$ tiene un desarrollo en serie de Taylor

$$F(z) = F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0) + \tfrac{1}{2}F''(z_0)(z - z_0)^2 + \cdots$$

Pero, por hipótesis, $F(z_0) = F'(z_0) = F''(z_0) = \cdots = 0$. Por tanto, $F(z) = 0$ en el interior de C.

Al elegir otro arco en el interior de C se continúa con este proceso. De esta manera se muestra que $F(z) = 0$ en todo $\mathcal{R}$.

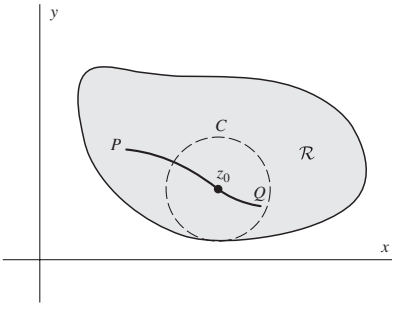


Figura 10-6

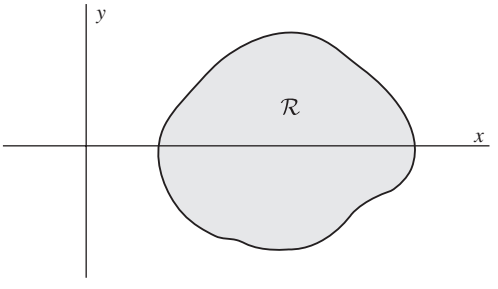


Figura 10-7

10.2. La identidad $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ es válida para los valores reales de z; demuestre que es válida para todos los valores complejos de z.

Solución

Sea $F(z) = \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z - 1$ y $\mathcal{R}$ una región del plano z que contenga una porción del eje x [figura 10-7].

Como sen z y cos z son analíticas en $\mathcal{R}$, se sigue que $F(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$. Además, $F(z) = 0$ sobre el eje x. Por tanto, de acuerdo con el problema 10.1, $F(z) = 0$ idénticamente en $\mathcal{R}$, lo que muestra que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ para todo z en $\mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ es arbitraria, se obtiene el resultado buscado.

Este método es útil para obtener, para valores complejos, muchos resultados válidos para valores reales.

10.3. Sean $F_1(z)$ y $F_2(z)$ analíticas en una región $\mathcal{R}$ [figura 10-8], y suponga que en el arco PQ en $\mathcal{R}$, $F_1(z) = F_2(z)$. Demuestre que $F_1(z) = F_2(z)$ en $\mathcal{R}$.

Solución

Se elige $F(z) = F_1(z) - F_2(z)$ y se obtiene, de acuerdo con el problema 10.1, el resultado deseado.

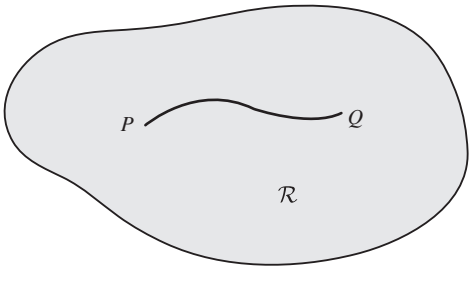


Figura 10-8

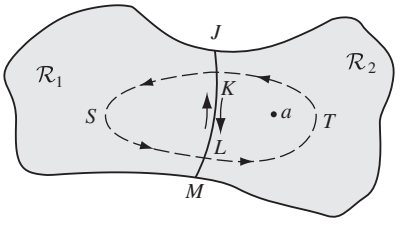


Figura 10-9

www.FreeLibros.me

10.4. Sea $F_1(z)$ analítica en la región $\mathcal{R}_1$ [figura 10-9] y en la frontera *JKLM*. Suponga que es posible hallar una función $F_2(z)$ analítica en la región $\mathcal{R}_2$ y en la frontera *JKLM* tal que $F_1(z) = F_2(z)$ en *JKLM*. Demuestre que la función

$$F(z) = \begin{cases} F_1(z) & \text{para } z \text{ en } \mathcal{R}_1 \\ F_2(z) & \text{para } z \text{ en } \mathcal{R}_2 \end{cases}$$

es analítica en la región $\mathcal{R}$, compuesta por $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ [lo que suele escribirse $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$].

Solución

Método 1. Esto se deriva del problema 10.3, pues en $\mathcal{R}_2$ sólo puede haber una función $F_2(z)$ que satisfaga las propiedades requeridas.

Método 2. Con las fórmulas integrales de Cauchy.
Construya la curva simple cerrada *SLTKS* (línea punteada en la figura 10-9) y sea a un punto en su interior. De acuerdo con la fórmula integral de Cauchy, se tiene (como $F_2(z)$ es analítica sobre y en el interior de *LTKL*, y como $F_2(z) = F(z)$ en *LTK*)

$$F_2(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{LTKL} \frac{F_2(z)}{z-a}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{LTK} \frac{F(z)}{z-a}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{KL} \frac{F(z)}{z-a}\, dz$$

Además, de acuerdo con el teorema de Cauchy (como $F_1(z)/(z-a)$ es analítica sobre y en el interior de *KSLK*, y como $F_1(z) = F(z)$ en *KSL*),

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{KSLK} \frac{F_1(z)}{z-a}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{KSL} \frac{F(z)}{z-a}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{LK} \frac{F(z)}{z-a}\, dz$$

Se suma, al aprovechar que $F(z) = F_1(z) = F_2(z)$ en *LK* de manera que las integrales a lo largo de *KL* y *LK* se anulan, y como $F(a) = F_2(a)$, se tiene

$$F(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{LTKSL} \frac{F(z)}{z-a}\, dz$$

De manera similar, se encuentra

$$F^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{LTKSL} \frac{F(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

por lo que $F(z)$ es analítica en a. Pero como a puede ser cualquier punto en la región $\mathcal{R}$, se modifica de manera adecuada el contorno punteado de la región $\mathcal{R}$ en la figura 10-9 y se sigue que $F(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

Método 3. Con el teorema de Morera.
Consulte la figura 10-9 y se tiene

$$\begin{aligned} \oint_{KSLTK} F(z)\, dz &= \int_{KSL} F(z)\, dz + \int_{LK} F(z)\, dz + \int_{KL} F(z)\, dz + \int_{LTK} F(z)\, dz \\ &= \oint_{KSLK} F_1(z)\, dz + \oint_{KLTK} F_2(z)\, dz = 0 \end{aligned}$$

de acuerdo con el teorema de Cauchy. Por tanto, la integral a lo largo de cualquier trayectoria simple cerrada en $\mathcal{R}$ es cero y, por el teorema de Morera, $F(z)$ debe ser analítica.
La función $F_2(z)$ se llama *prolongación analítica* de $F_1(z)$.

www.FreeLibros.me

10.5. *a*) Demuestre que la función definida por $F_1(z) = z - z^2 + z^3 - z^4 + \cdots$ es analítica en la región $|z| = 1$. *b*) Encuentre una función que represente todas las posibles prolongaciones analíticas de $F_1(z)$.

Solución

a) De acuerdo con el criterio del cociente, esta serie converge para $|z| < 1$. Por tanto, esta serie representa una función analítica en esta región.

b) Para $|z| < 1$, la suma de esta serie es $F_2(z) = z/(1 + z)$. Pero esta función es analítica en todos los puntos excepto $z = -1$. Como $F_2(z) = F_1(z)$ en el interior de $|z| = 1$, ésta es la función buscada.

10.6. *a*) Demuestre que la función definida por $F_1(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-zt}\, dt$ es analítica en todos los puntos z en los que $\text{Re}\{z\} > 0$. *b*) Encuentre una función que sea la prolongación analítica de $F_1(z)$ en el interior del semiplano izquierdo $\text{Re}\{z\} < 0$.

Solución

a) Se integra por partes para $\text{Re}\{z\} > 0$ y se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^3 e^{-zt}\, dt &= \lim_{M\to\infty} \int_0^M t^3 e^{-zt}\, dt \\
&= \lim_{M\to\infty} \left\{ (t^3)\left(\frac{e^{-zt}}{-z}\right) - (3t^2)\left(\frac{e^{-zt}}{z^2}\right) + (6t)\left(\frac{e^{-zt}}{-z^3}\right) - (6)\left(\frac{e^{-zt}}{z^4}\right) \right\}\Bigg|_0^M \\
&= \lim_{M\to\infty} \left\{ \frac{6}{z^4} - \frac{M^3 e^{-Mz}}{z} - \frac{3M^2 e^{-Mz}}{z^2} - \frac{6Me^{-Mz}}{z^3} - \frac{6e^{-Mz}}{z^4} \right\} = \frac{6}{z^4}
\end{aligned}$$

b) Para $\text{Re}\{z\} > 0$, la integral tiene el valor $F_2(z) = 6/z^4$. Pero esta función es analítica en todos los puntos salvo $z = 0$. Como $F_2(z) = F_1(z)$ para $\text{Re}\{z\} > 0$, se ve que $F_2(z) = 6/z^4$ debe ser la prolongación analítica buscada.

PRINCIPIO DE REFLEXIÓN DE SCHWARZ

10.7. Demuestre el principio de reflexión de Schwarz (véase la página 320).

Solución

Consulte la figura 10-4, página 320. Sobre el eje real $[y = 0]$ se tiene $F_1(z) = F_1(x) = \overline{F_1(x)} = \overline{F_1(\bar{z})}$. Así, de acuerdo con el problema 10.3, sólo es necesario demostrar que $\overline{F_1(\bar{z})} = F_2(z)$ es analítica en $\mathcal{R}_2$.

Sea $F_1(z) = U_1(x, y) + iV_1(x, y)$. Como esta función es analítica en $\mathcal{R}_1$ [es decir, $y > 0$], de acuerdo con las ecuaciones de Cauchy-Riemann se tiene

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{\partial U_1}{\partial y} \tag{1}$$

donde las derivadas parciales son continuas.

Ahora, $F_1(\bar{z}) = F_1(x - iy) = U_1(x, -y) + iV_1(x, -y)$, y por ende $\overline{F_1(\bar{z})} = U_1(x, -y) - iV_1(x, -y)$. Para que esta función sea analítica en $\mathcal{R}_2$, debe tenerse, para $y > 0$,

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial(-V_1)}{\partial(-y)}, \qquad \frac{\partial(-V_1)}{\partial x} = -\frac{\partial U_1}{\partial(-y)} \tag{2}$$

www.FreeLibros.me

Pero estas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones en (1), porque

$$\frac{\partial(-V_1)}{\partial(-y)} = \frac{\partial V_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial(-V_1)}{\partial x} = -\frac{\partial V_1}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial U_1}{\partial(-y)} = -\frac{\partial U_1}{\partial y}$$

De donde se sigue el resultado buscado.

PRODUCTOS INFINITOS

10.8. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|w_k|)$ converja es que $\sum |w_k|$ converja.

Solución

Suficiencia. Si $x > 0$, entonces $1 + x \leq e^x$, de manera que

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+|w_k|) = (1+|w_1|)(1+|w_2|)\cdots(1+|w_n|) \leq e^{|w_1|}e^{|w_2|}\cdots e^{|w_n|} = e^{|w_1|+|w_2|+\cdots+|w_n|}$$

Si $\sum_{k=1}^{\infty}|w_k|$ converge, P_n es una sucesión monótonamente creciente acotada y, por tanto, tiene un límite, es decir, $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|w_k|)$, converge.

Necesidad. Si $S_n = \sum_{k=1}^{n}|w_k|$, se tiene

$$P_n = (1+|w_1|)(1+|w_2|)\cdots(1+|w_n|) \geq 1 + |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n| = 1 + S_n \geq 1$$

Si $\lim_{n\to\infty} P_n$ existe, es decir, si el producto infinito converge, S_n es una sucesión monótonamente creciente acotada y, por tanto, tiene un límite, es decir, $\sum_{k=1}^{\infty}|w_k|$ converge.

10.9. Demuestre que $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$ converge.

Solución

Sea $w_k = -(z^2/k^2)$. Así, $|w_k| = |z^2|/k^2$ y $\sum |w_k| = |z|^2 \sum 1/k^2$ converge. Por tanto, de acuerdo con el problema 10.8, el producto infinito es absolutamente convergente, por lo que es convergente.

10.10. Demuestre que $\displaystyle\operatorname{sen} z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Solución

De acuerdo con el problema 7.35, página 233, se tiene

$$\int_0^z \left(\cot t - \frac{1}{t}\right)dt = \ln\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)\Bigg|_0^z = \ln\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right) = \int_0^z \left(\frac{2t}{t^2-\pi^2} + \frac{2t}{t^2-4\pi^2} + \cdots\right)dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) = \ln\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Por tanto, $\displaystyle\operatorname{sen} z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$.

www.FreeLibros.me

LA FUNCIÓN GAMMA

10.11. Con la definición 10.4, página 321, demuestre que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Solución

Se integra por partes, si $\text{Re}\{z\} > 0$, y se tiene

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt = \lim_{M\to\infty}\int_0^M t^z e^{-t}\,dt = \lim_{M\to\infty}\left\{(t^z)(-e^{-t})\Big|_0^M - \int_0^M (zt^{z-1})(-e^{-t})\,dt\right\}$$

$$= z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt = z\Gamma(z)$$

10.12. Demuestre que $\Gamma(m) = 2\displaystyle\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx,\ m > 0$.

Solución

Si $t = x^2$, se tiene

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty (x^2)^{m-1}e^{-x^2}2x\,dx = 2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}\,dx$$

Este resultado también es válido si $\text{Re}\{m\} > 0$.

10.13. Demuestre que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\text{sen}\,\pi z}$.

Solución

Primero se demuestra esta igualdad para valores reales de z tales que $0 < z < 1$. Mediante prolongación analítica, la igualdad se extiende a otros valores de z.

De acuerdo con el problema 10.12, para $0 < m < 1$ se tiene

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m) = \left\{2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx\right\}\left\{2\int_0^\infty y^{1-2m}e^{-y^2}dy\right\}$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{1-2m}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

En términos de coordenadas polares (r, θ) con $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, esto se convierte en

$$4\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\infty}(\tan^{1-2m}\theta)(re^{-r^2})\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\tan^{1-2m}\theta\,d\theta = \frac{\pi}{\text{sen}\,m\pi}$$

con el problema 7.20, página 223, con $x = \tan^2\theta$ y $p = 1 - m$.

www.FreeLibros.me

10.14. Demuestre que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$.

Solución

De acuerdo con el problema 10.12, con $m = \frac{1}{2}$ se tiene

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

De acuerdo con el problema 10.13, con $z = \frac{1}{2}$ se tiene

$$\left\{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right\}^2 = \pi \quad \text{o} \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

porque $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$. Por tanto, se llega al resultado buscado.

Otro método. Al igual que en el problema 10.13,

$$\left\{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right\}^2 = \left\{2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right\}\left\{2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right\} = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \pi$$

de donde $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

10.15. Mediante la prolongación analítica, muestre que $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.

Solución

Si $\text{Re}\{z\} > 0$, $\Gamma(z)$ se define mediante la ecuación (10.4), página 321, pero para $\text{Re}\{z\} \le 0$ no puede emplearse esta definición. Sin embargo, con la fórmula de recursión $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, válida para $\text{Re}\{z\} > 0$, sí se extiende la definición para $\text{Re}\{z\} \le 0$, es decir, proporciona una prolongación analítica para el semiplano izquierdo.

Se sustituye $z = -\frac{1}{2}$ en $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y se encuentra $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ o $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$, con el problema 10.14.

10.16. *a*) Demuestre que $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$.

b) Con el inciso *a*) muestre que $\Gamma(z)$ es una función analítica, salvo por los polos simples en el semiplano izquierdo en $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$.

Solución

a) Se tiene $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(z+2) = (z+1)\Gamma(z+1) = (z+1)z\Gamma(z)$, $\Gamma(z+3) = (z+2)\Gamma(z+2) = (z+2)(z+1)z\Gamma(z)$ y, en general, $\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\cdots(z+2)(z+1)z\Gamma(z)$, de donde se obtiene el resultado buscado.

b) Se sabe que $\Gamma(z)$ es analítica para $\text{Re}\{z\} > 0$, de acuerdo con la definición (10.4), página 321. Además, de acuerdo con el resultado del inciso *a*), es claro que $\Gamma(z)$ está definida y es analítica para $\text{Re}\{z\} \ge -n$ salvo por los polos simples en $z = 0, -1, -2, \ldots, -n$. Como así sucede con todo entero positivo n, se obtiene el resultado buscado.

www.FreeLibros.me

10.17. Con el teorema de factorización de Weierstrass para productos infinitos [ecuación (10.2), página 321] obtenga el producto infinito para la función gamma [propiedad 2, página 327].

Solución

Sea $f(z) = 1/\Gamma(z+1)$. Así, $f(z)$ es analítica en todas partes y tiene ceros simples en $z = -1, -2, -3, \ldots$. De acuerdo con el teorema de factorización de Weierstrass se encuentra

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{f'(0)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$$

Para determinar $f'(0)$, sea $z = 1$. Así, como $\Gamma(2) = 1$, se tiene

$$1 = e^{f'(0)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) e^{-1/k} = e^{f'(0)} \lim_{M\to\infty} \prod_{k=1}^{M} \left(1 + \frac{1}{k}\right) e^{-1/k}$$

Se toman logaritmos y se ve que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{M\to\infty} \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{M} - \ln\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{M}\right)\right]\right\} \\ &= \lim_{M\to\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{M} - \ln M \right\} = \gamma \end{aligned}$$

donde γ es la constante de Euler. Por tanto, el resultado buscado se obtiene al observar que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

LA FUNCIÓN BETA

10.18. Demuestre que $B(m, n) = B(n, m)$.

Solución

Con $t = 1 - u$,

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\, dt = \int_0^1 (1-u)^{m-1} u^{n-1}\, du = B(n, m)$$

10.19. Demuestre que $B(m, n) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \operatorname{sen}^{2n-1}\theta\, d\theta.$

Solución

Sea $t = \operatorname{sen}^2\theta$. Entonces,

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\, dt = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2\theta)^{m-1}(\cos^2\theta)^{n-1} 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \operatorname{sen}^{2n-1}\theta\, d\theta \end{aligned}$$

de acuerdo con el problema 10.18.

www.FreeLibros.me

10.20. Demuestre que $B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

Solución

De acuerdo con el problema 10.12, al transformar a coordenadas polares se tiene

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \left\{2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx\right\}\left\{2\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}\,dy\right\} = 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\infty}(\cos^{2m-1}\theta\,\mathrm{sen}^{2n-1}\theta)(r^{2m+2n-1}e^{-r^2})\,dr\,d\theta$$

$$= \left\{2\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\theta\,\mathrm{sen}^{2n-1}\theta\,d\theta\right\}\left\{\int_0^\infty r^{2(m+n)-1}e^{-r^2}dr\right\} = B(m, n)\Gamma(m+n)$$

donde se emplearon los problemas 10.19 y 10.12 con la sustitución de r por t y $m+n$ por m. A partir de esto se llega al resultado buscado.

10.21. Resuelva *a*) $\int_0^2 \sqrt{x(2-x)}\,dx$ y *b*) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta$.

Solución

a) Con $x = 2t$, la integral se convierte en

$$\int_0^1 \sqrt{4t(1-t)}2\,dt = 4\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\,dt = 4B(3/2, 3/2)$$

$$= 4\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)} = \frac{4\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

b)

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^{1/2}\theta\,\cos^{-1/2}\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}B\left(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{3}{4}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi/4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

con los problemas 10.13, 10.19 y 10.20.

10.22. Muestre que $\int_0^4 y^{3/2}(16-y^2)^{1/2}\,dy = \dfrac{64}{21}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2$.

Solución

Sea $y^2 = 16t$, es decir, $y = 4t^{1/2}$, $dy = 2t^{-1/2}\,dt$. Así, la integral se convierte en

$$\int_0^1 \{8t^{3/4}\}\{4(1-t)^{1/2}\}\{2t^{-1/2}\,dt\} = 64\int_0^1 t^{1/4}(1-t)^{1/2}\,dt$$

$$= 64B\left(\tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{2}\right) = \frac{64\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)} = \frac{64\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \frac{128\sqrt{\pi}}{21}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{128\sqrt{\pi}}{21}\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{64}{21}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)\right\}^2$$

al aprovechar que $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \pi/[\mathrm{sen}(\pi/4)] = \pi\sqrt{2}$ [problema 10.13].

www.FreeLibros.me

ECUACIONES DIFERENCIALES

10.23. Determine los puntos singulares de las ecuaciones diferenciales siguientes y especifique si son regulares o irregulares.

a) $z^2Y'' + zY' + (z^2 - n^2)Y = 0 \quad \text{o} \quad Y'' + \frac{1}{z}Y' + \left(\frac{z^2 - n^2}{z^2}\right)Y = 0$

b) $(z-1)^4Y'' + 2(z-1)^3Y' + Y = 0 \quad \text{o} \quad Y'' + \frac{2}{z-1}Y' + \frac{1}{(z-1)^4}Y = 0$

c) $z^2(1-z)Y'' + Y' - Y = 0 \quad \text{o} \quad Y'' + \frac{1}{z^2(1-z)}Y' - \frac{1}{z^2(1-z)}Y = 0$

Solución

a) $z = 0$ es un punto singular. Como $z(1/z) = 1$ y $z^2\{(z^2 - n^2)/z^2\} = z^2 - n^2$ son analíticas en $z = 0$, éste es un punto singular regular.

b) En el punto singular $z = 1$, $(z-1)\{2/(z-1)\} = 2$ es analítica pero $(z-1)^2 \cdot \{1/(z-1)^4\} = \{1/(z-1)^2\}$ no es analítica. Por tanto, $z = 1$ es un punto singular irregular.

c) En el punto singular $z = 0$,

$$z\left\{\frac{1}{z^2(1-z)}\right\} = \frac{1}{z(1-z)} \qquad \text{y} \qquad z^2\left\{\frac{-1}{z^2(1-z)}\right\} = \frac{-1}{1-z}$$

no son analíticas. Por tanto, $z = 0$ es un punto singular irregular.

En el punto singular $z = 1$,

$$(z-1)\cdot\left\{\frac{1}{z^2(1-z)}\right\} = \frac{-1}{z^2} \qquad \text{y} \qquad (z-1)^2\left\{\frac{-1}{z^2(1-z)}\right\} = \frac{z-1}{z^2}$$

son analíticas. Por tanto, $z = 1$ es un punto singular regular.

10.24. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial de Bessel

$$z^2Y'' + zY' + (z^2 - n^2)Y = 0$$

donde $n \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Solución

El punto $z = 0$ es un punto singular regular. Por tanto, existe una solución serie de la forma $Y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^{k+c}$, donde $a_k = 0$ para $k = -1, -2, -3, \ldots$. Mediante diferenciación, al omitir los límites de la sumatoria, se tiene

$$Y' = \sum (k+c)a_k z^{k+c-1}, \qquad Y'' = \sum (k+c)(k+c-1)a_k z^{k+c-2}$$

Así,

$$z^2Y'' = \sum (k+c)(k+c-1)a_k z^{k+c}, \quad zY' = \sum (k+c)a_k z^{k+c}$$

$$(z^2 - n^2)Y = \sum a_k z^{k+c+2} - \sum n^2 a_k z^{k+c} = \sum a_{k-2} z^{k+c} - \sum n^2 a_k z^{k+c}$$

Se suma,

$$z^2Y'' + zY' + (z^2 - n^2)Y = \sum \{[(k+c)^2 - n^2]a_k + a_{k-2}\}z^{k+c} = 0$$

de donde se obtiene

$$[(k+c)^2 - n^2]a_k + a_{k-2} = 0 \tag{1}$$

Si $k = 0$, $(c^2 - n^2)a_0 = 0$, y si $a_0 \neq 0$, se obtiene la *ecuación característica* $c^2 - n^2 = 0$, cuyas raíces son $c = \pm n$.

Caso 1: $c = n$.

www.FreeLibros.me

De (1), $[(k+n)^2 - n^2]a_k + a_{k-2} = 0$ o $k(2n+k)a_k + a_{k-2} = 0$.

Si $k = 1$, $a_1 = 0$. Si $k = 2$, $a_2 = -\{a_0/2(2n+2)\}$. Si $k = 3$, $a_3 = 0$.

Si $k = 4$, $a_4 = -\{a_2/4(2n+4)\} = \{a_0/2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)\}$, etc. Entonces

$$Y = \sum a_k z^{k+c} = a_0 z^n \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots \right\} \tag{2}$$

Caso 2: $c = -n$.
El resultado obtenido es

$$Y = a_0 z^{-n} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2-2n)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots \right\} \tag{3}$$

que se obtiene formalmente del caso 1 al sustituir n por $-n$.
La solución general si $n \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ está dada por

$$\begin{aligned} Y = {} & Az^n \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots \right\} \\ & + Bz^{-n} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2-2n)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2-2n)(4-2n)} - \cdots \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

Si $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sólo se obtiene una solución. En este caso, para hallar la solución general debe procederse como en los problemas 10.175 y 10.176.

Como la singularidad más cercana a $z = 0$ está al infinito, las soluciones deben convergir para toda z. Esto se demuestra fácilmente mediante el criterio del cociente.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE INTEGRALES DE CONTORNO

10.25 *a*) Dada la ecuación $zY'' + (2n+1)Y' + zY = 0$, obtenga una solución de la forma $Y = \oint_C e^{zt} G(t)\, dt$.

b) Con $Y = z^r U$ y al elegir la constante r de manera apropiada, obtenga una integral de contorno que sea solución de $z^2 U'' + zU' + (z^2 - n^2)U = 0$.

Solución

a) Si $Y = \oint_C e^{zt} G(t)\, dt$, se tiene $Y' = \oint_C te^{zt} G(t)\, dt$, $Y'' = \oint_C t^2 e^{zt} G(t)\, dt$. Así, al integrar por partes, suponiendo que C se haya elegido de manera que los valores funcionales en los puntos inicial y final P sean iguales [y la parte integrada en cero], se tiene

$$zY = \oint_C ze^{zt} G(t)\, dt = e^{zt} G(t) \Big|_P^P - \oint_C e^{zt} G'(t)\, dt = -\oint_C e^{zt} G'(t)\, dt$$

$$(2n+1)Y' = \oint_C (2n+1) te^{zt} G(t)\, dt$$

$$zY'' = \oint_C zt^2 e^{zt} G(t)\, dt = \oint_C (ze^{zt})\{t^2 G(t)\}\, dt$$

$$= e^{zt}\{t^2 G(t)\} \Big|_P^P - \oint_C e^{zt}\{t^2 G(t)\}'\, dt = -\oint_C e^{zt}\{t^2 G(t)\}'\, dt$$

Por tanto,

$$zY'' + (2n+1)Y' + zY = 0 = \oint_C e^{zt}[-G'(t) + (2n+1)tG(t) - \{t^2 G(t)\}']\, dt$$

www.FreeLibros.me

Esta ecuación se satisface si se elige $G(t)$ de manera que el integrando sea cero, es decir,

$$-G'(t) + (2n+1)tG(t) - \{t^2 G(t)\}' = 0 \quad \text{o} \quad G'(t) = \frac{(2n-1)t}{t^2+1} G(t)$$

Al resolver, $G(t) = A(t^2+1)^{n-(1/2)}$, donde A es una constante. Por tanto, una solución es

$$Y = A \oint_C e^{zt}(t^2+1)^{n-(1/2)}\, dt$$

b) Si $Y = z^r U$, entonces $Y' = z^r U' + rz^{r-1}U$ y $Y'' = z^r U'' + 2rz^{r-1}U' + r(r-1)z^{r-2}U$. Por tanto,

$$\begin{aligned} zY'' + (2n+1)Y' + zY &= z^{r+1}U'' + 2rz^r U' + r(r-1)z^{r-1}U \\ &\quad + (2n+1)z^r U' + (2n+1)rz^{r-1}U + z^{r+1}U \\ &= z^{r+1}U'' + [2rz^r + (2n+1)z^r]U' \\ &\quad + [r(r-1)z^{r-1} + (2n+1)rz^{r-1} + z^{r+1}]U \end{aligned}$$

La ecuación diferencial dada entonces equivale a

$$z^2 U'' + (2r+2n+1)zU' + [z^2 + r^2 + 2nr]U = 0$$

Con $r = -n$, esto se convierte en $z^2U'' + zU' + (z^2 - n^2)U = 0$.

Por tanto, una solución mediante una integral de contorno es

$$U = z^n Y = Az^n \oint_C e^{zt}(t^2+1)^{n-1/2}\, dt$$

10.26. Obtenga la solución general de $Y'' - 3Y' + 2Y = 0$ mediante el método de integrales de contorno.

Solución

Sean $Y = \oint_C e^{zt}G(t)\, dt$, $\quad Y' = \oint_C te^{zt}G(t)\, dt$, $\quad Y'' = \oint_C t^2 e^{zt}G(t)\, dt$. Entonces

$$Y'' - 3Y' + 2Y = \oint_C e^{zt}(t^2 - 3t + 2)G(t)\, dt = 0$$

se satisface si se elige $G(t) = 1/(t^2 - 3t + 2)$. Por tanto $Y = \oint_C \dfrac{e^{zt}}{t^2 - 3t + 2}\, dt$

Si se elige C de manera que el polo simple $t = 1$ se encuentre en el interior de C y $t = 2$ esté en el exterior de C, la integral tiene el valor $2\pi i e^z$. Si $t = 2$ está en el interior de C y $t = 1$ en el exterior de C, la integral tiene el valor $2\pi i e^{2z}$.

La solución general está dada por $Y = Ae^z + Be^{2z}$.

FUNCIONES DE BESSEL

10.27. Demuestre que $zJ_{n-1}(z) - 2nJ_n(z) + zJ_{n+1}(z) = 0$.

Solución

Al diferenciar respecto de t ambos lados de la identidad

$$e^{(1/2)z(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$$

se obtiene

$$e^{(1/2)z(t-1/t)}\left\{\frac{z}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)J_n(z)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(z)\, t^{n-1}$$

www.FreeLibros.me

es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} zJ_n(z)t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} zJ_n(z)t^{n-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2nJ_n(z)t^{n-1}$$

Al igualar los coeficientes de t^n en ambos lados se tiene

$$zJ_n(z) + zJ_{n+2}(z) = 2(n+1)J_{n+1}(z)$$

y al sustituir n por $n - 1$ se llega al resultado buscado.

Como se empleó la función generatriz, el resultado anterior sólo se comprueba para valores enteros de n. Este resultado también es válido para valores no enteros de n [véase el problema 10.114].

10.28. Demuestre que $J_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C t^{-n-1}e^{(1/2)z(t-1/t)}dt$, donde C es una curva simple cerrada que encierra a $t = 0$.

Solución

Se tiene $e^{(1/2)z(t-1/t)} = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z)t^m$

de manera que $t^{-n-1}e^{(1/2)z(t-1/t)} = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^{m-n-1}J_m(z)$ y

$$\oint_C t^{-n-1}e^{(1/2)z(t-1/t)}\,dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z)\oint_C t^{m-n-1}\,dt \tag{1}$$

Ahora, de acuerdo con los problemas 4.21 y 4.22, página 132, se tiene

$$\oint_C t^{m-n-1}\,dt = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \tag{2}$$

Por tanto, la serie en el lado derecho de (1) se reduce a $2\pi i J_n(z)$, de donde se obtiene el resultado buscado.

10.29. Demuestre que si $a \neq b$,

$$\int_0^z tJ_n(at)J_n(bt)\,dt = \frac{z\{aJ_n(bz)J_n'(az) - bJ_n(az)J_n'(bz)\}}{b^2 - a^2}$$

Solución

$Y_1 = J_n(at)$ y $Y_2 = J_n(bt)$ satisfacen las respectivas ecuaciones diferenciales

$$t^2Y_1'' + tY_1' + (a^2t^2 - n^2)Y_1 = 0 \tag{1}$$

$$t^2Y_2'' + tY_2' + (b^2t^2 - n^2)Y_2 = 0 \tag{2}$$

Se multiplica (1) por Y_2, (2) por Y_1 y se resta, para encontrar

$$t^2\big(Y_2Y_1'' - Y_1Y_2''\big) + t\big(Y_2Y_1' - Y_1Y_2'\big) = (b^2 - a^2)t^2Y_1Y_2$$

Esto se escribe

$$t\frac{d}{dt}\big(Y_2Y_1' - Y_1Y_2'\big) + \big(Y_2Y_1' - Y_1Y_2'\big) = (b^2 - a^2)tY_1Y_2$$

o

$$\frac{d}{dt}\{t(Y_2Y_1' - Y_1Y_2')\} = (b^2 - a^2)tY_1Y_2$$

Al integrar respecto de t desde 0 hasta z se obtiene

$$(b^2 - a^2)\int_0^z tY_1Y_2\,dt = t(Y_2Y_1' - Y_1Y_2')\Big|_0^z$$

www.FreeLibros.me

o, como $a \neq b$,

$$\int_0^z tJ_n(at)J_n(bt)\,dt = \frac{z\{aJ_n(bz)J_n'(az) - bJ_n(az)J_n'(bz)\}}{b^2 - a^2}$$

FUNCIONES DE LEGENDRE

10.30. Demuestre que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(z)P_n(z)\,dz = 0$ si $m \neq n$.

Solución

Se tiene

$$(1 - z^2)P_m'' - 2zP_m' + m(m+1)P_m = 0 \tag{1}$$

$$(1 - z^2)P_n'' - 2zP_n' + n(n+1)P_n = 0 \tag{2}$$

Al multiplicar (1) por P_n, (2) por P_m y restar, se obtiene

$$(1 - z^2)\{P_nP_m'' - P_mP_n''\} - 2z\{P_nP_m' - P_mP_n'\} = \{n(n+1) - m(m+1)\}P_mP_n$$

que se escribe

$$(1 - z^2)\frac{d}{dz}\{P_nP_m' - P_mP_n'\} - 2z\{P_nP_m' - P_mP_n'\} = \{n(n+1) - m(m+1)\}P_mP_n$$

o

$$\frac{d}{dz}\{(1 - z^2)(P_nP_m' - P_mP_n')\} = \{n(n+1) - m(m+1)\}P_mP_n$$

Se integra desde -1 hasta 1 y se tiene

$$\{n(n+1) - m(m+1)\}\int_{-1}^{1} P_m(z)P_n(z)\,dz = (1 - z^2)(P_nP_m' - P_mP_n')\Big|_{-1}^{1} = 0$$

de donde se obtiene el resultado buscado, pues $m \neq n$.

Este resultado suele conocerse como *principio de ortogonalidad* para los polinomios de Legendre, y se dice que los polinomios de Legendre forman un *conjunto ortogonal.*

10.31. Demuestre que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(z)P_n(z)\,dz = \frac{2}{2n+1}$ si $m = n$.

Solución

Se elevan al cuadrado ambos lados de la igualdad,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n$$

y se obtiene

$$\frac{1}{1 - 2zt + t^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_m(z)P_n(z)t^{m+n}$$

Al integrar desde -1 hasta 1, y con el problema 10.30, se encuentra

$$\int_{-1}^{1}\frac{dz}{1 - 2zt + t^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{-1}^{1} P_m(z)P_n(z)\,dz\right\}t^{m+n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{-1}^{1}\{P_n(z)\}^2\,dz\right\}t^{2n} \tag{1}$$

www.FreeLibros.me

Pero el lado izquierdo es igual a

$$-\frac{1}{2t}\ln(1-2zt+t^2)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2}{2n+1}\right\}t^{2n} \tag{2}$$

con el problema 6.23*c*), página 185. Al igualar los coeficientes de t^{2n} en las series (1) y (2), se obtiene el resultado buscado.

10.32. Demuestre que $(n+1)P_{n+1}(z)-(2n+1)zP_n(z)+nP_{n-1}(z)=0$.

Solución

Al diferenciar respecto de t ambos lados de la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n$$

se tiene

$$\frac{z-t}{(1-2zt+t^2)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(z)t^{n-1}$$

Después se multiplica por $1-2zt+t^2$ y se tiene

$$(z-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n=(1-2zt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(z)t^{n-1}$$

o

$$\sum_{n=0}^{\infty}zP_n(z)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(z)t^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2nzP_n(z)t^n+\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(z)t^{n+1}$$

Se igualan los coeficientes de t^n en cada lado y se obtiene

$$zP_n(z)-P_{n-1}(z)=(n+1)P_{n+1}(z)-2nzP_n(z)+(n-1)P_{n-1}(z)$$

de donde, al simplificar, se obtiene el resultado buscado.

FUNCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

10.33. Demuestre que $F(1/2,\ 1/2;3/2;z^2)=\dfrac{\operatorname{sen}^{-1}z}{z}$.

Solución

Como

$$F(a,\ b;c;z)=1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+\cdots$$

se tiene

$$\begin{aligned}F(1/2,\ 1/2;3/2;z^2)&=1+\frac{(1/2)(1/2)}{1\cdot(3/2)}z^2+\frac{(1/2)(3/2)(1/2)(3/2)}{1\cdot 2\cdot(3/2)(5/2)}z^4\\&\quad+\frac{(1/2)(3/2)(5/2)(1/2)(3/2)(5/2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(3/2)(5/2)(7/2)}z^6+\cdots\\&=1+\frac{1}{2}\frac{z^2}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^4}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^6}{7}+\cdots=\frac{\operatorname{sen}^{-1}z}{z}\end{aligned}$$

con el problema 6.89, página 197.

www.FreeLibros.me

LA FUNCIÓN ZETA

10.34. Demuestre que la función zeta $\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^z$ es analítica en la región del plano z en la que $\text{Re}\{z\} \geq 1 + \delta$, donde δ es un número positivo fijo.

Solución

Cada término $1/k^z$ de la serie es una función analítica. Además, si $x = \text{Re}\{z\} \geq 1 + \delta$, entonces

$$\left|\frac{1}{k^z}\right| = \left|\frac{1}{e^{z \ln k}}\right| = \frac{1}{e^{x \ln k}} = \frac{1}{k^x} \leq \frac{1}{k^{1+\delta}}$$

Como $\sum 1/k^{1+\delta}$ converge, según el criterio M de Weierstrass, se ve que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^z$ converge uniformemente para $\text{Re}\{z\} \geq 1 + \delta$. Por tanto, de acuerdo con el teorema 6.21, página 172, $\zeta(z)$ es analítica en esta región.

EXPANSIONES ASINTÓTICAS Y EL MÉTODO DEL PUNTO SILLA

10.35. *a*) Sea $p > 0$. Demuestre que

$$F(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^p}\, dt = e^{-z}\left\{\frac{1}{z^p} - \frac{p}{z^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{z^{p+2}} - \cdots (-1)^n \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{z^{p+n}}\right\}$$

$$+ (-1)^{n+1} p(p+1)\cdots(p+n) \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{p+n+1}}\, dt$$

b) Con el inciso *a*) demuestre que

$$F(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^p}\, dt \sim e^{-z}\left\{\frac{1}{z^p} - \frac{p}{z^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{z^{p+2}} - \cdots\right\} = S(z)$$

es decir, que la serie del lado derecho es un desarrollo asintótico de la función del lado izquierdo.

Solución

a) Se integra por partes y se tiene

$$I_p = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^p} dt = \lim_{M\to\infty} \int_z^{M} e^{-t} t^{-p} dt = \lim_{M\to\infty} \left\{ (-e^{-t})(t^{-p})\Big|_z^M - \int_z^M (-e^{-t})(-pt^{-p-1})\, dt \right\}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left\{ \frac{e^{-z}}{z^p} - \frac{e^{-M}}{M^p} - p \int_z^M \frac{e^{-t}}{t^{p+1}} dt \right\} = \frac{e^{-z}}{z^p} - p \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{p+1}} dt = \frac{e^{-z}}{z^p} - pI_{p+1}$$

De manera similar, $I_{p+1} = (e^{-z}/z^{p+1}) - (p+1)I_{p+2}$, de manera que

$$I_p = \frac{e^{-z}}{z^p} - p\left\{\frac{e^{-z}}{z^{p+1}} - (p+1)I_{p+2}\right\} = \frac{e^{-z}}{z^p} - \frac{pe^{-z}}{z^{p+1}} + p(p+1)I_{p+2}$$

Al continuar de esta manera se llega al resultado.

b) Sea

$$S_n(z) = e^{-z}\left\{\frac{1}{z^p} - \frac{p}{z^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{z^{p+2}} - \cdots (-1)^n \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{z^{p+n}}\right\}$$

www.FreeLibros.me

Así,

$$R_n(z) = F(z) - S_n(z) = (-1)^{n+1} p(p+1)\cdots(p+n) \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^{p+n+1}}\, dt$$

Ahora, para z real, $z > 0$,

$$|R_n(z)| = p(p+1)\cdots(p+n) \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^{p+n+1}}\, dt \le p(p+1)\cdots(p+n) \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{z^{p+n+1}}\, dt$$

$$\le \frac{p(p+1)\cdots(p+n)}{z^{p+n+1}}$$

porque

$$\int_z^\infty e^{-t}\, dt \le \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

Así,

$$\lim_{z\to\infty} |z^n R_n(z)| \le \lim_{z\to\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n)}{z^p} = 0$$

y se sigue que $\lim_{z\to\infty} z^n R_n(z) = 0$. Por tanto, se comprueba el resultado buscado para z real, $z > 0$. Este resultado se extiende también a valores complejos de z.

Observe que, como

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{p(p+1)\cdots(p+n)/z^{p+n+1}}{p(p+1)\cdots(p+n-1)/z^{p+n}}\right| = \frac{p+n}{|z|}$$

donde u_n es el término n-ésimo de la serie, para toda z fija se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \infty$$

y la serie diverge para toda z, de acuerdo con el criterio del cociente.

10.36. Muestre que $\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z}\, z^z e^{-z} \left\{1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51\,840z^3} + \cdots\right\}$.

Solución

Se tiene $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty \tau^z e^{-\tau}\, d\tau$. Con $\tau = zt$, esto se convierte en

$$\Gamma(z+1) = z^{z+1} \int_0^\infty t^z e^{-zt} dt = z^{z+1} \int_0^\infty e^{z(\ln t - t)} dt \tag{1}$$

que es de la forma de (10.37), página 330, donde $F(t) = \ln t - t$.

$F'(t) = 0$ para $t = 1$. Con $t = 1 + w$, se encuentra, con el problema 6.23, página 185, o de otro modo la serie de Taylor,

$$F(t) = \ln t - t = \ln(1+w) - (1+w) = \left(w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \cdots\right) - 1 - w$$

$$= -1 - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \cdots = -1 - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^3}{3} - \frac{(t-1)^4}{4} + \cdots$$

www.FreeLibros.me

Por tanto, de acuerdo con (1),

$$\Gamma(z+1) = z^{z+1}e^{-z}\int_0^\infty e^{-z(t-1)^2/2}e^{z(t-1)^3/3-z(t-1)^4/4+\cdots}\,dt$$

$$= z^{z+1}e^{-z}\int_{-1}^\infty e^{-zw^2/2}e^{zw^2/3-zw^4/4+\cdots}\,dw \tag{2}$$

Con $w = \sqrt{2/z}v$, esto se convierte en

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2}z^{z+1/2}e^{-z}\int_{-\sqrt{z/2}}^\infty e^{-v^2}e^{(2/3)\sqrt{2}z^{-1/2}v^3-z^{-1}v^4+\cdots}\,dv \tag{3}$$

Para valores grandes de z, el límite inferior se sustituye por $-\infty$, y, al desarrollar el exponencial, se tiene

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2}\,z^{z+1/2}e^{-z}\int_{-\infty}^\infty e^{-v^2}\{1+\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{2}z^{-1/2}v^3 - z^{-1}v^4\right)+\cdots\}\,dv \tag{4}$$

o

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z}\,z^z e^{-z}\left\{1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51\,840z^3}+\cdots\right\} \tag{5}$$

Aunque arriba se procedió de manera formal, este análisis puede justificarse rigurosamente.

Otro método. Dada

$$F(t) = -1-\frac{(t-1)^2}{2}+\frac{(t-1)^3}{3}-\frac{(t-1)^4}{4}+\cdots = -1-u^2$$

Entonces

$$u^2 = \frac{(t-1)^2}{2}-\frac{(t-1)^3}{3}+\cdots$$

y, al invertir la serie o aprovechar que $F(t) = \ln t - t$, se encuentra

$$\frac{dt}{du} = b_0+b_1u+b_2u^2+\cdots = \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}u^2+\frac{\sqrt{2}}{216}u^4+\cdots$$

Así, de acuerdo con (10.41), página 330, se encuentra

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{\frac{\pi}{z}}\,z^{z+1}e^{z(\ln 1-1)}\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\frac{1}{z}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\left(\frac{\sqrt{2}}{216}\right)\frac{1}{z^2}+\cdots\right\}$$

o

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z}\,z^z e^{-z}\left\{1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}+\cdots\right\}$$

Observe que, como $F''(1) = -1$, con la ecuación (10.42), página 330, se encuentra

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z}\,z^z e^{-z}$$

que es el primer término. Para muchos propósitos, este primer término proporciona suficiente exactitud.

www.FreeLibros.me

FUNCIONES ELÍPTICAS

10.37. Demuestre: *a)* $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sn} z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z$ y *b)* $\dfrac{d}{dz}\operatorname{cn} z = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z$.

Solución

Por definición, si $z = \displaystyle\int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, entonces $w = \operatorname{sn} z$. Por tanto,

a) $$\frac{d}{dz}(\operatorname{sn} z) = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{dz/dw} = \sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)} = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z$$

b) $$\frac{d}{dz}(\operatorname{cn} z) = \frac{d}{dz}(1-\operatorname{sn}^2 z)^{1/2} = \frac{1}{2}(1-\operatorname{sn}^2 z)^{-1/2}\frac{d}{dz}(-\operatorname{sn}^2 z)$$
$$= \frac{1}{2}(1-\operatorname{sn}^2 z)^{-1/2}(-2\operatorname{sn} z)(\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z) = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z$$

10.38. Demuestre que *a)* $\operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z$, *b)* $\operatorname{cn}(-z) = \operatorname{cn} z$ y *c)* $\operatorname{dn}(-z) = \operatorname{dn} z$.

Solución

a) Si $z = \displaystyle\int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, entonces $w = \operatorname{sn} z$. Sea $t = -r$; así,

$$z = -\int_0^{-w} \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(1-k^2r^2)}} \qquad \text{o} \qquad -z = \int_0^{-w} \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(1-k^2r^2)}},$$

es decir, $\operatorname{sn}(-z) = -w = -\operatorname{sn} z$

b) $\operatorname{cn}(-z) = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2(-z)} = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z} = \operatorname{cn} z$

c) $\operatorname{dn}(-z) = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2(-z)} = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 z} = \operatorname{dn} z$

10.39. Demuestre que *a)* $\operatorname{sn}(z+2K) = -\operatorname{sn} z$ y *b)* $\operatorname{cn}(z+2K) = -\operatorname{cn} z$.

Solución

Se tiene $z = \displaystyle\int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}}$, de manera que $\phi = \operatorname{am} z$ y $\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sn} z$, $\cos\phi = \operatorname{cn} z$. Ahora,

$$\int_0^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} + \int_\pi^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}}$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} + \int_0^{\phi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\psi}}$$

con la transformación $\theta = \pi + \psi$. Por tanto, $\phi + \pi = \operatorname{am}(z+2K)$.

Por ende se tiene

a) $\operatorname{sn}(z+2K) = \operatorname{sen}\{\operatorname{am}(z+2K)\} = \operatorname{sen}(\phi+\pi) = -\operatorname{sen}\phi = -\operatorname{an} z$

b) $\operatorname{cn}(z+2K) = \cos\{\operatorname{am}(z+2K)\} = \cos(\phi+\pi) = -\cos\phi = -\operatorname{cn} z$

www.FreeLibros.me

10.40. Demuestre que *a*) $\operatorname{sn}(z+4K)=\operatorname{sn} z$, *b*) $\operatorname{cn}(z+4K)=\operatorname{cn} z$ y *c*) $\operatorname{dn}(z+2K)=\operatorname{dn} z$.

Solución

De acuerdo con el problema 10.39,

a) $\operatorname{sn}(z+4K)=-\operatorname{sn}(z+2K)=\operatorname{sn} z$

b) $\operatorname{cn}(z+4K)=-\operatorname{cn}(z+2K)=\operatorname{cn} z$

c) $\operatorname{dn}(z+2K)=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2(z+2K)}=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 z}=\operatorname{dn} z$

Otro método. El integrando $1/\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$ tiene puntos de ramificación en $t=\pm 1$ y en $t=\pm 1/k$ en el plano t [véase la figura 10-10]. Considere la integral de 0 a w a lo largo de dos trayectorias C_1 y C_2. C_2 puede deformarse en la trayectoria $ABDEFGHJA+C_1$, donde BDE y GHJ son círculos de radio ϵ, y JAB y EFG, que se trazaron separadas para facilitar la explicación, en realidad coinciden con el eje x.

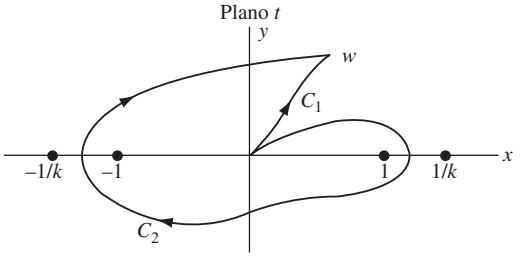


Figura 10-10

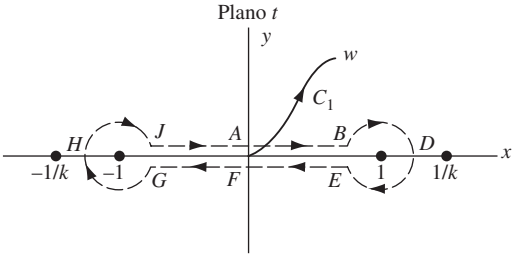


Figura 10-11

Así, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\substack{0\\C_2}}^{w}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} &= \int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\int_{BDE}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\\
&\quad+\int_{1-\epsilon}^{0}\frac{dx}{-\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\int_0^{-1+\epsilon}\frac{dx}{-\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\\
&\quad+\int_{GHJ}\frac{dt}{-\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}+\int_{-1+\epsilon}^{\theta}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\\
&\quad+\int_{\substack{0\\C_1}}^{w}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\\
&=4\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\int_{\substack{0\\C_1}}^{w}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\\
&\quad+\int_{BDE}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}+\int_{GHJ}\frac{dt}{-\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}
\end{aligned}$$

donde se aprovechó que, al encerrar en un círculo un punto de ramificación, cambia el signo del radical.

www.FreeLibros.me

En BDE y GHJ, se tiene $t = 1 - \epsilon e^{i\theta}$ y $t = -1 + \epsilon e^{i\theta}$, respectivamente. Así, las integrales correspondientes son iguales a

$$\int_0^{2\pi} \frac{-i\epsilon e^{i\theta}\, d\theta}{\sqrt{(2-\epsilon e^{i\theta})(\epsilon e^{i\theta})\{1-k^2(1-\epsilon e^{i\theta})^2\}}} = -i\sqrt{\epsilon}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta/2}\, d\theta}{\sqrt{(2-\epsilon e^{i\theta})\{1-k^2(1-\epsilon e^{i\theta})^2\}}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}\, d\theta}{\sqrt{(\epsilon e^{i\theta})(2-\epsilon e^{i\theta})\{1-k^2(-1+\epsilon e^{i\theta})^2\}}} = i\sqrt{\epsilon}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta/2}\, d\theta}{\sqrt{(2-\epsilon e^{i\theta})\{1-k^2(-1+\epsilon e^{i\theta})^2\}}}$$

Cuando $\epsilon \to 0$, estas integrales tienden a cero y se obtiene

$$\int_{\substack{0\\ C_2}}^{w} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_{\substack{0\\ C_1}}^{w} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

Ahora, si se escribe

$$z = \int_{\substack{0\\ C_1}}^{w} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad \text{es decir, } w = \operatorname{sn} z$$

entonces

$$z + 4K = \int_{\substack{0\\ C_2}}^{w} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad \text{es decir, } w = \operatorname{sn}(z+4k)$$

y, como el valor de w es el mismo en ambos casos, $\operatorname{sn}(z + 4K) = \operatorname{sn} z$.

De manera similar se demuestran los demás resultados.

10.41. Demuestre que *a*) $\operatorname{sn}(K + iK') = 1/k$, *b*) $\operatorname{cn}(K + iK') = ik'/k$ *c*) $\operatorname{dn}(K + iK') = 0$.

Solución

a) Se tiene

$$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

donde $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Sea $u = 1/\sqrt{1-k'^2t^2}$. Cuando $t = 0$, $u = 1$; cuando $t = 1$, $u = 1/k$. Por tanto, a medida que t varía de 0 a 1, u varía de 1 a $1/k$. De acuerdo con el problema 2.43, página 69, con $p = 1/k$, se sigue que $\sqrt{1-t^2} = -ik'u/\sqrt{1-k'^2u^2}$.

Así, por sustitución, se tiene

$$K' = -i\int_1^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

de donde

$$K + iK' = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} + \int_1^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int_0^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

es decir, $\operatorname{sn}(K + iK') = 1/k$.

b) De acuerdo con el inciso *a*),

$$\operatorname{cn}(K+iK') = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2(K+iK')} = \sqrt{1-1/k^2} = -i\sqrt{1-k^2}/k = -ik'/k$$

c) $\operatorname{dn}(K + iK') = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(K + iK')} = 0$, de acuerdo con el inciso *a*).

www.FreeLibros.me

10.42. Demuestre que *a*) $\operatorname{sn}(2K + 2iK') = 0$, *b*) $\operatorname{cn}(2K + 2iK') = 1$, *c*) $\operatorname{dn}(2K + 2iK') = -1$.

Solución

De acuerdo con las fórmulas para la adición con $z_1 = z_2 = K + iK'$, se tiene

a) $$\operatorname{sn}(2K + 2iK') = \frac{2\operatorname{sn}(K + iK')\operatorname{cn}(K + iK')\operatorname{dn}(K + iK')}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(K + iK')} = 0$$

b) $$\operatorname{cn}(2K + 2iK') = \frac{\operatorname{cn}^2(K + iK') - \operatorname{sn}^2(K + iK')\operatorname{dn}^2(K + iK')}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(K + iK')} = 1$$

c) $$\operatorname{dn}(2K + 2iK') = \frac{\operatorname{dn}^2(K + iK') - k^2\operatorname{sn}^2(K + iK')\operatorname{cn}^2(K + iK')}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(K + iK')} = -1$$

10.43. Demuestre que *a*) $\operatorname{sn}(z + 2iK') = \operatorname{sn} z$, *b*) $\operatorname{cn}(z + 2K + 2iK') = \operatorname{cn} z$, *c*) $\operatorname{dn}(z + 4iK') = \operatorname{dn} z$.

Solución

Con los problemas 10.39, 10.42, 10.170 y las fórmulas para la adición, se tiene

a) $$\begin{aligned}\operatorname{sn}(z + 2iK') &= \operatorname{sn}(z - 2K + 2K + 2iK')\\ &= \frac{\operatorname{sn}(z - 2K)\operatorname{cn}(2K + 2iK')\operatorname{dn}(2K + 2iK') + \operatorname{sn}(2K + 2iK')\operatorname{cn}(z - 2K)\operatorname{dn}(z - 2K)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(z - 2K)\operatorname{sn}^2(2K + 2iK')}\\ &= \operatorname{sn} z\end{aligned}$$

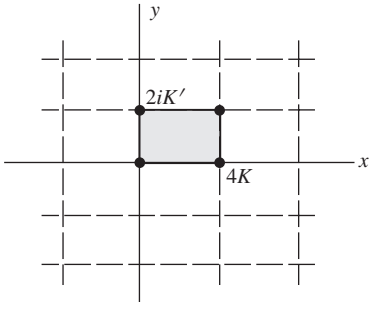
b) $$\operatorname{cn}(z + 2K + 2iK') = \frac{\operatorname{cn} z\operatorname{cn}(2K + 2iK') - \operatorname{sn} z\operatorname{sn}(2K + 2iK')\operatorname{dn} z\operatorname{dn}(2K + 2iK')}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 z\operatorname{sn}^2(2K + 2iK')} = \operatorname{cn} z$$

c) $$\begin{aligned}\operatorname{dn}(z + 4iK') &= \operatorname{dn}(z - 4K + 4K + 4iK')\\ &= \frac{\operatorname{dn}(z - 4K)\operatorname{dn}(4K + 4iK') - k^2\operatorname{sn}(z - 4K)\operatorname{sn}(4K + 4iK')\operatorname{cn}(z - 4K)\operatorname{cn}(4K + 4iK')}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(z - 4K)\operatorname{sn}^2(4K + 4iK')}\\ &= \operatorname{dn} z\end{aligned}$$

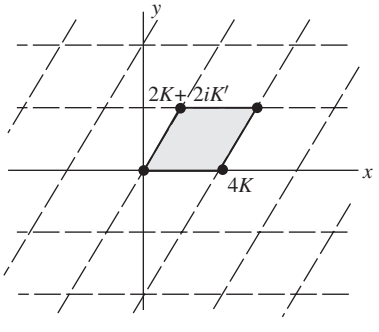
10.44. Trace celdas o paralelogramos periódicos para las funciones *a*) $\operatorname{sn} z$, *b*) $\operatorname{cn} z$, *c*) $\operatorname{dn} z$.

Solución

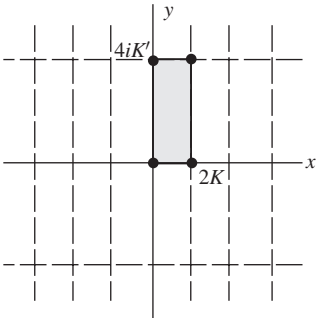
Los resultados se muestran en las figuras 10-12, 10-13 y 10-14, respectivamente.



a)
Figura 10-12



b)
Figura 10-13



c)
Figura 10-14

www.FreeLibros.me

PROBLEMAS DIVERSOS

10.45. Demuestre que $P_n(z) = F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \dfrac{1-z}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Solución

Los polinomios de Legendre $P_n(z)$ son de grado n y tienen el valor 1 para $z = 1$. De manera similar, de acuerdo con la ecuación (10.29), página 328, se ve que

$$F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1-z}{2}\right) = 1 - \frac{n(n+1)}{2}(1-z) + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{16}(1-z)^2 + \cdots$$

es un polinomio de grado n con el valor 1 para $z = 1$.

Si se muestra que P_n y F satisfacen la misma ecuación diferencial se llega al resultado buscado. Para hacerlo, sea $(1-z)/2 = u$, es decir, $z = 1 - 2u$, en la ecuación de Legendre (10.25), página 327, para obtener

$$u(1-u)\frac{d^2Y}{du^2} + (1-2u)\frac{dY}{du} + n(n+1)Y = 0$$

Pero ésta es la ecuación hipergeométrica (10.30), página 328, con $a = -n$, $b = n+1$, $c = 1$ y $u = (1-z)/2$. Por tanto, se demuestra el resultado.

10.46. Demuestre que para $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\Gamma\left(\frac{3}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) = \frac{(2\pi)^{(m-1)/2}}{\sqrt{m}}$$

Solución

Se tiene

$$P = \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right) = \Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)$$

Después, al multiplicar estos productos término a término y con el problema 10.13, página 337, y el problema 1.52, página 32, se encuentra

$$\begin{aligned} P^2 &= \left\{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\right\}\left\{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{m}\right)\right\}\cdots\left\{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\right\} \\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/m)}\cdot\frac{\pi}{\operatorname{sen}(2\pi/m)}\cdots\frac{\pi}{\operatorname{sen}(m-1)\pi/m} \\ &= \frac{\pi^{m-1}}{\operatorname{sen}(\pi/m)\operatorname{sen}(2\pi/m)\cdots\operatorname{sen}(m-1)\pi/m} = \frac{\pi^{m-1}}{m/2^{m-1}} = \frac{(2\pi)^{m-1}}{m} \end{aligned}$$

o $P = (2\pi)^{(m-1)/2}/\sqrt{m}$, como se buscaba.

10.47. Demuestre que, para valores grandes positivos de z,

$$J_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Solución

De acuerdo con el problema 6.33, se tiene

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt - z\ \operatorname{sen}\ t)\,dt = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-int}e^{iz\ \operatorname{sen}\ t}\,dt\right\}$$

www.FreeLibros.me

Sea $F(t) = i \operatorname{sen} t$. Así, $F'(t) = i \cos t = 0$, donde $t = \pi/2$. Si se tiene que $t = \pi/2 + v$, la integral entre corchetes se convierte en

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-in(\pi/2+v)} e^{iz \operatorname{sen}(\pi/2+v)}\, dv = \frac{e^{-in\pi/2}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inv} e^{iz\cos v}\, dv = \frac{e^{-in\pi/2}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inv} e^{iz(1-v^2/2+v^4/24-\cdots)}\, dv$$

$$= \frac{e^{i(z-n\pi/2)}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inv} e^{-izv^2/2+izv^4/24-\cdots}\, dv$$

Sea $v^2 = -2iu^2/z$ o $v = (1-i)u/\sqrt{z}$, es decir, $u = \frac{1}{2}(1+i)\sqrt{z}\, v$. Así, la integral se aproxima mediante

$$\frac{(1-i)e^{i(z-n\pi/2)}}{\pi\sqrt{z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+i)nu/\sqrt{z}} e^{-u^2-iu^4/6z-\cdots}\, du$$

o, para valores grandes positivos de z,

$$\frac{(1-i)e^{i(z-n\pi/2)}}{\pi\sqrt{z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{(1-i)e^{i(z-n\pi/2)}}{\sqrt{\pi z}}$$

y la parte real es

$$\frac{1}{\sqrt{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

También pueden obtenerse términos de orden superior [véase el problema 10.162].

10.48. Sea C el contorno de la figura 10-15. Compruebe que para todos los valores de z

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\oint_C t^{z-1}e^{-t}\, dt$$

Solución

En la figura 10-15 se ve que, a lo largo de AB, $t = x$; a lo largo de BDE, $t = \epsilon e^{i\theta}$, y a lo largo de EF, $t = xe^{2\pi i}$. Así,

$$\int_{ABDEF} t^{z-1}e^{-t}\, dt = \int_R^{\epsilon} x^{z-1}e^{-x}\, dx + \int_0^{2\pi} (\epsilon e^{i\theta})^{z-1} e^{-\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta}\, d\theta + \int_{\epsilon}^{R} x^{z-1} e^{2\pi i(z-1)}\, e^{-x}\, dx$$

$$= (e^{2\pi i z}-1)\int_{\epsilon}^{R} x^{z-1}e^{-x}\, dx + i\int_0^{2\pi} \epsilon^z e^{i\theta z} e^{-\epsilon e^{i\theta}}\, d\theta$$

Ahora, si $\operatorname{Re}\{z\} > 0$, al tomar el límite cuando $\epsilon \to 0$ y $R \to \infty$, se tiene

$$\int_C t^{z-1}e^{-t}\, dt = (e^{2\pi i z}-1)\int_0^{\infty} x^{z-1}e^{-x}\, dx$$

$$= (e^{2\pi i z}-1)\Gamma(z)$$

Pero las funciones en ambos lados son analíticas para toda z. Por tanto, para toda z,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\oint_C t^{z-1}e^{-t}\, dt$$

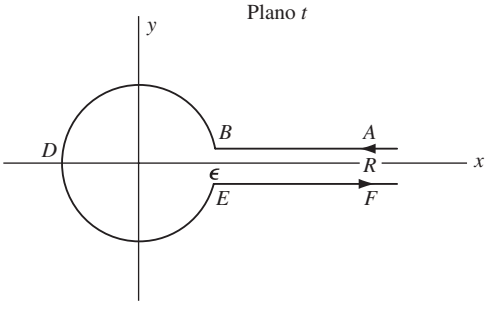


Figura 10-15

www.FreeLibros.me

10.49. Demuestre que $\operatorname{sn}(z_1 + z_2) = \dfrac{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z_2 + \operatorname{cn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{dn} z_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2}$.

Solución

Sea $z_1 + z_2 = \alpha$ una constante. Así, $dz_2/dz_1 = -1$. Defínase $U = \operatorname{sn} z_1$, $V = \operatorname{sn} z_2$. Se sigue que

$$\frac{dU}{dz_1} = \dot{U} = \operatorname{cn} z_1 \operatorname{dn} z_1, \qquad \frac{dV}{dz_1} = \dot{V} = \frac{dV}{dz_2}\frac{dz_2}{dz_1} = -\operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z_2$$

donde los puntos denotan diferenciación respecto de z_1. Así,

$$\dot{U}^2 = (1 - U^2)(1 - k^2U^2) \quad \text{y} \quad \dot{V}^2 = (1 - V^2)(1 - k^2V^2)$$

Al diferenciar y simplificar se encuentra

$$\ddot{U} = 2k^2U^3 - (1 + k^2)U \tag{1}$$

$$\ddot{V} = 2k^2V^3 - (1 + k^2)V \tag{2}$$

Se multiplica (1) por V, (2) por U y se resta para obtener

$$\ddot{U}V - U\ddot{V} = 2k^2UV(U^2 - V^2) \tag{3}$$

Es fácil verificar que

$$\dot{U}^2V^2 - U^2\dot{V}^2 = (1 - k^2U^2V^2)(V^2 - U^2) \tag{4}$$

o

$$\dot{U}V - U\dot{V} = \frac{(1 - k^2U^2V^2)(V^2 - U^2)}{\dot{U}V + U\dot{V}} \tag{5}$$

Se dividen las ecuaciones (3) y (5) y se obtiene

$$\frac{\ddot{U}V - U\ddot{V}}{\dot{U}V - U\dot{V}} = \frac{-2k^2UV(\dot{U}V + U\dot{V})}{1 - k^2U^2V^2} \tag{6}$$

Pero

$$\ddot{U}V - U\ddot{V} = \frac{d}{dz_1}(\dot{U}V - U\dot{V})$$

y

$$-2k^2UV(\dot{U}V + U\dot{V}) = \frac{d}{dz_1}(1 - k^2U^2V^2)$$

de manera que (6) se convierte en

$$\frac{d(\dot{U}V - U\dot{V})}{\dot{U}V - U\dot{V}} = \frac{d(1 - k^2U^2V^2)}{1 - k^2U^2V^2}$$

Al integrar se obtiene $\dfrac{\dot{U}V - U\dot{V}}{1 - k^2U^2V^2} = c$ (una constante), es decir,

$$\frac{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z_2 + \operatorname{cn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{dn} z_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2} = c$$

www.FreeLibros.me

es una solución de la ecuación diferencial. También es claro que $z_1 + z_2 = \alpha$ es una solución. Estas dos soluciones deben relacionarse de la manera siguiente:

$$\frac{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z_2 + \operatorname{cn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{dn} z_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2} = F(z_1 + z_2)$$

Con $z_2 = 0$, se ve que $F(z_1) = \operatorname{sn} z_1$. Así, $F(z_1 + z_2) = \operatorname{sn}(z_1 + z_2)$, con lo que se obtiene el resultado buscado.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

PROLONGACIÓN ANALÍTICA

10.50. *a*) Demuestre que $F_1(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \cdots$ converge para $|z| < 1$.

b) Demuestre que $F_2(z) = \frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{z-i}{1-i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^3 + \cdots$ converge para $|z - i| < \sqrt{2}$.

c) Demuestre que $F_1(z)$ y $F_2(z)$ son prolongaciones analíticas una de otra.

d) ¿Puede hallar una función que represente todas las prolongaciones analíticas posibles de $F_1(z)$? Justifique su respuesta.

10.51. Una función $F(z)$ está representada en $|z - 1| < 2$ por la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{2n}}{2^{2n+1}}$$

Demuestre que, en $z = 5$, el valor de la función es $1/16$.

10.52. *a*) Demuestre que $F_1(z) = \int_0^\infty (1+t)e^{-zt}\,dt$ sólo converge si $\operatorname{Re}\{z\} > 0$.

b) Encuentre una función que sea la prolongación analítica de $F_1(z)$ en el semiplano izquierdo.

10.53. *a*) Encuentre la región de convergencia de $F_1(z) = \int_0^\infty e^{-(z+1)^2 t}\,dt$ y represente gráficamente esta región.

b) Encuentre el valor de la prolongación analítica de $F_1(z)$ correspondiente a $z = 2 - 4i$.

10.54. *a*) Demuestre que $\dfrac{z}{1-z^2} + \dfrac{z^2}{1-z^4} + \dfrac{z^4}{1-z^8} + \cdots = \begin{cases} z/(1-z) & \text{si } |z| < 1 \\ 1/(1-z) & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$

b) Analice estos resultados desde el punto de vista de la prolongación analítica.

10.55. Muestre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3^n}$ no puede prolongarse analíticamente más allá de la circunferencia $|z| = 1$.

10.56. Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\beta_n}$ tiene $|z| = 1$ como frontera natural. ¿Esperaría que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n z^{\beta_n}$ también tuviera $|z| = 1$ como frontera natural? Justifique su conclusión.

10.57. Sea $\{z_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, y suponga que para todo n, $z_n \neq a$. Sean $F(z)$ y $G(z)$ analíticas en a y tales que $F(z_n) = G(z_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Demuestre que $F(z) = G(z)$. *b*) Explique la relación que hay entre el resultado del inciso *a*) y la prolongación analítica. [*Sugerencia:* Considere el desarrollo de $F(z) - G(z)$ en una serie de Taylor en torno a $z = a$.]

PRINCIPIO DE REFLEXIÓN DE SCHWARZ

10.58. Repita el problema 10.2 con el principio de reflexión de Schwarz.

www.FreeLibros.me

10.59. *a*) Como la igualdad sen $2z = 2$ sen z cos z es válida para todos los valores reales de z, demuestre que también es válida para todos los valores complejos de z.

b) ¿Puede emplear el principio de reflexión de Schwarz para demostrar que $\tan 2z = (2 \tan z)/(1 - \tan^2 z)$? Justifique su conclusión.

10.60. ¿Puede aplicarse el principio de reflexión de Schwarz si la reflexión tiene lugar en el eje imaginario y no en el eje real? Demuestre su conclusión.

10.61. ¿Puede extenderse el principio de reflexión de Schwarz para aplicarse a la reflexión respecto de una curva C?

PRODUCTOS INFINITOS

10.62. Investigue la convergencia de los productos infinitos

$$a)\ \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^3}\right),\ b)\ \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right),\ c)\ \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\cos k\pi}{k^2+1}\right)$$

10.63. Demuestre que una condición necesaria para que $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + w_k)$ converja es que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$.

10.64. Investigue la convergencia de *a*) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)$, *b*) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right)$, *c*) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}(1+\cot^{-1} k^2)$.

10.65. Suponga que un producto infinito es absolutamente convergente. Demuestre que es convergente.

10.66. Demuestre que $\displaystyle\cos z = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$.

10.67. Demuestre que $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{e^{-kz}}{k^2}\right)$ *a*) converge absoluta y uniformemente en el semiplano derecho $\mathrm{Re}\{z\} \geq 0$ y *b*) represente una función analítica de z para $\mathrm{Re}\{z\} \geq 0$.

10.68. Demuestre que $\displaystyle\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots = \frac{1}{2}$.

10.69. Demuestre que $\displaystyle\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots = \frac{1}{2}$.

10.70. Demuestre que: *a*) $\displaystyle\operatorname{senh} z = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$, *b*) $\displaystyle\cosh z = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$.

10.71. Con productos infinitos muestre que sen $2z = 2$ sen z cos z. Justifique todos los pasos.

10.72. Demuestre que $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\operatorname{sen}\frac{z}{k}\right)$ *a*) converge absoluta y uniformemente para toda z, *b*) representa una función analítica.

10.73. Demuestre que $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$ converge.

www.FreeLibros.me

LA FUNCIÓN GAMMA

10.74. Evalúe las expresiones siguientes con la función gamma.

a) $\int_0^\infty y^3 e^{-2y}\,dy$, *c*) $\int_0^\infty y^2 e^{-2y^2}\,dy$, *e*) $\int_0^\infty \{ye^{-y^2}\}^{1/4}\,dy$

b) $\int_0^\infty u^{3/2} e^{-3u}\,du$, *d*) $\int_0^1 \{\ln(1/t)\}^{-1/2}\,dt$

10.75. Demuestre que $\Gamma(z) = \int_0^1 \{\ln(1/t)\}^{z-1}\,dt$ para $\mathrm{Re}\{z\} > 0$.

10.76. Demuestre que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(x-1)^p}{x^2}\,dx = \Gamma(1+p)\Gamma(1-p)$, donde $-1 < p < 1$.

10.77. Suponga que m, n y a son constantes positivas. Demuestre que

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}\,dx = \frac{1}{n} a^{-(m+1)/n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

10.78. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{z}}$ si $\mathrm{Re}\{z\} > 0$.

10.79. Resuelva $\int_0^1 (x\ln x)^4\,dx$.

10.80. Resuelva *a*) $\Gamma(-7/2)$, *b*) $\Gamma(-1/3)$.

10.81. Demuestre que $\Gamma\left(-\frac{1}{2} - m\right) = \dfrac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}\,2^{m+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1)}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

10.82. Demuestre que el residuo de $\Gamma(z)$ en $z = -m$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, es $(-1)^m/m!$, donde por definición $0! = 1$.

10.83. Con la representación de la función gamma como producto infinito compruebe que

a) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$, *b*) $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$

10.84. Demuestre que si $y > 0$, entonces $|\Gamma(iy)| = \sqrt{\dfrac{\pi}{y\operatorname{senh}\pi y}}$.

10.85. Analice el problema 10.84 si $y < 0$.

10.86. Demuestre *a*) la propiedad 6, *b*) la propiedad 7 y *c*) la propiedad 9 de las páginas 322 y 323.

10.87. Demuestre que $\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{2}{5}\right) = 4\pi^2/\sqrt{5}$.

10.88. *a*) Con la representación de la función gamma como un producto infinito, compruebe que, para todo entero positivo m,

$$\frac{m^{mz}\Gamma(z)\Gamma(z+1/m)\Gamma(z+2/m)\cdots\Gamma(z+[m-1]/m)}{\Gamma(mz)}$$

es una constante independiente de z.

b) En el resultado del inciso *a*), con $z \to 0$, evalúe la constante y demuestre así la propiedad 5, página 322.

LA FUNCIÓN BETA

10.89. Resuelva *a*) $B(3, 5/2)$, *b*) $B(1/3, 2/3)$.

10.90. Resuelva las expresiones siguientes con la función beta:

a) $\int_0^1 t^{-1/3}(1-t)^{2/3}\,dt$, *b*) $\int_0^1 u^2(1-u^2)^{-1/2}\,du$, *c*) $\int_0^3 (9-t^2)^{3/2}\,dt$, *d*) $\int_0^4 dt/\sqrt{4t-t^2}$.

www.FreeLibros.me

10.91. Demuestre que $\dfrac{B(m+1,\, n)}{B(m,\, n+1)} = \dfrac{m}{n}$.

10.92. Dado $a > 0$, pruebe que $\displaystyle\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^4 - y^4}} = \frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{4a\sqrt{2\pi}}$.

10.93. Demuestre que $\dfrac{B\left(\dfrac{p+1}{2},\, \dfrac{1}{2}\right)}{B\left(\dfrac{p+1}{2},\, \dfrac{p+1}{2}\right)} = 2^p$ y establezca las restricciones necesarias para p.

10.94. Evalúe: *a*) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6\theta \cos^4\theta\, d\theta$, *b*) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$.

10.95. Demuestre que $B(m,\, n) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$, donde $\operatorname{Re}\{m\} > 0$ y $\operatorname{Re}\{n\} > 0$. [*Sugerencia:* Sea $y = x/(1+x)$.]

10.96. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

10.97. *a*) Demuestre que si m o n (pero no ambas) es un entero negativo y si $m + n < 0$, entonces $B(m,\, n)$ es infinito.
b) Investigue $B(m,\, n)$ cuando tanto m como n sean enteros negativos.

ECUACIONES DIFERENCIALES

10.98. Determine los puntos singulares de las ecuaciones diferenciales siguientes e indique si son regulares o irregulares.
a) $(1 - z^2)Y'' - 2Y' + 6Y = 0$, *b*) $(2z^4 - z^5)Y'' + zY' + (z^2 + 1)Y = 0$ y
c) $z^2(1 - z)^2Y'' + (2 - z)Y' + 4z^2Y = 0$

10.99. Mediante series de potencias, resuelva las ecuaciones diferenciales siguientes y encuentre la región de convergencia. Si es posible, sume la serie y muestre que la suma satisface la ecuación diferencial.

a) $Y'' + 2Y' + Y = 0$, *b*) $Y'' + zY = 0$ y *c*) $zY'' + 2Y' + zY = 0$

10.100. *a*) Suponga que resuelve $(1 - z^2)Y'' + 2Y = 0$ mediante sustitución con la solución supuesta $Y = \sum a_n z^n$. ¿Qué región de convergencia esperaría? Explique.

b) Determine si la región de convergencia esperada en el inciso *a*) es correcta, hallando realmente la serie solución.

10.101. *a*) Resuelva $Y'' + z^2Y = 0$ sujeta a $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -1$ y *b*) determine la región de convergencia.

10.102. Suponga que $Y = Y_1(z)$ es una solución de $Y'' + p(z)Y' + q(z)Y = 0$. Demuestre que la solución general es

$$Y = AY_1(z) + BY_1(z)\int \frac{\exp\{-\int p(z)\, dz\}}{\{Y_1(z)\}^2}\, dz$$

10.103. *a*) Resuelva $zY'' + (1 - z)Y' - Y = 0$ y *b*) determine la región de convergencia.

10.104. *a*) Con el problema 10.102 demuestre que la solución de la ecuación diferencial del problema 10.103 se escribe

$$Y = Ae^z + Be^z \int \frac{e^{-z}}{z}\, dz$$

b) Concilie el resultado del inciso *a*) con la serie solución obtenida en el problema 10.103.

10.105. *a*) Resuelva $zY'' + Y' - Y = 0$ y *b*) determine la región de convergencia.

www.FreeLibros.me

10.106. Demuestre que $Y = V\exp\{-\frac{1}{2}\int p(z)\,dz\}$ transforma la ecuación diferencial $Y'' + p(z)Y' + q(z)Y = 0$ en

$$V'' + \left\{q(z) - \tfrac{1}{2}p'(z) - \tfrac{1}{4}[p(z)]^2\right\}V = 0$$

10.107. Con el método del problema 10.106 halle la solución general de $zY'' + 2Y' + zY = 0$ [véase el problema 10.99*c*)].

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE INTEGRALES DE CONTORNO

10.108. Con el método de las integrales de contorno resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $Y'' - Y' - 2Y = 0$, *b*) $Y'' + 4Y' + 4Y = 0$, *c*) $Y'' + 2Y' + 2Y = 0$.

10.109. Demuestre que la solución de $zY'' + (a - z)Y' - bY = 0$, donde $\mathrm{Re}\{a\} > 0$, $\mathrm{Re}\{b\} > 0$, está dada por

$$Y = \int_0^1 e^{zt}t^{b-1}(1-t)^{a-b-1}\,dt$$

FUNCIONES DE BESSEL

10.110. Demuestre que $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

10.111. Demuestre que: *a*) $\dfrac{d}{dz}\{z^n J_n(z)\} = z^n J_{n-1}(z)$, *b*) $\dfrac{d}{dz}\{z^{-n} J_n(z)\} = -z^{-n} J_{n+1}(z)$.

10.112. Muestre que: *a*) $J_0'(z) = -J_1(z)$, *b*) $\int z^3 J_2(z)\,dz = z^3 J_3(z) + c$, *c*) $\int z^3 J_0(z)\,dz = z^3 J_1(z) - 2z^2 J_2(z) + c$.

10.113. Muestre que *a*) $J_{1/2}(z) = \sqrt{2/\pi z}\,\mathrm{sen}\,z$, *b*) $J_{-1/2}(z) = \sqrt{2/\pi z}\cos z$.

10.114. Demuestre el resultado del problema 10.27 para valores no enteros de n.

10.115. Muestre que $J_{3/2}(z)\,\mathrm{sen}\,z - J_{-3/2}\cos z = \sqrt{2/\pi z^3}$.

10.116. Demuestre que $J_n'(z) = \frac{1}{2}\{J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\}$.

10.117. Compruebe que: *a*) $J_n''(z) = \frac{1}{4}\{J_{n-2}(z) - 2J_n(z) + J_{n+2}(z)\}$

b) $J_n'''(z) = \frac{1}{8}\{J_{n-3}(z) - 3J_{n-1}(z) + 3J_{n+1}(z) - J_{n+3}(z)\}$.

10.118. Generalice los resultados de los problemas 10.116 y 10.117.

10.119. Mediante sustitución directa, verifique que $J_0(z) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(z\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$ satisface la ecuación

$$zY'' + Y' + zY = 0$$

10.120. Suponga que $\mathrm{Re}\{z\} > 0$. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-zt}J_0(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$.

10.121. Demuestre que: *a*) $\cos(\alpha\cos\theta) = J_0(\alpha) - 2J_2(\alpha)\cos 2\theta + 2J_4(\alpha)\cos 4\theta + \cdots$

b) $\mathrm{sen}(\alpha\cos\theta) = 2J_1(\alpha)\cos\theta - 2J_3(\alpha)\cos 3\theta + 2J_5(\alpha)\cos 5\theta - \cdots$.

10.122. Suponga que p es un entero. Demuestre que $J_p(x+y) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)J_{p-n}(y)$. [*Sugerencia:* Use la función generatriz.]

10.123. Establezca la propiedad 8, página 326.

www.FreeLibros.me

10.124. Sea $\text{Re}\{z\} > 0$. Demuestre que

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2\pi i} \oint_C e^{(1/2)(t-z^2/t)} t^{-n-1}\, dt$$

donde C es el contorno de la figura 10-5, página 323.

10.125. Sea $\text{Re}\{z\} > 0$. Demuestre que $J_n(z) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(n\phi - z \operatorname{sen} \phi)\, d\phi - \dfrac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-n\phi - z \operatorname{senh} \phi}\, d\phi$.

10.126. *a*) Verifique que $Y_0(z)$, dada por la ecuación 10.23 de la página 326, es una solución de la ecuación de Bessel de orden cero.

b) Verifique que $Y_n(z)$, dada por la ecuación 10.22 de la página 326, es una solución de la ecuación de Bessel de orden n.

10.127. Muestre que: *a*) $zY_{n-1}(z) - 2nY_n(z) + zY_{n+1}(z) = 0$,

$$b)\ \frac{d}{dz}\{z^n Y_n(z)\} = z^n Y_{n-1}(z), \quad c)\ \frac{d}{dz}\{z^{-n} Y_n(z)\} = -z^{-n} Y_{n+1}(z).$$

10.128. Demuestre que $V = \sqrt{z}\{AJ_n(z) + BY_n(z)\}$ es la solución general de

$$V'' + \left\{1 - \frac{(n^2 - 1/4)}{z^2}\right\} V = 0$$

10.129. Demuestre que $J_{n+1}(z)Y_n(z) - J_n(z)Y_{n+1}(z) = 1/z$.

10.130. Muestre que la solución general de $V'' + 2^{m-2}V = 0$ es

$$V = \sqrt{z}\left\{AJ_{1/m}\left(\frac{2}{m}z^{m/2}\right) + BY_{1/m}\left(\frac{2}{m}z^{m/2}\right)\right\}$$

10.131. *a*) Demuestre que la solución general de la ecuación de Bessel $z^2Y'' + zY' + (z^2 - n^2)Y = 0$ es

$$Y = AJ_n(z) + BJ_n(z)\int \frac{dz}{zJ_n^2(z)}$$

b) Concilie este resultado con el de la ecuación (10.24), página 327.

FUNCIÓN DE LEGENDRE

10.132. Obtenga los polinomios de Legendre *a*) $P_3(z)$, *b*) $P_4(z)$, *c*) $P_5(z)$.

10.133. Demuestre *a*) $P'_{n+1}(z) - P'_{n-1}(z) = (2n+1)P_n(z)$ y *b*) $(n+1)P_n(z) = P'_{n+1}(z) - zP'_n(z)$.

10.134. Demuestre que $nP'_{n+1}(z) - (2n+1)zP'_n(z) + (n+1)P'_{n-1}(z) = 0$.

10.135. Demuestre que *a*) $P_n(-1) = (-1)^n$ y *b*) $P_{2n+1}(0) = 0$.

10.136. Demuestre que $P_{2n}(0) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{5}{2}\right)\cdots\left(\dfrac{2n-1}{2}\right) = (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$.

10.137. Verifique la propiedad 2, página 327.

10.138. Si $[n/2]$ denota el mayor entero $\le n/2$, demuestre que $P_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} z^{n-2k}$.

10.139. Demuestre que la solución general de la ecuación de Legendre $(1 - z^2)Y'' - 2zY' + n(n+1)Y = 0$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ es $Y = AP_n(z) + BQ_n(z)$, donde $Q_n(z) = P_n(z)\int_z^{\infty} dt/(t^2 - 1)\{P_n(t)\}^2$.

10.140. Con el problema 10.139 halle la solución general de la ecuación diferencial $(1 - z^2)Y'' - 2zY' + 2Y = 0$.

www.FreeLibros.me

FUNCIÓN ZETA

10.141. Sea $\mathrm{Re}\{z\} > 0$. Demuestre que $\zeta(z) = \dfrac{1}{1^z} + \dfrac{1}{2^z} + \dfrac{1}{3^z} + \cdots = \dfrac{1}{\Gamma(z)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{z-1}\,dt}{e^t - 1}$.

10.142. Demuestre que $\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{7^2}\right)\cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$, donde 2, 3, 5, 7, ... son números primos.

10.143. Pruebe que la única singularidad de $\zeta(z)$ es un polo simple en $z = 1$ cuyo residuo es igual a 1.

10.144. Con la prolongación analítica de $\zeta(z)$ dada por la ecuación (10.33), página 328, demuestre que

a) $\zeta(-1) = -1/12$, *b)* $\zeta(-3) = 1/120$.

10.145. Muestre que si en la ecuación (10.33), página 328, se sustituye z por $1 - z$, la ecuación permanece igual.

FUNCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

10.146. Demuestre que: *a)* $\ln(1 + z) = zF(1, 1; 2; -z)$ y *b)* $\dfrac{\tan^{-1} z}{z} = F(1/2, 1; 3/2; -z^2)$.

10.147. Demuestre que $\cos 2az = F(a, -a; 1/2; \mathrm{sen}^2\, z)$.

10.148. Demuestre que $\dfrac{d}{dz}F(a, b; c; z) = \dfrac{ab}{c}F(a + 1, b + 1; c + 1; z)$.

10.149. Suponga que $\mathrm{Re}\{c - a - b\} > 0$ y $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. Demuestre que

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}$$

10.150. Pruebe la ecuación (10.31), página 328.

10.151. Demuestre que: *a)* $F(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b}F(c - a, c - b; c; z)$
b) $F(a, b; c; z) = (1 - z)^{-a}F(a, c - b; c; z/[z - 1])$.

10.152. Demuestre que para $|z - 1| < 1$, la ecuación $z(1 - z)Y'' + \{c - (a + b + 1)z\}Y' - abY = 0$ tiene la solución $F(a, b; a + b - c + 1; 1 - z)$.

DESARROLLO ASINTÓTICO Y MÉTODO DEL PUNTO SILLA

10.153. Demuestre que

$$\int_p^\infty e^{-zt^2}\,dt = \frac{e^{-zp^2}}{2pz}\left\{1 - \frac{1}{2p^2z} + \frac{1\cdot 3}{(2p^2z)^2} - \cdots (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2p^2z)^n}\right\}$$

$$\times (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{(2z)^{n+1}}\int_p^\infty \frac{e^{-zt^2}}{t^{2n+2}}\,dt$$

y obtenga así un desarrollo asintótico para la integral del lado izquierdo.

10.154. Con el problema (10.153) verifique el resultado (10.48) de la página 331.

10.155. Evalúe 50!

10.156. Demuestre que, para valores grandes de n, $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

10.157. Obtenga los desarrollos asintóticos:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-zt^2}}{1 + t^2}\,dt \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{z}}\left\{1 - \frac{1}{2z} + \frac{1\cdot 3}{(2z)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2z)^3} + \cdots\right\}$

www.FreeLibros.me

$b)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t}\,dt \sim \frac{1}{z} - \frac{1!}{z^2} + \frac{2!}{z^3} - \frac{3!}{z^4} + \cdots$

10.158. Verifique el desarrollo asintótico (10.49) de la página 331.

10.159. Con series asintóticas evalúe $\displaystyle\int_{10}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

10.160. En las condiciones adecuadas para $F(t)$, pruebe que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-zt}F(t)\,dt \sim \frac{F(0)}{z} + \frac{F'(0)}{z^2} + \frac{F''(0)}{z^3} + \cdots$

10.161. Dé los pasos necesarios para pasar de (4) a (5) en el problema 10.36.

10.162. Demuestre el desarrollo asintótico (10.46), página 331, para la función de Bessel.

10.163. Sean $F(z) \sim \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{z^n}$ y $G(z) \sim \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{b_n}{z^n}$. Demuestre que:

$a)\ F(z) + G(z) \sim \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n + b_n}{z^n}, \quad b)\ F(z)G(z) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{z^n}$ donde $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

10.164. Sea $F(z) \sim \displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{a_n}{z^n}$. Demuestre que $\displaystyle\int_z^\infty F(z)\,dz \sim \sum_{n=2}^\infty \frac{a_n}{(n-1)z^{n-1}}$.

10.165. Muestre que, para valores grandes de z, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^z} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{\frac{1}{z^{1/2}} + \frac{3}{8z^{3/2}} + \frac{25}{128z^{5/2}} + \cdots\right\}$.

FUNCIONES ELÍPTICAS

10.166. Suponga que $0 < k < 1$. Demuestre que

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right\}$$

10.167. Demuestre: $a)\ \operatorname{sn} 2z = \dfrac{2\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 z}$ y $b)\ \operatorname{cn} 2z = \dfrac{1 - 2\operatorname{sn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^4 z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 z}$.

10.168. Si $k = \sqrt{3}/2$, demuestre que: $a)\ \operatorname{sn}(K/2) = \sqrt{2/3}$, $b)\ \operatorname{cn}(K/2) = \sqrt{1/3}$ y $c)\ \operatorname{dn}(K/2) = \sqrt{1/2}$.

10.169. Demuestre que $\dfrac{\operatorname{sn} A + \operatorname{sn} B}{\operatorname{cn} A + \operatorname{cn} B} = \operatorname{tn} \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{dn} \frac{1}{2}(A-B)$.

10.170. Demuestre que: $a)\ \operatorname{sn}(4K + 4iK') = 0$, $b)\ \operatorname{cn}(4K + 4iK') = 1$ $c)\ \operatorname{dn}(4K + 4iK') = 1$.

10.171. Demuestre: $a)\ \operatorname{sn} z = z - \frac{1}{6}(1+k^2)z^3 + \frac{1}{120}(1 + 14k + k^4)z^5 + \cdots$,

$b)\ \operatorname{cn} z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}(1+4k^2)z^4 + \cdots$ y $c)\ \operatorname{dn} z = 1 - \frac{1}{2}k^2 z^2 + \frac{1}{24}k^2(k^2+4)z^4 + \cdots$

10.172. Demuestre que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^4 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

10.173. Con la integración de contorno demuestre los resultados del problema 10.40*b*) y *c*).

www.FreeLibros.me

10.174. *a*) Demuestre que

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} = \frac{2}{1+k} \int_0^{\phi_1} \frac{d\phi_1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \phi_1}}$$

donde $k_1 = 2\sqrt{k}/(1+k)$ mediante la *transformación de Landen*, $\tan \phi = (\operatorname{sen} 2\phi_1)/(k + \cos 2\phi_1)$.

b) Si $0 < k < 1$, compruebe que $k < k_1 < 1$.

c) Demuestre que, mediante aplicaciones sucesivas de la transformación de Landen, se obtiene una sucesión de módulos k_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, tal que $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$. Por tanto, demuestre que si $\Phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n$,

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3 \ldots}{k}} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)$$

d) Explique cómo puede usarse el resultado del inciso *c*) en la evaluación de integrales elípticas.

10.175. ¿Es $\operatorname{tn} z = (\operatorname{sn} z)/(\operatorname{cn} z)$ una función doblemente periódica? Explique.

10.176. Obtenga las fórmulas para la adición para *a*) $\operatorname{cn}(z_1 + z_2)$ y *b*) $\operatorname{dn}(z_1 + z_2)$ dadas en la página 332.

PROBLEMAS DIVERSOS

10.177. Sea $|p| < 1$. Muestre que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan^p \theta \, d\theta = \frac{1}{2}\pi \sec(p\pi/2)$.

10.178. Sea $0 < n < 2$. Muestre que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^n} dt = \frac{\pi \csc(n\pi/2)}{2\Gamma(n)}$.

10.179. Sea $0 < n < 1$. Muestre que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t^n} dt = \frac{\pi \sec(n\pi/2)}{2\Gamma(n)}$.

10.180. Demuestre que la solución general de $(1 - z^2)Y'' - 4zY' + 10Y = 0$ está dada por

$$Y = AF(5/2,\ -1;\ 1/2;\ z^2) + BzF(3,\ -1/2;\ 3/2;\ z^2)$$

10.181. Muestre que: *a*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sen} t^3 \, dt = \frac{1}{6}\Gamma(1/3)$, *b*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos t^3 \, dt = \frac{\sqrt{3}}{6}\Gamma(1/3)$.

10.182. *a*) Encuentre una solución de $zY'' + Y' + zY = 0$ que sea de la forma $(\ln z)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)$ y verifique así la ecuación (10.23) de la página 326. *b*) ¿Cuál es la solución general?

10.183. Con el método del problema 10.182 halle la solución general de $z^2Y'' + zY' + (z^2 - n^2)Y = 0$. [Véase la ecuación (10.22), página 326.]

10.184. Demuestre que la solución general de $zU'' + (2m+1)U' + zU = 0$ es $U = z^{-m}\{AJ_m(z) + BY_m(z)\}$.

10.185. *a*) Demuestre que $z^{1/2}J_1(2iz^{1/2})$ es una solución de $zU'' - U = 0$. *b*) ¿Cuál es la solución general?

10.186. Demuestre que $\{J_0(z)\}^2 + 2\{J_1(z)\}^2 + 2\{J_2(z)\}^2 + \cdots = 1$.

10.187. Demuestre que $e^{z\cos\alpha} J_0(z \operatorname{sen} \alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos\alpha)}{n!} z^n$.

10.188. Demuestre que $\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}(\gamma + 2\ln 2)$.

10.189. *a*) Demuestre que $\displaystyle\int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\gamma - \ln z + z - \frac{z^2}{2 \cdot 2!} + \frac{z^3}{3 \cdot 3!} - \cdots$.

b) ¿Es adecuado el resultado del inciso *a*) para hallar el valor de $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$? Explique. [Compare con el problema 10.159.]

www.FreeLibros.me

10.190. Sea m un entero positivo. Demuestre que $F\left(\frac{1}{2},\ -m;\ \frac{1}{2}-m;\ 1\right) = \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}$.

10.191. Demuestre que $(1+z)\left(1-\dfrac{z}{2}\right)\left(1+\dfrac{z}{8}\right)\left(1-\dfrac{z}{4}\right)\cdots = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\dfrac{1+z}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{2-z}{2}\right)}$.

10.192. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi}} = \frac{\pi}{2}F\left(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2};\ 1;\ k^2\right)$.

10.193. Las *funciones asociadas de Legendre* se definen como $P_n^{(m)}(z) = (1-z^2)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z)$.

a) Determine $P_3^{(2)}(z)$.

b) Demuestre que $P_n^{(m)}(z)$ satisface la ecuación diferencial

$$(1-z^2)Y'' - 2zY' + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right\}Y = 0$$

c) Demuestre que $\int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(z)P_l^{(m)}(z)\,dz = 0$ si $n \neq 1$.

Esto se conoce como *propiedad de ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre.*

10.194. Suponga que m, n y r son constantes positivas. Demuestre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(x+r)^{m+n}}\,dx = \frac{B(m,\ n)}{r^m(1+r)^{m+n}}$.

[*Sugerencia:* Sea $x = (r+1)y/(r+y)$.]

10.195. Demuestre que, si m, n, a y b son constantes positivas,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta}{(a\operatorname{sen}^2\theta + b\cos^2\theta)^{m+n}} = \frac{B(m,\ n)}{2a^n b^m}$$

[*Sugerencia:* En el problema 10.194, sea $x = \operatorname{sen}^2\theta$ y elija r de manera adecuada.]

10.196. Demuestre que: *a*) $z/2 = J_1(z) + 3J_3(z) + 5J_5(z) + \cdots$ y *b*) $z^2/8 = 1^2J_2(z) + 2^2J_4(z) + 3^2J_6(z) + \cdots$

10.197. Sea m un entero positivo. Demuestre que: *a*) $P_{2m}(z) = \dfrac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}F\left(-m,\ m+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right)$

b) $P_{2m+1}(z) = \dfrac{(-1)^m(2m+1)!}{2^{2m}(m!)^2}zF\left(-m,\ m+\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ z^2\right)$.

10.198. *a*) Demuestre que $1/(\operatorname{sn} z)$ tiene un polo simple en $z = 0$ y *b*) encuentre el residuo en este polo.

10.199. Demuestre que $\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2 = 8\sqrt{\pi}\,\dfrac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16\cdot 18\cdots}{5\cdot 5\cdot 9\cdot 9\cdot 13\cdot 13\cdot 17\cdot 17\cdots}$.

10.200. Sea $|z| < 1$. Pruebe la *identidad de Euler*: $(1+z)(1+z^2)(1+z^3)\cdots = \dfrac{1}{(1-z)(1-z^3)(1-z^5)\cdots}$.

10.201. Sea $|z| < 1$. Demuestre que $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\{z^{n(3n-1)/2} + z^{n(3n+1)/2}\}$.

10.202. *a*) Demuestre que la serie siguiente converge para $|z| < 1$ y para $|z| > 1$:

$$\frac{z}{1+z} + \frac{z^2}{(1+z)(1+z^2)} + \frac{z^4}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)} + \cdots$$

b) Demuestre que en cada región esta serie representa una función analítica, por ejemplo, $F_1(z)$ y $F_2(z)$, respectivamente.

c) ¿Son $F_1(z)$ y $F_2(z)$ prolongación analítica una de otra? ¿Es $F_1(z) = F_2(z)$ en forma idéntica? Justifique sus respuestas.

www.FreeLibros.me

10.203. *a*) Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en todos los puntos de la región $|z| \leq 1$.

b) Demuestre que la función representada por todas las prolongaciones analíticas de la serie del inciso *a*) tiene una singularidad en $z = 1$, y concilie esto con el resultado del inciso *a*).

10.204. Sea $\sum a_n z^n$ una serie con un círculo de convergencia C y sea $F(z)$ la función representada por todas las prolongaciones analíticas de esta serie. Demuestre que $F(z)$ tiene al menos una singularidad en C.

10.205. Demuestre que $\dfrac{\operatorname{cn} 2z + \operatorname{dn} 2z}{1 + \operatorname{cn} 2z} = \operatorname{dn}^2 z$.

10.206. Demuestre que una función que no es idénticamente constante no puede tener dos periodos cuyos radios sean un número irracional.

10.207. Demuestre que una función que no es idénticamente constante no puede tener tres o más periodos independientes.

10.208. *a*) Si una función doblemente periódica es analítica en todas partes de una celda [paralelogramo periódico], demuestre que debe ser una constante. *b*) Deduzca que una función doblemente periódica, no idénticamente constante, tiene al menos una singularidad en una celda.

10.209. Sea $F(z)$ una función doblemente periódica. *a*) Suponga que C es la frontera de su paralelogramo periódico. Verifique que $\oint_C F(z)\,dz = 0$. *b*) Demuestre que el número de polos en el interior de un paralelogramo periódico es igual al número de ceros, con la debida atención a sus multiplicidades.

10.210. Demuestre que las funciones elípticas jacobianas sn z, cn z y dn z *a*) tienen exactamente dos ceros y dos polos en cada celda y *b*) cada función toma un valor dado exactamente dos veces en cada celda.

10.211. Demuestre que $\left(1 + \frac{1}{1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{4^2}\right)\left(1 + \frac{1}{7^2}\right)\cdots = \dfrac{\{\Gamma(1/3)\}^2}{\left\{\Gamma\left(\frac{1+i}{3}\right)\right\}^2 \left\{\Gamma\left(\frac{1-i}{3}\right)\right\}^2}$.

10.212. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-z\tan\theta}\,d\theta \sim \frac{1}{2} - \frac{2!}{z^3} + \frac{4!}{z^5} - \frac{6!}{z^7} + \cdots$.

10.213. Demuestre que
$$P_n(\cos\theta) = 2\left\{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right\}\left\{\cos n\theta + \frac{1\cdot 2n}{2\cdot(2n-1)}\cos(n-2)\theta + \frac{1\cdot 3\cdot 2n(2n-2)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta + \cdots\right\}$$
[*Sugerencia:* $1 - 2t\cos\theta + t^2 = (1 - te^{i\theta})(1 - te^{-i\theta})$.]

10.214. *a*) Demuestre que $\Gamma(z)$ es una función meromórfica y *b*) determine la parte principal en cada uno de sus polos.

10.215. Sea $\operatorname{Re}\{n\} > -1/2$. Demuestre que
$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^n\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{n-1/2}\,dt = \frac{z^n}{2^n\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\cos(z\cos\theta)\operatorname{sen}^{2n}\theta\,d\theta$$

10.216. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\infty} t^n J_m(t)\,dt = \frac{2^n\Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-n+1}{2}\right)}$.

10.217. Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^p\theta\cos q\theta\,d\theta = \frac{\pi\Gamma(p+1)}{2^{p+1}\Gamma\left(\frac{2+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+p-q}{2}\right)}$.

www.FreeLibros.me

10.218. Demuestre que $\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2 = 4\sqrt{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta}}$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

10.50. *d*) $-\ln(1-z)$

10.52. *b*) $(z+1)/z^2$

10.53. *a*) $\operatorname{Re}\{z+1\}^2 > 0$, *b*) $(-7+24i)/625$

10.62. *a*) conv., *b*) div., *c*) conv.

10.64. *a*) div., *b*) div., *c*) conv.

10.74. *a*) $3/8$, *b*) $\sqrt{3\pi}/36$, *c*) $\sqrt{2\pi}/16$, *d*) $\sqrt{\pi}$, *e*) $\Gamma(5/8)/\sqrt[4]{2}$

10.79. $24/3\ 125$

10.80. *a*) $16\sqrt{\pi}/105$, *b*) $-3\Gamma(2/3)$

10.89. *a*) $16/315$, *b*) $2\pi\sqrt{3}$

10.90. *a*) $4\pi/3\sqrt{3}$, *b*) $\pi/4$, *c*) $243\pi/16$, *d*) π

10.94. *a*) $3\pi/512$, *b*) $\pi/\sqrt{2}$

10.98. *a*) $z = \pm 1$, regular. *b*) $z = 2$, regular; $z = 0$, irregular. *c*) $z = 0, 1$, irregular.

10.99. *a*) $Y = Ae^{-z} + Bze^{-z}$,

b) $Y = A\left(1 - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{1\cdot 4}{6!}z^6 - \dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}z^9 + \cdots\right) + B\left(z - \dfrac{2z^4}{4!} + \dfrac{2\cdot 5}{7!}z^7 - \dfrac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}z^{10} + \cdots\right)$

c) $Y = \dfrac{A\operatorname{sen} z + B\cos z}{z}$

10.100. *b*) $Y = A(1-z^2) + B\left(z - \dfrac{z^3}{1\cdot 3} - \dfrac{z^5}{3\cdot 5} - \dfrac{z^7}{5\cdot 7} - \cdots\right)$

10.101. *a*) $Y = 1 - z - \dfrac{z^4}{3\cdot 4} + \dfrac{z^5}{4\cdot 5} + \dfrac{z^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \dfrac{z^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \cdots$, *b*) $|z| < \infty$

10.103. *a*) $Y = (A + B\ln z)e^z - B\left\{z + \dfrac{z^2}{2!}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \dfrac{z^3}{3!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \cdots\right\}$, *b*) $|z| > 0$

10.105. *a*) $Y = (A + B\ln z)\left\{\dfrac{z}{(1!)^2} + \dfrac{z^2}{(2!)^2} + \dfrac{z^3}{(3!)^2} + \cdots\right\} - 2B\left\{\dfrac{z}{(1!)^2} + \dfrac{z^2}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \dfrac{z^3}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \cdots\right\}$

10.108. *a*) $Y = Ae^{2z} + Be^{-z}$, *b*) $Y = Ae^{-2z} + Bze^{-2z}$, *c*) $Y = e^{-z}(A\operatorname{sen} z + B\cos z)$

10.132. *a*) $\frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$, $\frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3)$, *c*) $\frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z)$

10.140. $Y = Az + B\left\{1 + (1/2)z\ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)\right\}$

10.155. 3.04×10^{64}

10.185. *b*) $Y = z^{1/2}\left\{AJ_1(2iz^{1/2}) + BY_1(2iz^{1/2})\right\}$

10.193. *a*) $15z(1-z^2)$

10.198. 1

www.FreeLibros.me

ÍNDICE

A
Aceleración, 84
  centrípeta, 100
Adición, 1
Aerodinámica, 282
Amplitud, 4
Aplicación *véase* transformación
Aplicación isogonal, 243
Arco *véase* curva continua
Arco suave *véase* curva suave
Arco seno *véase* seno inverso
Argumento, 4

B
Base de los logaritmos naturales, 43

C
Campo, 3
Capacitancia, 289
Capacitor, 289
Celda unitaria, 332
Cero, 1
  de orden *n*, 81
  simple, 81
Ceros, 5
Cerradura de un conjunto, 8
Circulación, 283
Círculo de convergencia, 171, 180
Círculo unitario, 6, 243
Cociente cruzado, 245, 261
Complejo conjugado, 2
Complemento de un conjunto, 8
Condensador, 289
Condiciones frontera, 280
Conductividad térmica, 289
Conductor perfecto, 289
Conjugado, 2
Conjunto abierto, 8
Conjunto acotado, 8
Conjunto adecuado, 8
Conjunto bidimensional, 7
Conjunto cerrado, 8
Conjunto compacto, 8
Conjunto conexo, 8
Conjunto contable, 8
Conjunto no acotado, 8
Conjunto no contable, 8
Conjunto no numerable *véase* conjunto no contable
Conjunto numerable *véase* conjunto contable
Conjunto ortogonal, 345
Conjunto vacío, 8
Conjuntos disyuntos, 8
Conjuntos mutuamente excluyentes *véase* conjuntos disyuntos
Constante de Euler, 322
Constante dieléctrica, 287
Continuación analítica, 176, 190-191
Continuidad, 47
Continuidad en una región, 47
Continuidad uniforme, 48
Contorno *véase* curva suave a trozos
Convergencia, 49, 169, 194, 320
  a cero, 320
  absoluta, 170, 171, 179, 183, 195, 320
  condicional, 170, 320
  uniforme, 170, 320
Coordenadas
  conjugadas complejas, 7
  curvas, 43
  curvilíneas, 42
  polares, 4
  rectangulares, 3
Corte de ramificación *véase* línea de ramificación
Cota superior, 112
Criterio de convergencia de Cauchy, 171
Criterio de Gauss, 172
Criterio de la comparación, 171
Criterio de la integral, 172
Criterio de la raíz *n*-ésima, 172
Criterio de la serie alternante, 172
Criterio de Raabe, 172
Criterio del cociente, 172
Criterio *M* de Weierstrass, 172, 181
Cubierta de un conjunto, 8
Curva
  cerrada simple, 83
  continua, 83
  de Jordan, 114
  rectificable, 111
  suave, 83
  suave a trozos, 83

www.FreeLibros.me

Curvas de flujo, 284
Curvas equipotenciales, 284

D
Denominador, 1
Derivada, 77
Desarrollo asintótico, 363-364
Desarrollos de Lagrange, 176, 190
Desigualdad de Schwarz, 39
Desigualdad de Cauchy, 145, 151
Diagrama de Argand *véase* plano complejo
Diferenciabilidad, 77
Diferencial, 79
Dinámica de fluidos, 282
Dipolo, 285
Dirección, 6, 83
Disco unitario, 243
Discontinuidad removible, 47, 65
Discontinuidades, 47
Divergencia, 84
División, 1, 2
Doblete *véase* dipolo
Dominio *véase* región abierta

E
Ecuación
  biarmónica, 316
  característica, 324, 341
  de continuidad, 283
  de Laplace, 78, 280
  diferencial de Bessel, 325-326, 341, 362
  diferencial de Gauss, 328
  diferencial de Legendre, 327
  hipergeométrica, 328
  lineal diferencial, 323
Ecuaciones
  de Cauchy-Riemann, 27, 77, 87, 102, 142, 296
  de transformación, 242
  diferenciales, 341, 360
  diferenciales parciales, 280
  paramétricas, 14
Eje imaginario, 4
Eje real, 1, 4
Elemento, 7
Elementos, 319
Elongación, 245, 257
Enteros negativos, 1
Enteros positivos, 1
Esfera de Riemann, 7
Estado estable, 289
Estiramiento, 245
Expansión
  asintótica, 347
  de Taylor *véase* serie de Taylor
  de Laurent *véase* serie de Laurent
  analítica *véase* continuación analítica

F
Factor de aumento lineal, 243
Factor de magnificación, 243, 259
Familias ortogonales, 82
Fluido ideal, 283
Flujo de calor, 289
Flujo irrotacional, 283
Flujo libre de circulación, 283
Flujo uniforme, 284
Flujo vórtice, 300
Forma estándar, 14
Forma factorizada, 6
Forma simétrica, 14
Forma polar, 4
Fórmula
  asintótica de Stirling, 330, 331
  de Euler, 5
  de recursión, 322, 326
  de Rodrigues, 193, 327
  de Schlaefli, 193
  del binomio *véase* teorema del binomio
Fórmulas
  de adición, 332
  integrales de Cauchy, 145, 146, 150, 334
  integrales de Poisson para un círculo, 145-146, 157, 281
  integrales de Poisson para un semiplano, 146, 158, 281
Fracciones, 1
Frontera natural, 177, 191, 319
Fuentes, 284
Fuerza, 285
Función
  algebraica, 45
  analítica, 77, 87, 88, 98, 105, 109, 115, 131, 142, 149, 160, 161, 282, 290, 291, 311, 319, 330, 333, 347
  beta, 323, 359-360
  continua, 47
  de aplicación, 50
  de Bessel, 193, 325, 331, 361, 364
  de flujo, 284
  de Neumann, 326
  de potencial de velocidad, 284
  de transformación, 42
  del error, 331
  elíptica jacobiana, 332
  entera, 176, 321
  factorial, 322
  gamma, 321-322, 330, 359
  generatriz, 325
  hipergeométrica, 328, 346, 363
  integral, 176

www.FreeLibros.me

inyectiva, 242
lacunary, 177
meromórfica, 176, 367
multivaluada, 41
Pi de Gauss, 322
trascendente, 45
unívoca, 41
uno a uno *véase* función inyectiva
zeta, 328, 347, 363
Funciones
algebraicas racionales, 43
armónicas, 78, 88, 104, 142, 160, 163, 167, 280, 288, 290, 311
asociadas de Legendre, 366
circulares *véase* funciones trigonométricas
conjugadas, 77, 109, 163, 280
de Legendre, 328, 345, 362, 366
doblemente periódicas, 332
elementales, 45
hiperbólicas, 44
hiperbólicas inversas, 45
impares, 55
inversas, 41
logarítmicas, 44
pares, 55
polinómicas, 43
trigonométricas, 43
trigonométricas inversas, 44

G
Gradiente, 84
Grado, 5, 43

H
Hidrodinámica, 282

I
Identidad de Euler, 366
Identidad respecto de la multiplicación, 3
Identidad respecto de la suma, 3
Imagen, 42, 314
Imágenes, 242
Independencia lineal, 324
Integral
compleja de línea *véase* integral de línea
de contorno, 114, 361
de línea, 112
definida, 112, 131
elíptica del primer tipo, 331
elíptica del segundo tipo, 332
elíptica del tercer tipo, 332
exponencial, 331
real de línea, 112
Intensidad de campo eléctrico, 287
Intersección de conjuntos, 8
Intervalo abierto, 2
Intervalo cerrado, 2
Invariantes *véase* puntos fijos
Inversa de la adición, 1
Inversa de la multiplicación, 1
Inversión, 245
Inverso del punto z, 157
Inverso respecto de la suma, 3
Inverso respecto de la multiplicación, 3

J
Jacobiano de la transformación, 242

L
Lemniscata, 37
Ley asociativa de la multiplicación, 3, 8
Ley asociativa de la suma, 3, 8
Ley conmutativa de la multiplicación, 3, 8
Ley conmutativa de la suma, 3, 8
Ley de cerradura, 3
Ley de Coulomb, 287
Ley del paralelogramo, 6
Ley distributiva, 3, 8
Límite, 46, 169
Línea de ramificación, 46, 53
Líneas de flujo, 284, 288, 290
Líneas equipotenciales, 284, 288
Líneas isotérmicas, 290
Longitud, 112
Logaritmo natural, 43, 44
Longitud, 6

M
Magnitud, 6
Método de la fase estacionaria, 330
Método de Laplace, 330
Método del punto silla, 330, 347
Miembro *véase* elemento
Modelo matemático, 282
Módulo, 2, 3, 4, 332
Momento dipolo, 285
Movimiento armónico simple, 100
Multiplicación, 1, 2

N
Nabla, 84
Nabla barra, 84
Numerador, 1
Número(s)
algebraico, 30
complejos, 2
de Bernoulli, 203, 329
imaginario puro, 2

www.FreeLibros.me

irracionales, 1
naturales, 1
racionales, 1
reales, 1
trascendentes, 30

O
Operador laplaciano, 85
Origen, 1

P
Paralelogramos periódicos, 332
Parte imaginaria, 2
Parte real, 2
Perfiles de Joukowski, 271
Plano complejo, 4
Plano complejo completo, 7
Plano complejo extendido *véase* plano complejo completo
Plano *z* *véase* plano complejo
Plano *z* entero *véase* plano complejo completo
Polinomios de Legendre, 193-194, 327, 345, 354
Polo de orden *n*, 81, 175, 188, 189
Polo doble *véase* polo de orden *n*
Polo norte, 6
Polo simple *véase* polo de orden *n*
Polo sur, 6
Potencial complejo, 283, 288, 295-300
Potencial de velocidad, 282, 284
Potencial electrostático, 287, 288
Principio de ortogonalidad, 345
Principio de reflexión de Schwarz, 320, 335, 357-358
Problema de Dirichlet, 280, 292-294, 309, 311
Problema de Neumann, 281, 292, 311, 314
Problema de valor frontera, 280
Producto, 1
Producto cruz, 7
Producto escalar *véase* producto punto
Producto punto, 7
Productos infinitos, 320, 336, 358
Prolongación analítica, 334, 338
Propiedad de cerradura, 1
Propiedad de ortogonalidad, 366
Proyección estereográfica, 7
Punto(s)
al infinito, 47, 57
críticos, 243
de acumulación *véase* punto límite
de agrupación *véase* punto límite
de estancamiento, 283
de ramificación, 46, 53, 81, 175, 319
exterior, 8
fijos, 70, 244
final, 6
frontera, 8
imagen, 50
inicial, 6
interior, 8
invariantes *véase* puntos fijos
límite, 8
ordinario, 81, 323
silla, 330
singular, 81, 105, 323
singular aislado *véase* singularidad aislada
singular irregular, 324
singular regular, 324
z, 4

R
Radio de convergencia, 171, 180
Raíces de la ecuación, 5
Raíces *n*-ésimas de la unidad, 6
Raíz *n*-ésima, 5
Rama de la función, 41
Rama principal, 41, 44, 53, 57
Rango principal, 4, 53
Reales, 1
Recíproco del teorema de Cauchy, 115
Región, 8
Región abierta, 8
Región cerrada, 8
Región de convergencia, 169
Región simplemente conexa, 113
Región múltiplemente conexa, 113
Regla de la cadena, 79
Regla de L'Hopital, 81
Regla de Leibnitz, 149, 208
Representación de Schlaefli *véase* fórmula de Schlaefli
Residuo, 205, 210
Resta, 2
Rotación, 244
Rotor, 85

S
Seno hiperbólico inverso, 45
Seno inverso, 44
Sentido *véase* dirección
Serie
asintótica, 329
de Fourier, 201
de Laurent, 174, 189, 190
de Maclaurin, 173
de potencias, 170
de Taylor, 173, 190
divergente, 49, 169
infinita, 169
hipergeométrica, 200
p, 179

www.FreeLibros.me

Símbolo ficticio *véase* variable ficticia
Singularidad(es), 81, 198, 319
aislada, 81, 98
al infinito, 82, 175
esencial(es), 82, 98, 175, 188
no aislada, 98
no esenciales, 82
removible(s), 82, 174, 189
Sucesión, 48
acotada, 48
convergente, 49, 169
de funciones, 169
divergente, 49, 169
monótona creciente, 171
monótona decreciente, 171
Subconjunto, 1, 8
Suma, 1, 2
Suma parcial, 49, 169
Sumideros, 284
Superficie de Riemann, 46
Sustracción, 1

T
Tangente, 83
Temperatura compleja, 290
Teorema
de Abel, 173
de Bernoulli, 286
de Blasius, 286-287, 301
de Bolzano-Weierstrass, 8, 29
de Casorati-Weierstrass, 175
de Cauchy, 115, 334
de Cauchy-Goursat, 115
de De Moivre, 5
de Gauss, 288
de Green, 114
de Heine-Borel, 8
de Jensen, 167
de la aplicación de Riemann, 243-244
de la curva de Jordan, 114
de la unicidad de una prolongación analítica, 319
de Laurent, 174, 186
de Liouville, 145, 151-152
de Morera, 115, 145, 151, 334
de Picard, 175
de Rouché, 145, 156
de Schwartz, 160
de Taylor, 173, 184
del argumento, 145
del binomio, 174
del desarrollo de Mittag-Leffler, 209, 231
del módulo máximo, 145, 153-154
del módulo mínimo, 145, 154
del residuo, 162, 206, 210
del valor medio de Gauss, 145, 152-153
fundamental del álgebra, 6, 145, 152
Teoremas
de factorización de Weierstrass, 321, 339
sobre continuidad, 48
sobre límites de sucesiones, 49
Teoría de la elasticidad, 316
Transformación, 42, 50, 242, 243
estiramiento, 245
inversión, 245
rotación, 244
traslación, 244
de Joukowski, 271
de Landen, 365
de Schwarz-Christoffel, 246-247, 265, 270
bilineal *véase* transformación fraccionaria,
conforme, 42, 50, 242, 258
fraccionaria, 43, 245
inversa, 242
involutiva, 277
lineal, 43, 245
racional, 43
Transformaciones conformes, 83
Transformaciones sucesivas, 245
Traslación, 244, 256
Trayectoria poligonal, 8
Triple polo *véase* polo de orden *n*

U
Unidad imaginaria, 2
Unión de conjuntos, 8

V
Valor
absoluto, 2, 3, 4
compleja, 2, 41
de una función, 41
dependiente, 41
ficticia, 117
independiente, 41
principal, 4, 41, 44
principal de Cauchy, 208
real, 2
Vecindad, 7
Vecindad agujerada, 7
Vector posición, 6
Velocidad, 84
Velocidad compleja, 283
Vórtice, 285

www.FreeLibros.me

www.FreeLibros.me